

HIRFL-CSR 电子冷却装置上 的横向电子束温度

饶亦农 夏佳文 原有进 魏宝文

(中国科学院近代物理研究所 兰州 730000)

1995-06-07 收稿

摘 要

从磁场中单电子的轨道运动方程出发, 分析并推出了 HIRFL-CSR 电子冷却装置上的横向电子束温度, 并得到了一些重要结论.

关键词 电子冷却装置, 螺线管, 电子束温度.

1 引 言

横向电子束温度是决定电子冷却过程快慢的主要参量. 当被冷却离子的速度小于电子束的横向方均根速度时, 离子受到的横向与纵向快速碰撞冷却力分别正比于 $(kT_{e\perp})^{-3/2}$ 和 $(kT_{e\perp})^{-1}$, 显然, 降低横向电子束温度可以增大束流冷却率, 缩短冷却时间. 因此, 对冷却装置设计的一个基本要求, 就是尽量降低电子束的横向温度. 但在具体的冷却装置上, 横向温度是一个难以准确测定的参量, 实际工作中不知其大小. 因此, 从理论上分析与横向温度相关连的各种因素尤为重要.

一般, 引起横向温度的主要因素^[1]包括: 热阴极、电子束空间电荷效应引起的 $E \times B$ 漂移, 电子穿越弯曲螺线管激起的 $R \times B$ 漂移和磁场本身缺陷. 在 HIRFL-CSR 电子冷却装置上, 阴极被加热到 $\sim 1000^\circ\text{C}$, 相应的热运动引起的横向温度约为 0.11eV . 而 $E \times B$ 漂移引起的横向温度约为 0.03eV , 可以忽略. 本文着重从电子在磁场中的轨道运动方程^[2]出发, 对后面两个因素进行分析和计算, 并最终得出 CSR 冷却装置上电子束的横向温度.

2 横向电子束温度

2.1 电子穿越弯曲螺线管引起的横向温度

建立曲线坐标系 (x, y, z) , 其中 z 轴沿着弯曲螺线管的中心轴线, x, y 分别表示电子在偏转平面内的径向坐标和垂直于偏转平面的轴向坐标. 令中心轨道曲率半径为 $R_0(z)$, 采用旁轴近似, 这样单电子的轨道运动方程表示为^[2].

$$\begin{cases} \frac{d^2x}{dt^2} - \left(1 - \frac{x}{R_0}\right) \frac{V_0^2}{R_0} = -\frac{eV_0}{\gamma m_e} (B_y + B_\rho) + \frac{eB_z}{\gamma m_e} \frac{dy}{dt}, \\ \frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{eB_z}{\gamma m_e} \frac{dx}{dt} + \frac{eV_0 B_x}{\gamma m_e}, \end{cases} \quad (1)$$

其中 B_x, B_y, B_z 表示导向磁场的三个分量, B_ρ 则表示轴向偏转磁场. 假设导向磁场沿 z 轴对称分布, 将 B_x, B_y, B_z 在中心轨道上作 Taylor 展开, 代入(1)式, 仅保留一级项, 得到:

$$\begin{cases} \frac{d^2x}{dz^2} + \frac{x}{R_0^2} - \omega \frac{dy}{dz} - \frac{y}{2} \frac{d\omega}{dz} = -\omega \frac{B_y^0}{B_z^0} + \frac{1}{R_0} - \frac{eB_\rho}{p_0}, \\ \frac{d^2y}{dz^2} + \omega \frac{dx}{dz} + \frac{x}{2} \frac{d\omega}{dz} = \omega \frac{B_x^0}{B_z^0}. \end{cases} \quad (2)$$

其中上标“0”表示在中心轨道上取值, $\omega = \omega_c / \gamma_0$, ω_c 表示电子绕 B_z 作回旋运动的角频率, γ_0 和 p_0 分别表示电子沿 z 方向的速度和动量.

