第35卷第6期 上海师范大学学报(自然科学版) Vol.35, No.6
2006年12月 Journal of Shanghai Normal University (Natural Sciences) 2006, Dec.

稳定模糊谓词

马艳芳，陈仪香

(上海师范大学 数理信息学院，上海 200234)

摘 要：引入稳定模糊谓词的概念,讨论稳定模糊谓词的一些基本性质和它的线性运算,建立具有相容交 dcpo 上的 ξ- 半拓扑与模糊 ξ- 半拓扑之间的序同态关系.

关键词：Domain 理论;半拓扑;稳定模糊谓词

中图分类号：O159;TP301 **文献标识码**：A **文章编号**：1000-5137(2006)06-0030-07

0 引 言

抽象地看,程序可看作是一个状态转换映射—将一个状态映射成另一个状态,而状态域上的条件反映了程序变元应具有的性质.这个条件从内涵角度来看则为谓词,从外延角度则是状态域上的子集.因此状态域上具有什么特点的子集才是谓词的外延集合一直是人们所关注的,同时状态域具有什么结构也是人们关注的.

Plotkin[1]选用的状态域是平坦集合,而谓词是状态域的任意子集,使用 Smyth[2]域,得到了不确定状态转换器与健康谓词转换器的相互确定关系.Smyth 将 Plotkin 的状态域推广到了一般的论域,谓词是论域上的 Scott[3]开集,程序是论域间的 Scott 连续映射.陈仪香[4]选用了稳定论域为状态域,谓词是其上的相容开集,程序是稳定映射及其扩展.

经典的谓词是从状态空间 S 到 $\{0,1\}$ 的映射,称为布尔谓词.在 1981 年的时候,Kozen[5,6]提出了概率谓词的概念,而后人们开始研究概率谓词转换器,如 He et al[7], Jones[8], McIver[9], Morgan[10], Tix[11], Ying[12]等.在他们的工作中谓词是从状态空间 S 到 $[0,1]$（或 R^+）的映射.研究概率谓词转换器的目的是为了给带有概率选择的程序提供语义模型.

在现实世界中,有很多不确定和不精确现象并不能完全用概率来刻画,如“年轻”和“年老”.正是基于这样的考虑,Zadeh[13]提出了模糊集合的概念,其目的在于将这些不确定和不精确现象进行精确的表达.近来,本文第二作者和 Jung[14]将 Zadeh 的模糊集理论和 Scott[15]的论域理论有机结合起来,引入模糊谓词概念,它是论域(dcpo)到[0,1]的 Scott 连续映射,在此基础上提出并讨论了模糊谓词转换器理论.最近研究表明,模糊谓词转换器可用来建立概率计算的模糊逻辑语义[16].本文在现有的工作基础上引入稳定模糊谓词概念,它是一个从具有相容交 dcpo 到 $[0,1]$ 的稳定映射.这个工作恰好对应于陈仪香的经典稳定谓词理论工作[4].

收稿日期：2006-09-05

基金项目：国家自然科学基金(60273054,60673117);教育部高等学校博士学科点专项科研基金(20050270004);上海市重点学科基金(T0401).

作者简介：马艳芳(1978-),女,上海师范大学数理信息学院硕士研究生;陈仪香(1961-),男,上海师范大学数理信息学院教授,博士生导师,主要从事论域理论及其应用,模糊系统与知识工程的研究.

1　预备知识

定义 1[14]　设 D 是一个 dcpo,从 D 到 $[0,1]$ 的 Scott 连续映射称为模糊谓词. 在 D 上的所有模糊谓词构成的集合记作 $\mathscr{P}_f(D)$.

由于模糊谓词本身是一个映射,所以自然的存在模糊谓词的序关系如下

$$P \leqslant Q \text{ 当且仅当 } P(x) \leqslant Q(x),\ \forall x \in D.$$

在这个序关系的基础上我们可以考虑模糊谓词的交和并.

定理 1[16]　$\mathscr{P}_f(D)$ 构成一个模糊拓扑,即 1 和 0 是属于 $\mathscr{P}_f(D)$,且模糊谓词关于有限交和任意并是封闭的.

Berry[18] 为了研究 PCF 语言的语义模型,引入了稳定映射概念,或者说关注 Scott 连续映射的稳定性. Berry 表明 PCF 语言的全抽象论域语义模型中的映射只能是稳定映射,因此稳定映射是论域理论中一类重要的映射.

