第35卷第4期 上海师范大学学报(自然科学版) Vol. 35, No. 4
2006年8月 Journal of Shanghai Normal University(Natural Sciences) 2006, Aug.

拉格朗日——牛顿法的一个局部超线性收敛算法

李树冬[1]，桂胜华[2]

(1. 上海商学院基础教学部，上海 200235；2. 上海第二工业大学理学院，上海 201209)

摘　要：桂胜华等曾提出含弱互补函数的不等式约束最优化问题的拉格朗日-牛顿法和拟牛顿法，但算法中计算 Hesse 矩阵的工作量较大，且该算法仅能解不等式约束最优化问题. 论文改进了桂胜华等的算法，用拟牛顿公式代替了 Hesse 矩阵，并把解不等式约束最优化问题推广到既含不等式约束又含等式约束最优化问题；证明了此算法具有全局收敛性和局部超线性收敛性.

关键词：KKT 点；拟牛顿法；约束非线性规划；超线性收敛

中图分类号：O221.2　　**文献标识码**：A　　**文章编号**：1000-5137(2006)04-0020-06

0 引　言

考虑带有约束条件的非线性优化问题——简称 NLP 问题：

$$\begin{aligned} \min_{x\in R^n} \quad & f(x) \\ s.t. \quad & g_j(x) \leqslant 0,\ 1 \leqslant j \leqslant m; \\ & c_j(x) = 0,\ 1 \leqslant j \leqslant l. \end{aligned} \tag{1}$$

其中：$G(x) = (g_1(x), g_2(x), \cdots, g_m(x))^T: R^n \to R^m$，$C(x) = (c_1(x), c_2(x), \cdots, c_l(x))^T: R^n \to R^l$ 和 $f: R^n \to R$ 是连续可微函数.

NLP 问题的可行域记为：$D = \{x \in R^n \mid G(x) \leqslant 0,\ C(x) = 0\}$，拉格朗日函数记为：

$$L(x, \lambda) = f(x) + \lambda^T G(x) + \omega^T C(x),$$

其中 $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m)^T \in R^m$ 和 $\omega = (\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_l)^T \in R^l$ 是拉格朗日乘子向量. 为了简单起见，将 (x, λ, ω) 记为空间向量 $(x^T, \lambda^T, \omega^T)^T$.

$(\bar{x}, \bar{\lambda}, \bar{\omega}) \in R^n \times R^m \times R^l$ 是一个 KKT(*Karush - Kuhn - Tucker*)点的条件是：

$$\nabla_x L(\bar{x}, \bar{\lambda}, \bar{\omega}) = 0,\ G(\bar{x}) \leqslant 0,\ \bar{\lambda} \geqslant 0,\ \bar{\lambda}_i g_i(\bar{x}) = 0,\ C(\bar{x}) = 0, \tag{2}$$

其中：$1 \leqslant i \leqslant m$. 如果存在 $\bar{\lambda}$ 和 $\bar{\omega}$ 使得 $(\bar{x}, \bar{\lambda}, \bar{\omega})$ 满足 (3) 式，也称 $\bar{x}$ 为一个 KKT 点.

构造一向量：

$$\Phi(x, \lambda, \omega) = ((\nabla_x L(x, \lambda))^T, (\Phi_1(x, \lambda))^T, C(x)^T)^T. \tag{3}$$

其中：$\Phi_1(x, \lambda) = (\phi_1(x, \lambda), \cdots, \phi_m(x, \lambda))^T$ 而 $\phi_i(x, \lambda) = g_i(x)\lambda_i$，$(1 \leqslant i \leqslant m)$. 显然，(3) 式的 KKT 点条件等价于 $\Phi(x, \lambda, \omega) = 0$. 可得：

$$\nabla_x \phi_i = \lambda_i \nabla g_i(x);\ \nabla_\lambda \phi_i = g_i(x) e_i. \tag{4}$$

收稿日期：2006-02-26

基金项目：国家自然科学基金项目(10571137)；上海市教委科研项目(05RZ12).

作者简介：李树冬(1960-)，男，上海商学院讲师；桂胜华(1963-)，男，博士，上海第二工业大学理学院数学系副教授.