为了明确起见, 暂不考虑磁场扰动, 即认为磁场沿纵向均匀分布, 电子的中心轨道即为曲率半径等于 $R_0(z)$ 的光滑曲线, 于是方程(2)简化为:

$$\begin{cases} \frac{d^2x}{dz^2} + \frac{x}{R_0^2} - \omega \frac{dy}{dz} = 0, \\ \frac{d^2y}{dz^2} + \omega \frac{dx}{dz} = 0, \end{cases} \quad (3)$$

这就是电子在中心轨道附近的自由振荡方程, 方程的通解为:

$$\begin{cases} x(z) = x_0 - \frac{x_0[1 - \cos(\Omega z)]}{1 + \omega^2 R_0^2} + \frac{\sin(\Omega z)}{\Omega} \left(\frac{dx}{dz} \right)_0 + \frac{1}{\omega} \left(\frac{dy}{dz} \right)_0 \frac{\omega^2 R_0^2 [1 - \cos(\Omega z)]}{1 + \omega^2 R_0^2}, \\ y(z) = y_0 + \left[x_0 + \frac{1}{\omega} \left(\frac{dy}{dz} \right)_0 \right] \frac{\omega z}{1 + \omega^2 R_0^2} - \frac{\omega x_0}{\Omega} \frac{\sin(\Omega z)}{1 + \omega^2 R_0^2} \\ - \frac{\omega}{\Omega^2} \left(\frac{dx}{dz} \right)_0 [1 - \cos(\Omega z)] + \frac{1}{\Omega} \left(\frac{dy}{dz} \right)_0 \frac{\omega^2 R_0^2 \sin(\Omega z)}{1 + \omega^2 R_0^2}, \end{cases} \quad (4)$$

其中下标“0”指弯曲螺线管入口处的初始值, $\Omega = \sqrt{1 + \omega^2 R_0^2} / R_0$. 方程右边第二项有明确的物理意义: 第一个方程右边第二项表示偏转磁铁引起的“孔径”效应; 第二个方程右边第二项表示惯性离心力引起的轴向漂移. 不考虑耦合振荡, 从上式得到

$$\begin{cases} \frac{dx}{dz} = -x_0 \frac{\Omega \sin(\Omega z)}{1 + \omega^2 R_0^2}, \\ \frac{dy}{dz} = x_0 \frac{\omega [1 - \cos(\Omega z)]}{1 + \omega^2 R_0^2}. \end{cases} \quad (5)$$

由于 $B_z^0 \gg B_\rho$, 所以 $\omega^2 R_0^2 \gg 1$, 即 $\Omega \simeq \omega$, 据此, 由(5)式可推出电子穿越弯曲螺线管后的横向速度

$$\frac{v_\perp}{v_0} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dz} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dz} \right)^2} = \frac{\lambda_L \cdot x_0}{\pi R_0^2} \cdot \sin\left(\frac{\pi \Delta z}{\lambda_L} \right), \quad (6)$$

相应的横向电子温度表示为

$$kT_{e\perp} = \frac{1}{2} m_e c^2 (\beta\gamma)^2 \left(\frac{v_{\perp}}{u_0} \right)^2 = \frac{1}{2} m_e c^2 (\beta\gamma)^2 \left(\frac{\lambda_L \cdot x_0}{\pi R_0^2} \right)^2 \cdot \sin^2 \left(\frac{\pi \Delta z}{\lambda_L} \right), \quad (7)$$

其中 $\lambda_L = 2\pi / \omega$ 表示电子的回旋波长, $\Delta z = \int_0^{\varphi_0} R_0(\varphi) \cdot d\varphi$ 为中心轨道长度, β 、 γ 为相对

论因子.

在 CSR 冷却装置上, 弯曲螺线管的曲率半径 $R_0 = 75\text{cm}$, 偏转角度等于 45° , 相应地 $\Delta z = 58.9\text{cm}$. 若磁场强度取为 1.2kG , 那么根据(7)式计算得到的最外层电子的横向温度随工作能量的变化曲线如图1所示. 从图上可以看出, 在装置的整个工作能量范围内, 弯曲螺线管的孔径效应和离心漂移引起的电子温度低于 0.20eV .

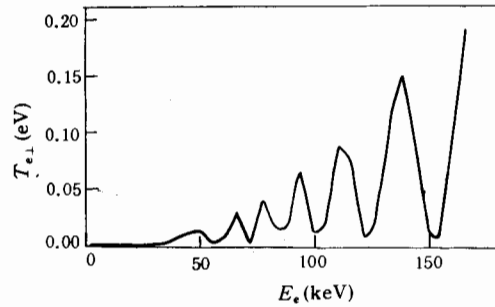


图1 弯曲螺线管的孔径效应和离心漂移引起的横向电子温度

2.2 磁场缺陷引起的横向温度

在冷却装置上, 磁约束系统存在缺陷将激起电子的螺旋运动, 形成横向加温. 通常最大的纵向场扰动出现在直螺线管与弯曲螺线管的过渡区域^[1,3], 因为在该位置载流线圈匝数丢失. 另外, 在弯曲螺线管内部, 尤其是在两端, 轴向偏转场分布不均匀, 导致电子的中心轨道与理想的参考轨道不重合, 也会对电子束形成横向加热. 下面对这两种最普遍的情况分别进行分析.