定义 2[18]　设 D,E 是完备偏序集,$f:D \to E$ 是 Scott 连续映射,若 f 满足 $\forall\ x \in D,\ \forall y \leqslant f(x)$,$\exists x_0 \in D$,使得 $x_0 \leqslant x, y \leqslant f(x_0)$,并且 $\forall\ x' \leqslant x$,只要 $y \leqslant f(x')$,就有 $x_0 \leqslant x'$,则称 f 是稳定映射.

直观上讲,f 是稳定映射当且仅当对于任一已知结果 $y \leqslant f(x)$ 都有来自 x 的最小信息 x_0,即局部最小信息,使得它在 f 作用下达到原已知结果 y,这个最小信息记为 $m(f,x,y)$,即 $m(f,x,y)$ 是 集合 $\{x' \in D: x' \leqslant x, y \leqslant f(x')\}$ 的最小元.

虽然稳定映射是在完备偏序集上定义的,但在不同的论域上有不同的表现,如在文献[17]中,设 D,E 是相容交的完备偏序集,f 是 $D \to E$ 是 Scott 连续映射,则 f 是稳定映射当且仅当 f 保相容集之交.

在文献[17]中把每个相容集都有交的论域称为稳定论域,而在稳定论域上 Scott 开集的一种特殊的情形是相容开集,即设 D 是相容交的完备偏序集,D 的 Scott 开集 U 称为相容的,若对于 U 的任一非空子集 X ,只要 X 相容就有 $\wedge X \in U$. 符号 $\xi(D)$ 表示 D 上的所有相容开集族. 稳定论域上的所有相容开集族关于集合运算不再构成一拓扑,而是一种半拓扑. 这种拓扑与稳定映射保持了象 Scott 拓扑与 Scott 连续映射一样的和谐性.

由于模糊谓词是 Scott 连续映射,所以我们自然地考虑模糊谓词的稳定性,由此引入稳定模糊谓词的定义.

2　稳定模糊谓词的定义及拓扑性质

本节将给出稳定模糊谓词的定义,并在此基础上证明所有稳定模糊谓词构成的集合在点式序下是模糊 ξ- 半拓扑,同时还证明 $\mathscr{S}_f(D)_r(x)$ 是一个 D - 超滤子.

定义 3　设 D 是相容交的 dcpo,$P \in \mathscr{P}_f(D)$ 是模糊谓词,如果 P 还是稳定映射,则称 P 为稳定模糊谓词. 在 D 上的所有稳定模糊谓词构成的集合记为 $\mathscr{S}_f(D)$. 其上的序关系是点式序关系.

性质 1　常量谓词 1 和 0 是稳定的.

引理 1　在实数集合中有下面的事实:如果 $\forall\ t < a\ , t \neq 0$ 都有 $t \leqslant b$,则 $a \leqslant b$.

性质 2　如果 $P,Q \in \mathscr{S}_f(D)$,则 $P \wedge Q \in \mathscr{S}_f(D)$.

证明　定义 $(P \wedge Q)(x) = P(x) \wedge Q(x),\ \forall x \in D.$

因为 P,Q 是稳定的 ,所以 P,Q 是 Scott 连续的. 由定理 1 ,可知 $P \wedge Q$ 是 Scott 连续的.

设 A 是 D 上的相容集合,我们需要证明

$$(P \wedge Q)(\wedge A) = \wedge (P \wedge Q)(A).$$

由 $P \wedge Q$ 的单调性得 $(P \wedge Q)(\wedge A) \leqslant \wedge (P \wedge Q)(A)$. 下面证明相反的不等式,即

$$\wedge (P \wedge Q)(A) \leqslant (P \wedge Q)(\wedge A).$$

因为 $\forall\ x \in A, (P \wedge Q)(x) \leqslant P(x), (P \wedge Q)(x) \leqslant Q(x)$, 因此

$$\wedge (P \wedge Q)(A) \leqslant \wedge P(A) = P(\wedge A),\ \wedge (P \wedge Q)(A) \leqslant \wedge Q(A) = Q(\wedge A).$$

所以

$$\wedge (P \wedge Q)(A) \leqslant P(\wedge A) \wedge Q(\wedge A) = (P \wedge Q)(\wedge A).$$

因此

$$(P \wedge Q)(\wedge A) = \wedge (P \wedge Q)(A).$$

至此表明了 $P \wedge Q \in \mathscr{S}_f(D)$.