其中: $e_i=(0,\cdots,0,1,0\cdots,0)^T\in R^m$ 是单位矩阵的第 i 列向量,它的第 i 个元素是1,而其余元素都是0. 对向量 $\Phi(x,\lambda,\omega)$ 求导数可得:

$$\Phi'=\begin{pmatrix}\nabla_x^2L(x,\lambda,\omega) & \nabla G(x) & \nabla C(x)\\ \mathrm{diag}(\lambda)\ (\nabla G(x))^T & \mathrm{diag}(g(x)) & 0\\ (\nabla C(x))^T & 0 & 0\end{pmatrix}. \tag{5}$$

其中: $\mathrm{diag}(\lambda)$ 和 $\mathrm{diag}(g(x))$ 表示第 j 个对角元素分别为 λ_j 和 $g_j(x)$ 的对角矩阵. $\nabla G=[\nabla g_1(x),\cdots,\nabla g_m(x)]$, $\nabla C=[\nabla c_1(x),\cdots,\nabla c_l(x)]$. 根据拉格朗日 - 牛顿方法,构造出下列方程组:

$$(\Phi')^k\begin{pmatrix}\delta x^k\\ \delta\lambda^k\\ \delta\omega^k\end{pmatrix}=-\Phi^k. \tag{6}$$

由于 $\nabla_x^2L(x,\lambda,\omega)$ 的计算的工作量较大,故运用拟牛顿方法,将 $\nabla_x^2L(x^k,\lambda^k,\omega^k)$ 用正定矩阵 H^k 来代替. 为使算法具有全局收敛性,在 (6) 式中,将 $(\Phi')^k$ 替换成 V^k,即:

$$V^k\begin{pmatrix}\delta x^k\\ \delta\lambda^k\\ \delta\omega^k\end{pmatrix}=-\Phi^k. \tag{7}$$

其中:

$$V^k=\begin{pmatrix}H^k & \nabla G(x^k) & \nabla C(x^k)\\ \mathrm{diag}(\mu^k)\ (\nabla G(x^k))^T & \mathrm{diag}(g(x^k)) & 0\\ (\nabla C(x^k))^T & 0 & 0\end{pmatrix}. \tag{8}$$

(7) 式也可恒等变形为下列方程组:

$$V^k\begin{pmatrix}d^{k0}\\ \lambda^{k0}\\ \omega^{k0}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\nabla f^k\\ 0\\ -C^k\end{pmatrix} \tag{9}$$

其中: $d^{k0}=\delta x^k$, $\lambda^{k0}=\lambda^k+\delta\lambda^k$, $\omega^{k0}=\omega^k+\delta\omega^k$.

引用约束违反度函数: $C^{(-)}(x)=(c_1^{(-)}(x),\cdots,c_l^{(-)}(x))^T$ 和 $G^{(-)}(x)=(g_1^{(-)}(x),\cdots,g_m^{(-)}(x))^T$:

$$c_i^{(-)}(x)=c_i(x),\ i=1,2,\cdots,l; \tag{10}$$

$$g_i^{(-)}(x)=\min\{0,g_i(x)\},\ i=1,2,\cdots,m; \tag{11}$$

再构造一个价值函数:

$$P(x,\sigma)=f(x)+\sigma(\|G^{(-)}(x)\|_1+\|C^{(-)}(x)\|_1). \tag{12}$$

1 算 法

算法 A

S0: 初时赋值.

给定初值: $x_1\in R^n$, $\lambda_1\in R^m$, $\mu_1\in R^m$, $\omega_1\in R^l$, $H^1\in R^{n\times n}$, $\bar{\mu}>0$, $\sigma\geq 0$, $\delta\geq 0$, $\varepsilon\geq 0$, $k:=1$.

S1: 计算搜索方向.

解方程组 (7) 或 (9),得 δx^k 的值. 如果 $\|\delta x^k\|\leq\varepsilon$,则停止计算.

S2: 收索.

计算 $\alpha^k\in[0,\delta]$ 使得

$$P(x^k+\alpha^k\delta x^k,\sigma)\leq\min_{0\leq\alpha\leq\delta}P(x^k+\alpha^k\delta x^k,\sigma)+\varepsilon^k \tag{13}$$

S3: 迭代.