2.2.1 过渡区域纵向场扰动

仍然从磁场中单电子的轨道运动方程出发, 建立柱坐标系 (r, θ, z) , 电子的横向运动方程表示为^[2]

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{1}{\beta\gamma} \frac{d}{dz} \left(\beta\gamma \frac{dr}{dz} \right) + \frac{\omega^2}{4} \left(1 - \frac{B_z^2 \sigma_0^4}{B_z^2 r^4} \right) r &= - \frac{eB_\theta}{\beta\gamma m_e c}, \end{aligned} \right. \quad (8.1)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \gamma m_e \frac{d\theta}{dt} r^2 + \frac{eB_z r^2}{2} &= \frac{eB_z \sigma_0^2}{2}, \end{aligned} \right. \quad (8.2)$$

其中 $\omega = \omega_c / u_0$, 下标“0”表示初始值.

考虑电子沿径向的微小运动, 令

$$r = r_0 [1 + \xi(z)], \quad \xi \ll 1,$$

略去电子束空间电荷效应产生的自磁场, 则 $B_\theta = 0$. 另外, 在电子加速过程中, $\beta\gamma$ 是时间的慢变函数, 即 $\frac{d(\beta\gamma)}{dz} \simeq 0$, 于是由方程(8.1)化简得到

$$\frac{d^2 \xi}{dz^2} + \omega^2 \xi = -\omega^2 \cdot \frac{\delta B_z}{2B_{z0}}, \quad (9)$$

其特解

$$\xi(z) = -\frac{\omega}{2} \int_0^z \frac{\delta B_z(x)}{B_{z_0}} \cdot \sin\omega(z-x) \cdot dx \quad (10)$$

就表示纵向磁场扰动 $\delta B_z = B_z(z) - B_{z_0}$ 引起的电子径向位移。

由方程(8.2)式可以得到

$$\frac{d\theta}{dt} = -\frac{eB_{z_0}}{m_e} \left(\xi + \frac{\delta B_z}{2B_{z_0}} \right), \quad (11)$$

这样, 由(10)、(11)两式可推出纵向磁场缺陷引起的总的横向电子速度

$$v_{\perp}(z) = \sqrt{\left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + \left(r \frac{d\theta}{dt} \right)^2} \\ \approx \frac{\omega r_0}{2} \sqrt{\left[\int_0^z \frac{\delta B_z(x)}{B_{z_0}} \cdot \cos\omega(z-x) \cdot dx \right]^2 + \left[\int_0^z \frac{\delta B_z(x)}{B_{z_0}} \cdot \sin\omega(z-x) \cdot dx \right]^2}. \quad (12)$$

显然, $v_{\perp}(z)$ 与纵向磁场扰动 δB_z 的形状有关。参看 IUCF^[1] 及 TARN-II^[2] 冷却装置测磁结果, 假设 CSR 装置过渡区域纵向磁场分布如图 2 实线所示, 数学上可近似表示为(图 2 虚线所示):

$$\delta B_z(z) = \frac{\delta B_0}{2} \left[1 - \cos\left(2\pi \cdot \frac{z-z_0}{\Delta} \right) \right], \quad (z_0 \leq z \leq z^*), \quad (13)$$