已知 $\mathscr{P}_f(D)$ 是一个模糊拓扑，但 $\mathscr{S}_f(D)$ 未必是模糊拓扑，因为稳定模糊谓词的点式并未必属于 $\mathscr{S}_f(D)$（见下例）.

例如 设 $D = \{\bot, a, b, \top\}$，序关系如图 1 所示

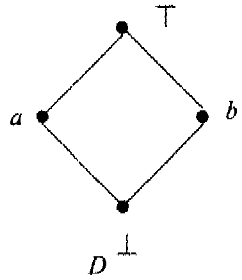

图 1 $D = \{\bot, a, b, \top\}$，序关系图

定义 $f, g: D \to [0,1]$ 为下面的映射

$$f(\bot) = 0 \qquad g(\bot) = 0$$
$$f(a) = \frac{1}{3} \qquad g(a) = 0$$
$$f(b) = 0 \qquad g(b) = \frac{1}{4}$$
$$f(\top) = \frac{1}{2} \qquad g(\top) = \frac{1}{3}$$

则可知 f, g 是稳定模糊谓词.

定义 $(f \vee g)(x) = f(x) \vee g(x)$, $\forall x \in D$，注意到 $A = \{a, b\}$ 是相容集合，并且 $\wedge A = \bot$，但是

$$(f \vee g)(\wedge A) = (f \vee g)(\bot) = 0.$$

而

$$(f \vee g)(a) \wedge (f \vee g)(b) = \frac{1}{3} \wedge \frac{1}{4} = \frac{1}{4}.$$

因此

$$(f \vee g)(\wedge A) \neq (f \vee g)(a) \wedge (f \vee g)(b).$$

故 $f \vee g \notin \mathscr{S}_f(D)$.

定义 4 设 $f, g \in \mathscr{S}_f(D)$，如果 $f \wedge g = 0$，则称 f 和 g 是分离的.

定理 2 设 $\{f_i \mid i \in I\} \subseteq \mathscr{S}_f(D)$，且 $\{f_i \mid i \in I\}$ 是分离的，即当 $i \neq j$ 时，$f_i \wedge f_j = 0$，则分离并 $\coprod_{i \in I} f_i \in \mathscr{S}_f(D)$.

证明 因为 $\{f_i, i \in I\}$ 是稳定映射，所以 $\{f_i, i \in I\}$ 是 Scott 连续的. 由定理 1 可知任意并 $\bigvee_{i \in I} f_i$ 是 Scott 连续的，从而分离并 $\coprod_{i \in I} f_i$ 也是 Scott 连续的.

下面只需要证明 $\coprod_{i \in I} f_i$ 保相容交.

设 E 是 D 上的相容集合，d 是 E 的上界，则我们需要证明下面式子成立，

$$(\coprod_{i \in I} f_i)(\wedge E) = \wedge (\coprod_{i \in I} f_i)(E).$$

假设 $t < \wedge (\coprod_{i \in I} f_i)(E)$，则

$$\forall x \in E, t < \coprod_{i \in I} f_i(x) \leqslant \coprod_{i \in I} f_i(d),$$

因此 $\exists\ i_0 \in I$ 使得 $t < f_{i_0}(d)$.

由于 $\forall\ x \in E, t < \coprod_{i \in I} f_i(x)$，因此 $\exists\ i_x \in I$ 使得 $t < f_{i_x}(x) \leqslant f_{i_x}(d)$.

若 $i_x \neq i_0$，则

$$t \leqslant f_{i_x}(d) \wedge f_{i_0}(d) = (f_{i_x} \wedge f_{i_0})(d) = 0,$$

因此 $t = 0$，产生矛盾，故 $i_x = i_0$. 所以 $\forall\ x \in E, t < f_{i_0}(x)$，从而 $t \leqslant \wedge f_{i_0}(E) = f_{i_0}(\wedge E) \leqslant (\coprod_{i \in I} f_i)(\wedge E))$. 由引理 1，可得 $\wedge (\coprod_{i \in I} f_i)(E) \leqslant (\coprod_{i \in I} f_i)(\wedge E)$.

下面证明相反的不等式. 因为 $\wedge E \leqslant x$, $\forall\ x \in E$，故 $(\coprod_{i \in I} f_i)(\wedge E) \leqslant (\coprod_{i \in I} f_i)(x)$，从而 $(\coprod_{i \in I} f_i)(\wedge E) \leqslant \wedge (\coprod_{i \in I} f_i)(E)$. 所以

$$(\coprod_{i \in I} f_i)(\wedge E) = \wedge (\coprod_{i \in I} f_i)(E).$$

综合以上几个性质，可以知道 $\mathscr{S}_f(D)$ 在点式序下构成一个模糊的 ξ 半拓扑[19]，称为模糊 ξ- 半拓扑，

而 $(D, \mathscr{S}_f(D))$ 称为模糊 ξ- 半拓扑空间.