迭代 $x^{k+1}=x^k+\alpha^k\delta x^k,\ \lambda^{k+1}=\lambda^k+\alpha^k\delta\lambda^k,\ \omega^{k+1}=\omega^k+\alpha^k\delta\omega^k$.

$$\mu^{k+1}=\min\{\max\{\lambda^{k+1},\lambda^{k0},\|\delta x^k\|e\},\bar{\mu}e\}. \tag{14}$$

计算 H^{k+1}. $k:=k+1$. 转入 S1.

在算法 6.2.1 中,用拟牛顿法来计算 H^k:

$$H^{k+1}=H^k-\frac{H^k s^k(s^k)^T H^k}{(s^k)^T H^k s^k}+\frac{y^k(y^k)^T}{(s^k)^T y^k}, \tag{15}$$

其中

$$y^k=\begin{cases}\hat{y}^k & (s^k)^T\hat{y}^k\geqslant 0.2(s^k)^T H^k s^k\\ \theta^k\hat{y}^k+(1-\theta^k)H^k s^k & \text{否则}\end{cases}, \tag{16}$$

$$\begin{cases}s^k=x^{k+1}-x^k\\ \hat{y}^k=\nabla f(x^k)-\nabla f(x^{k+1})+(\nabla G(x^{k+1})-\nabla G(x^k))\lambda^{k0}\\ \theta^k=0.8(s^k)^T H^k s^k/((s^k)^T H^k s^k-(s^k)^T\hat{y}^k)\end{cases}. \tag{17}$$

在本文中,假定 A1 ~ A4 4 个假设成立.

A1 NLP 问题的可行域 D 是非空的. 水平集 $S=\{x\in D\mid f(x)\leqslant f(x_0)\}$ 有界集.

A2 $f(x)$, $G(x)$ 和 $C(x)$ 是连续可微的.

A3 对任意点 $x\in D$,向量 $\{\nabla g_j(x),\nabla c_i(x)\mid j\in I(x),\ i\in E\}$ 是线性独立的.

A4 H^k 是正定矩阵.

条件 A3 中 $E=\{1,2,\cdots,m\}$. $I(x)=\{j\in I\mid g_j(x)=0\}$, $I=\{1,2,\cdots,l\}$.

类似于 [3] 和 [4] 中的引理 2.1 和引理 2.2 的证明,可得下面两个引理.

引理 1.1 假定 $x^k\in D$. 如果 $\mu_j^k>0,\ \forall j\in I(x^k)$,则 在 (8) 中的矩阵 V^k 是非奇异的.

引理 1.2 假定 V^k 是非奇异矩阵.

(1) 如果算法 A 的计算 是因为满足条件 $d^{k0}=0$ 而停止在点 x^k,且满足 $\lambda^{k0}\geqslant 0$ x 和 $G(x^k)\leqslant 0$,则 $(x^k,\lambda^{k0},\omega^{k0})$ 是 NLP 问题的一个 KKT 点.

(2) 假定 (x^*,λ^*,ω^*) 是 $\{x^k,\lambda^{k0},\omega^{k0}\}$ 的任一聚点,即存在子集 K,使得: $\{x^k,\lambda^{k0},\omega^{k0}\}_K\to(x^*,\lambda^*,\omega^*)$. 如果 $\{d^k\}_K\to 0$ 和 $\lambda^*\geqslant 0$, $G(x^*)\leqslant 0$,则 (x^*,λ^*,ω^*) 是 NLP 问题的一个 KKT 点.

不失一般性,在本文以下部分中,假定算法在计算中,不因为满足条件 $d^{k0}=0$ 而停止在点 x^k,即: $d^{k0}\neq 0,\ \forall k$.

2 全局收敛性

类似于 [3] 和 [4] 中的引理 3.1 的证明,可得下面引理 2.1.