其中 $\Delta = z^* - z_0$ 表示纵向磁场的扰动波长。

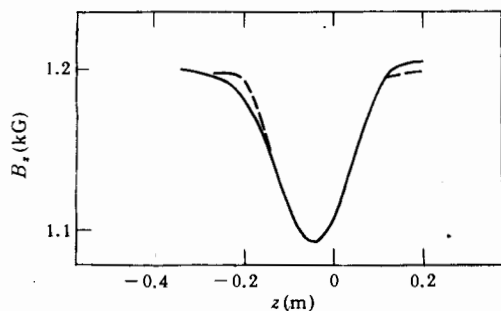


图 2 过渡区域纵向磁场扰动
——表示 IUCF 冷却装置测磁结果;
---表示由式(13)的模拟结果。

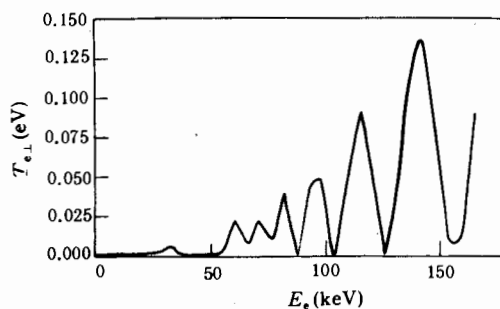


图 3 过渡区纵向磁场扰动引起的横向电子温度

将(13)式代入(12)式进行积分运算, 不难推出

$$\frac{v_{\perp}}{v_0} = \frac{\pi r_0}{\lambda_L} \frac{\delta B_0}{B_0} \cdot \frac{\sin\left(\frac{\pi\Delta}{\lambda_L}\right)}{1 - \left(\frac{\Delta}{\lambda_L}\right)^2}$$

因此, 纵向磁场扰动产生的横向电子温度表示为

$$kT_{e\perp} = \frac{1}{2} m_e c^2 (\beta\gamma)^2 \cdot \left(\frac{\pi r_0}{\lambda_L} \frac{\delta B_0}{B_0} \right)^2 \left[\frac{\sin\left(\frac{\pi\Delta}{\lambda_L}\right)}{1 - \left(\frac{\Delta}{\lambda_L}\right)^2} \right]^2. \quad (14)$$

令 $x = \frac{\Delta}{\lambda_L}$, 那么当 $x \gg 1$ 即 $\Delta \gg \lambda_L$ 时, T_{\perp} 随螺线管磁场 B_0 的增大近似以 B_0^{-6} 的规律迅速振荡衰减. 这表明, 当纵向磁场扰动长度远大于电子的回旋波长时, 由于纵向磁场不均匀性造成的横向电子温度可减到最小, 电子束将绝热地穿越场扰动.

假设 CSR 装置过渡区域纵向磁场扰动长度 $\Delta \simeq 60\text{cm}$, 最大扰动量 $\frac{\delta B_0}{B_0} \simeq 8\%$, 那么在不同工作能量下, 最外层电子穿越该区域后附加的横向温度如图 3 所示. 可以看出, 在工作能量范围内, 电子束获得的横向温度低于 0.14eV .

2.2.2 弯曲螺线管内偏转场扰动

为了分析弯曲螺线管中偏转磁场缺陷对电子束的扰动, 假设纵向磁场是均匀分布的, 并且由于 $B_z^2 \gg B_\rho$, 因此 $\omega R_0 \gg 1$, 于是方程(2)可简化为:

$$\begin{cases} \frac{d^2x}{dz^2} - \omega \frac{dy}{dz} = f(z), \\ \frac{d^2y}{dz^2} + \omega \frac{dx}{dz} = 0, \end{cases} \quad (15)$$

其中

$$f(z) = \frac{1}{R_0(z)} - \frac{eB_\rho(z)}{p_0} = \frac{1}{R_0(z)} \cdot \frac{\delta B_\rho(z)}{B_{\rho 0}(z)}.$$

表示偏转磁场缺陷产生的外力, 其中 $B_{\rho 0}(z)$ 表示中心轨道上的偏转场, 即

$$p_0 = eB_{\rho 0}(z)R_0(z).$$

方程(15)的特解可表示为

$$\begin{cases} x(z) = \frac{1}{\omega} \int_0^z f(x) \cdot \sin\omega(z-x) \cdot dx, \\ y(z) = \frac{1}{\omega} \int_0^z f(x) \cdot \cos\omega(z-x) \cdot dx - \frac{1}{\omega} \int_0^z f(x) \cdot dx. \end{cases}$$

因此偏转磁场缺陷引起的横向电子速度表示为

$$\begin{aligned} \frac{v_{e\perp}}{v_0} &= \sqrt{\left(\frac{dx}{dz}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dz}\right)^2} \\ &= \sqrt{\left[\int_0^z f(x) \cdot \cos\omega(z-x) \cdot dx\right]^2 + \left[\int_0^z f(x) \cdot \sin\omega(z-x) \cdot dx\right]^2}. \end{aligned} \quad (16)$$