基于上面的定理,由文献[19]中 D - 超滤子的定义可以得到下面的定理.

定理3 设 D 是一个相容交的 dcpo, $x \in D, r \in [0,1]$, 定义

$$\mathscr{S}_f(D)_r(x) = \{P \in \mathscr{S}_f(D) \mid r < P(x)\}.$$

则 $\mathscr{S}_f(D)_r(x)$ 是一个 D - 超滤子.

证明 ① $0 \notin \mathscr{S}_f(D)_r(x)$.

② 如果 $P \leqslant Q, P \in \mathscr{S}_f(D)_r(x)$, 则有 $r < P(x) \leqslant Q(x)$, 故 $r < Q(x)$, 所以 $Q \in \mathscr{S}_f(D)_r(x)$.

③ 如果 $P, Q \in \mathscr{S}_f(D)_r(x)$, 有 $r < P(x), r < Q(x)$, 则 $r < P(x) \wedge Q(x) = (P \wedge Q)(x)$, 所以 $P \wedge Q \in \mathscr{S}_f(D)_r(x)$.

④设 $P_i \in \mathscr{S}_f(D)_r(x), i \in I$, P_i 是分离的,且 $\coprod_{i \in I} P_i \in \mathscr{S}_f(D)_r(x)$, 则有 $r < (\coprod_{i \in I} P_i)(x)$, 从而 $\exists i \in I$, 使得 $r < P_i(x)$, 且 i 是唯一的. 事实上,若存在 $i_1, i_2 \in I, i_1 \neq i_2$ 使得 $r < P_{i_1}(x), r < P_{i_2}(x)$, 则由于 P_i 是分离的,所以有 $P_{i_1} \wedge P_{i_2} = 0$, 又 $r < P_{i_1}(x) \wedge P_{i_2}(x) = (P_{i_1} \wedge P_{i_2})(x) = 0$, 故 $r < 0$ 产生矛盾,所以 $P_i \in \mathscr{S}_f(D)_r(x)$.

故 $\mathscr{S}_f(D)_r(x)$ 是一个 D - 超滤子.

用符号 $DFilt(\mathscr{S}_f(D))$ 表示 $\mathscr{S}_f(D)$ 的所有 D - 超滤子构成的集合. 则 $DFilt(\mathscr{S}_f(D))$ 在集合的包含序下也构成一个 ξ 半拓扑.

命题1 设 D, E 是相容交的完备偏序集, $S: D \to E$ 是单值连续映射, $r \in [0,1]$, 则 S 诱导了一个单调映射 $f: D \to DFilt(\mathscr{S}_f(E))$, 其中 $f(x) = \{P \in \mathscr{S}_f(E) \mid r < P(S(x))\}$.

注 设 D, E 是相容交的完备偏序集, $r \in [0,1]$, 当 $S: D \to E$ 是多值映射时,映射 $f: D \to DFilt(\mathscr{S}_f(E))$, 其中 $f(x) = \{P \in \mathscr{S}_f(E) \mid r < P(y), \forall y \in S(x)\}$ 是滤子,不是 D - 超滤子.

3 稳定模糊谓词在线性运算下的封闭性

本节讨论稳定模糊谓词在线性运算下的封闭性问题. 证明 $rP \in \mathscr{S}_f(D)$, 举反例说明 $f+g$ 不一定是稳定的. 同时证明一些特殊的稳定模糊谓词满足和的运算.

性质3 设 $r \in [0,1], P \in \mathscr{S}_f(D)$, 则 $rP \in \mathscr{S}_f(D)$.

证明 定义 $(rP)(x) = rP(x), \forall x \in D$, 可知 rP 是 Scott 连续的.