引理 2.1 如果 δx^k 是线性方程组 (7) 的解, 则 (12) 式的价值函数 $P(x,\sigma)$ 满足:

$$\begin{aligned}P'_\alpha(x^k+\alpha\delta x^k,\sigma)\mid_{\alpha=0}\leqslant&-(d^{k0})^T H^k d^{k0}-\sum_{i=1}^{l}\mid c_i^{(-)}(x^k)\mid[\sigma-\mid\omega_i^{k0}\mid]\\&+\sum_{i\in\{i\mid g_i(x^k)\leqslant 0\}}g_i(x^k)\frac{(\lambda_i^{k0})^2}{\mu_i^k}-\sum_{i\in\{i\mid g_i(x^k)>0\}}g_i(x^k)[\sigma(1-\mid 1-\frac{\lambda_i^{k0}}{\mu_i^k}\mid)-\frac{(\lambda_i^{k0})^2}{\mu_i^k}].\end{aligned} \tag{18}$$

如果 $\sigma\geqslant\|\omega^{k0}\|_\infty$ 且 $G(x^k)\leqslant 0$, 或 $\lambda_i^{k0}>0$ 且选取的 σ 足够的大,则有:

$$P'_\alpha(x^k+\alpha\delta x^k,\sigma)\mid_{\alpha=0}\leqslant-(d^{k0})^T H^k d^{k0}<0.$$

定理 2.1 设 (x^*,λ^*,ω^*) 是由算法 A 产生的点集 $\{x^k,\lambda^{k0}\omega^{k0}\}$ 的任一聚点,即存在子集 K,使得: $\{x^k,\lambda^{k0},\omega^{k0}\}_K\to(x^*,\lambda^*,\omega^*)$,又设算法 S2 中的 ε_i 满足: $\sum_{k=1}^{\infty}\varepsilon_k\leqslant+\infty$,并假定存在两个正数 m 和 M,使得:

$$m\|d\|^2 \leqslant d^T H^k d \leqslant M\|d\|^2,\ \forall\ k \in K,\ d \in R^n$$

如果 $\sigma \geqslant \|\omega^{k0}\|_\infty$，$\lambda^* \geqslant 0$ 且 $G(x^*) \leqslant 0$，则：聚点 x^* 是 NLP 问题的一个 KKT 点.

证明 假定定理不真，即：存在子集 K，使得：$\{x^k\}_K \to x^*$，但是 x^* 不是 NLP 问题的一个 KKT 点. 如果 $\lim\limits_{k\in K, k\to\infty} \|d^{k0}\| = 0$，则由引理 2.2 知：$x^*$ 是 NLP 问题的一个 KKT 点. 这样与假定相矛盾. 故可假定：存在正数 η，使得：$\|d^{k0}\| \geqslant \eta,\ \forall\ k \in K$. 由引理 3.1 可得：

$$P'_\alpha(x^k + \alpha\,\delta x^k, \sigma)\,|_{\alpha=0} \leqslant -m\eta\ \|d^{k0}\|,\ \forall\ k \in K. \tag{19}$$

由（19）式和假定 A2 知：存在两个正数 $\bar{\eta}$ 和 δ，使得：

$$\min_{0\leqslant\alpha\leqslant\delta} P(x^k + \alpha\,\delta x^k, \sigma) \leqslant P(x^k, \sigma) - \bar{\eta}. \tag{20}$$

由（27）式可得：

$$P(x^{k+1}, \sigma) \leqslant P(x^k, \sigma) - \bar{\eta} + \varepsilon_k,\ \forall k \in K. \tag{21}$$

故有：

$$\sum_{k\in K}\bar{\eta} \leqslant \sum_{k\in K}[P(x^k,\sigma) - P(x^{k+1},\sigma)] + \sum_{k\in K}\varepsilon_k \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} P(x^k,\sigma) - P(x^{k+1},\sigma)] + \sum_{k=1}^{\infty}\varepsilon_k, \tag{22}$$

即有：

$$\sum_{k\in K}\bar{\eta} \leqslant P(x^1,\sigma) - P(x^*,\sigma) + \sum_{k=1}^{\infty}\varepsilon_k \leqslant +\infty. \tag{23}$$

由(23) 式和 $\bar{\eta} > 0$ 知：子集 K 是一个有限集. 这与 K 是一个无限子集相矛盾. 定理 2.1 为真.

3 局部超线性收敛性

为了克服 Marotos 效应，以下对算法 A 的进行改进，即引进二阶校正步 $\tilde{d}^k$ 方法.

算法 B

S0：初时赋值.

给定初值：$x_1 \in R^n$，$\lambda_1 \in R^m$，$\mu_1 \in R^m$，$\omega_1 \in R^l$，$H^1 \in R^{n\times n}$，$\bar{\mu} > 0$，$\sigma \geqslant 0$，$\delta \geqslant 0$，$\varepsilon \geqslant 0$，$k:=1$.