根据 IUCF 装置的测磁结果^[1], 从中分析出图 4 所示的一个缺陷场分布, 可描述为

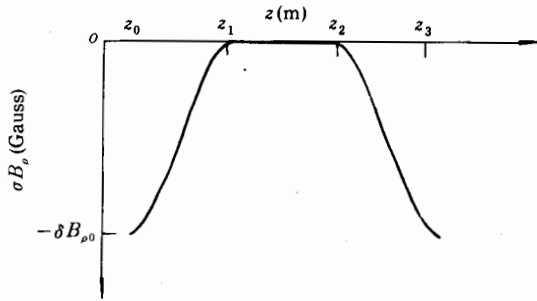


图4 弯曲螺线管中偏转场扰动

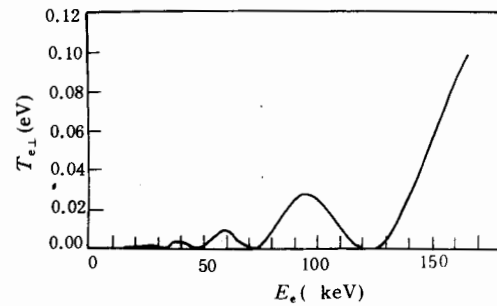


图5 弯曲螺线管内偏转场扰动引起的横向电子温度

$$\delta B_p(z) = \begin{cases} -\frac{\delta B_{\rho 0}}{2} \left[1 + \cos\left(\pi \cdot \frac{z-z_0}{\delta}\right) \right], & (z_0 \leq z \leq z_0 + \delta) \\ 0, & (z_0 + \delta \leq z \leq z_0 + 2\delta) \\ -\frac{\delta B_{\rho 0}}{2} \left[1 - \cos\left(\pi \cdot \frac{z-(z_0+2\delta)}{\delta}\right) \right], & (z_0 + 2\delta \leq z \leq z_0 + 3\delta) \end{cases}, \quad (17)$$

其中 $\delta = z_1 - z_0 = z_2 - z_1 = z_3 - z_2$.

将(17)式代入(16)式可以推出

$$\frac{v_{e\perp}}{v_0} = \frac{\lambda_L}{\pi R_0} \frac{\delta B_{\rho 0}}{B_{\rho 0}} \cdot \sin\left(\frac{\pi \Delta}{2\lambda_L}\right),$$

横向温度则为

$$kT_{e\perp} = \frac{1}{2} \left(\frac{\lambda_L}{\pi R_0} \frac{\delta B_{\rho 0}}{B_{\rho 0}} \right)^2 \cdot \sin^2\left(\frac{\pi \Delta}{3\lambda_L}\right). \quad (18)$$

在 CSR 冷却装置上, $\delta B_{\rho 0} / B_{\rho 0}$ 取 IUCF 装置的典型值 2.2%, 从而, 依据(18)式计算得到横向温度随工作能量的变化曲线, 如图 5 所示. 可见, 偏转磁场缺陷引起的电子温度低于阴极温度 0.1eV.

3 结 论

本文具体分析了 CSR 冷却装置上不同因素引起的横向电子温度. 综合起来, 热阴极引起的横向温度为 0.11eV; 电子束空间电荷效应引起的横向温度约为 0.03eV; 弯曲螺线管的孔径效应和离心漂移附加的最大温度约为 0.20eV; 过渡区域纵向磁场不均匀性以及弯曲螺线管内偏转场缺陷产生的温度分别为 0.14eV 和 0.10eV. 但是, 从(7)、(14)两式可以看出, 附加的横向温度正比于电子径向偏离的平方, 当冷却过程开始进行, 被冷却的离子束迅速收敛于电子束的中央, 所以与离子相互作用的电子束横向温度要低得多. 由此可见, 在设计冷却装置时, 不必象早期的装置如 ICE / CERN 一样将过渡区域纵向磁场不均匀性减小到几个 Gauss 的水平, 特别是在低能情况下. 总之, 在 CSR 冷却段内, 与离子相互作用的电子束, 其总的横向温度低于 0.6eV.

参 考 文 献

- [1] T. Ellison, Doctor thesis (1990).
[2] Y. Derbenev, I. Meshkov, CERN 77-08 (1977).
[3] T. Tanabe *et al.*, *Nucl. Instr. and Meth.*, **A307** (1991) 7.

Electron Beam Transverse Temperatures On Hirfl-CSR E-Cooler

Rao Yinong Xia Jiawen Yuan Youjin Wei Baowen

(*Institute of Modern Physics, The Chinese Academy of Sciences, Lanzhou 730000*)

Received 7 June 1995

Abstract

Electron beam transverse temperatures on HIRFL-CSR electron cooler are deduced from motion equations of single electron in the magnetic field. Some important conclusions have been drawn.

Key words electron cooler, solenoid, electron beam transverse temperature.