S1：计算搜索方向.

解方程组（7）或（9），得 δx^k 的值. 如果 $\|\delta x^k\| \leqslant \varepsilon$，则停止计算.

S2：计算二阶校正步.

计算积极约束下标集：

$$I_k = \{i \mid g_i^k \geqslant -\lambda_i^k\}. \tag{24}$$

通过解下列关于（d，λ）的二次子规划问题，得校正方向 $\tilde{d}^k$：

$$\begin{pmatrix} H^k & \nabla\tilde{C}^k \\ (\nabla\tilde{C}^k)^T & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\tilde{C}(x^k + d^k) \end{pmatrix}, \tag{25}$$

其中：

$$\tilde{C}^k = ((\tilde{G}^k)^T, (C^k)^T)^T,\ \tilde{G}^k \text{ 是由 } g_i^k \text{ 组成的列向量}, i \in I_k. \tag{26}$$

如果（25）无解或如果 $\|\tilde{d}^k\| \geqslant \|d^k\|$，则让 $\|\tilde{d}^k\| = 0$.

S3：收索.

计算 $\alpha^k \in [0,\delta]$ 使得：

$$P(x^k + \alpha^k\,\delta x^k + (\alpha^k)^2\tilde{d}^k, \sigma) \leqslant \min_{0\leqslant\alpha\leqslant\delta} P(x^k + \alpha^k\,\delta x^k + (\alpha^k)^2\tilde{d}^k, \sigma) + \varepsilon^k. \tag{27}$$

S4：迭代.

迭代 $x^{k+1} = x^k + \alpha^k\delta x^k + (\alpha^k)^2\tilde{d}^k$，$\lambda^{k+1} = \lambda^k + \alpha^k\delta\lambda^k$，$\omega^{k+1} = \omega^k + \alpha^k\delta\omega^k$.

$$\mu^{k+1} = \min\{\max\{\lambda^{k+1}, \lambda^{k0}, \|\delta x^k\| e\}, \bar{\mu}e\}. \tag{28}$$

计算 H^{k+1}. $k:=k+1$. 转入 S1.

对算法 B 而言,类似算法 A 的一些结论仍成立.

为使算法具有超线性收敛性,还需增加或加强假设 A5 ~ A8:

A5 $f(x)$, $G(x)$ 和 $C(x)$ 是二阶连续可微的.

A6 严格互补条件和二阶充分性条件在 x^* 满足且 $x^k \to x^*$.

A7 存在正常数 $\bar{m},\bar{M}$ 使得:

$$d^T H^k d \geqslant \bar{m} \| d \|_2^2,\ \forall d \in \{d \mid A(x^*)^T d = 0\},\ \forall k \in \{k \mid \| H^k \| \leqslant \bar{M}\}.$$

A8
$$\lim_{k\to\infty} \frac{\| (H^k - \nabla_x^2 L(x^*,\lambda^*))(\delta x^k + \hat{d}^k) \|}{\| \delta x^k + \hat{d}^k \|} = 0.$$

类似于 [2]中定理4.6,[1]中定理4.9 和 [8]中定理 12.6.3 的证明,可以得到下面超线性收敛性定理.

定理 3.1 设 A1 ~ A8 的假设条件满足,则有:

$$\| x^{k+1} - x^* \| = o \| x^k - x^* \| . \tag{29}$$

4 算 例

在下列的算例的实际计算中,采用算法 B. 在算法 B 的步骤 1 中,为保证矩阵的正定性,在方程的系数矩阵中用 $H^k + \hat{c}_0 I$ 来代替 H^k . 这里的 I 是 n 阶单位矩阵, H^k 仍采用 (15) 中的定义,而 $\hat{c}_0 = \min\{1, \| \delta x^k \| \}$, $\sigma^0 = 10^5$, $\sigma^k = \| \lambda^k \|_\infty + \| \omega^k \|_\infty (k \geqslant 1)$.

表 1 数值结果

Problem	Feasible			
	x^0	It	P	FV
1	(-2,1)	50	8.4e -06	3.696e -11
1	(-2,1)	32	5.0416e -06	2.1465e -15
2	(-2,1)	35	1.2571e -07	1.8498e -16
4	(1.125,0.125)	4	9.2797e -07	2.6667e +00
5	(0,0)	5	2.7551e -6	-1.9132e +00
10	(-10,10)	84	2.7086e -06	-1.0000e +00
12	(0,0)	6	2.0040e -13	-3.0000e +01
30	(1,1,1)	13	8.4990e -06	1.0000e +00
35	(0.5,0.5,0.5)	7	2.3196e -06	0.1111e +00
37	(10,10,10)	12	5.2604e -06	-3.4560e +03
38	(-3, -1, -3, -1)	25	1.7861e -06	3.1625e -15
41	(2,2,2,2)	4	1.9059e -07	1.9259e +00
43	(0,0,0,0)	8	2.6018e -06	-4.2379e +01
53	(1,2,0,0,0,2)	3	1.9185e -09	4.0930e +00
60	(2,2,2)	11	4.3307e -10	3.260e -02
62	(0.7,0.2,0.1)	4	4.4165e -08	-2.6273e +04
63	(2,2,2)	4	3.5087e -07	9.6172e +02
66	(0,1.05,2.9)	4	3.8011e -10	5.437e -01
73	(1,1,1,1)	5	1.0938e -07	2.98945e +01
76	(0.5,0.5,0.5,0.5)	9	3.8430e -06	-4.6818e +00
80	(-2, -2,2, -1, -1)	3	4.0455e -06	5.39e -02
93	(5.54,4.4,12.02,11.82,0.702,0.852)	9	5.2604e -06	130.9035
100	(1,2,0,4,0,1,1)	12	4.3861e -06	680.6301

在表 1 中,给出了许多算例数值计算结果,其中表中的一些记号分别表示:

L-N-ab: 本文的算法 B,
Problem: 在 [5] 中的问题号码,
x^0: 初时值,
It: 迭代的总次数,
P: 最后的迭代点所对应的罚函数 $P(\cdot)$ 的值,
FV: 最后的迭代点所对应的目标函数$f(\cdot)$ 的值.

参考文献:

[1] QI H, QI L. A New QP - free, globally V, locally superlinear convergent feasible method for the solution of inequality constrained optimization problems[J]. SIAM J Optim, 2000,11: 113 - 132.

[2] PANIER E R, TITS A L, HERSKOVITS J N. A QP - free, globally, locally superlinear convergent method for the inequality constrained optimization problems[J]. SIAM J Control Optim,1988,36:788 - 811.

[3] 桂胜华,贺向阳,王济生. 含弱互补函数的拉格朗日——牛顿法解不等式约束非线性规划问题[J]. 上海第二工业大学学报,2005,9(3):8 - 17.

[4] 桂胜华,张倩,邢丽. 含弱互补函数的拉格朗日——拟牛顿法[J]. 上海第二工业大学学报,2005,12(5):21 - 27.

[5] HOCK W, SCHITTKOWSKI K. Test Example for Nonlinear Programming Codes, Lecture Notes in Econom and Math Systems 187[M]. Berlin: Springer - Verlag,1981.

[6] PU D, TIAN W. Gallobally inexact generalized Newton methods for nonsmooth equation[J]. J of Computational and Applied Mathematics, 2002,138:37 - 49.

[7] PU D, GUI S, TIAN W. A class of revised Broyden algorithms without exactline search[J]. J computational Mathematics, 2004, (22): 11 - 20.

[8] 袁亚湘, 孙文瑜. 最优化理论与方法[M]. 北京: 科学出版社, 2001.

A superlinear convergent algorithm of the Lagrange-Quasi-Newton method

LI Shu - dong [1], GUI Sheng - hua [2]

(1. Shanghai Business College, Shanghai 200235, China;
2. Shanghai Second Polytechnic University, Shanghai 201029,China)

Abstract: In the paper of Gui Sheng - hua et al, a Lagrange-Newton Method with the slack NCP function was proposed for constraint optimization. In this paper, propose a new Lagrange-Quasi-Newton method with the slack NCP function for inequality constraint optimization. Use the Quasi-Newton method instead of the Hessian matrix in the new method. The method is globally convergent and superlinear convergence rate.

Key words: KKTpoint; Quasi-Newton method; constraint optimization; superlinear convergence rat

(责任编辑:冯珍珍)