设 X 是 D 上的相容集合,下面需要证明

$$(rP)(\wedge X) = \wedge (rP)(X).$$

即证明

$$r \wedge P(X) = \wedge rP(X).$$

因为 $\forall x \in X, \wedge P(X) \leqslant P(x)$, 所以 $r \wedge P(X) \leqslant rP(x)$. 下面考虑 $\wedge P(X)$, 由定义可知

$$\forall \epsilon > 0, \exists x_0 \in X \text{ 使得 } P(x_0) < \wedge P(X) + \epsilon.$$

所以

$$rP(x_0) < r \wedge P(X) + r\epsilon \leqslant r \wedge P(X) + \epsilon.$$

即

$$\forall \epsilon > 0, \exists x_0 \in X \text{ 使得 }, rP(x_0) < r \wedge P(X) + \epsilon.$$

因此

$$r \wedge P(X) = \wedge rP(X).$$

自然要考虑 $f+g$ 是否属于 $\mathscr{S}_f(D)$. 但是,回答是否定的. 一种情况是 $(f+g)(x) \notin [0,1]$; 另一种情况是即使 $(f+g)(x) \in [0,1]$, 但是 $f+g$ 也未必是稳定的. 可以考虑上面提到的例子.

定义 $(f+g)(x) = f(x) + g(x), \forall x \in D$,

注意到 $(f+g)(\wedge A) = 0$, 而 $(f+g)(a) \wedge (f+g)(b) = \frac{1}{3} \wedge \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$, 所以

$$(f+g)(\wedge A) \neq \wedge (f+g)(A).$$

因此,$f+g \notin \mathscr{S}_f(D)$.

然而,一些特殊的稳定模糊谓词可以具有这个性质.为此,我们先给出下面的定理.

定理 4 假设 V 是 D 上的任一子集,定义 χ_V 为 V 上的特征函数即

$$\chi_V(x) = \begin{cases} 1 & x \in V \\ 0 & x \notin V \end{cases},$$

则 χ_V 是稳定模糊谓词当且仅当 V 是相容开集.

证明 由文献[14]可知当 V 是 Scott 开集时,χ_V 是模糊谓词,下面只需要证明 χ_V 保相容集合的交.

设 X 是 D 上的相容集合,只需要证明 $\chi_V(\wedge X) = 1$ 当且仅当 $\wedge \chi_V(X) = 1$.

若 $\chi_V(\wedge X) = 1$ 则 $\wedge X \in V$. 因为 V 是开集,所以 $X \subseteq V$, 故 $\chi_V(X) = 1$, 所以 $\wedge \chi_V(X) = 1$.

若 $\wedge \chi_V(X) = 1$, 则 $\chi_V(x) = 1$, $\forall x \in X$, 所以 $X \subseteq V$. 又因为 V 是相容开集,且 X 上有界,所以 $\wedge X \in V$, 故 $\chi_V(\wedge X) = 1$. 从而有 $\chi_V(\wedge X) = \wedge \chi_V(X)$.

反之,由文献[14]可知,如果 χ_V 是稳定模糊谓词,则 V 是 Scott 开集,下面设 $A \subseteq V$ 且 A 有上界,则需要证明 $\wedge A \in V$. 事实上,因为 $\forall x \in A$ 有 $x \in V$,所以 $(\chi_V)(x) = 1$, 故 $\wedge (\chi_V)(A) = 1$. 又因为 χ_V 是稳定模糊谓词,可得 $(\chi_V)(\wedge A) = \wedge (\chi_V)(A) = 1$. 由 χ_V 的定义可知 $\wedge A \in V$. 故 χ_V 是稳定模糊谓词当且仅当 V 是相容开集.

有了这个定理再由上面的性质 3 可知 $r\chi_V$ 是稳定模糊谓词.

定义 5 我们称 $r\chi_V$ 为一步稳定模糊谓词.

性质 4 设 $r_1, r_2 \in [0,1]$, V_1, V_2 是相容开集,且 $V_2 \subseteq V_1$, 则 $r_1\chi_{V_1} + r_2\chi_{V_2}$ 是稳定模糊谓词,其中 $r_1 + r_2 \leqslant 1$.

注 性质 4 中集合的包含关系是不可缺省的. 例如,在前面提到的例子中,

设 $D = \{\perp, a, b, \top\}$ $B = \{a, \top\}$, $C = \{b, \top\}$ 是 D 上的相容开集,且 $B \not\subseteq C$, $C \not\subseteq B$.

定义 $\frac{1}{3}\chi_C$, $\frac{1}{2}\chi_B$, 分别是下面的一步稳定模糊谓词,

$$\frac{1}{2}\chi_B(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & x \in A \\ 0 & \text{否则} \end{cases}; \qquad \frac{1}{3}\chi_C(x) = \begin{cases} \frac{1}{3} & x \in B \\ 0 & \text{否则} \end{cases}.$$

注意到 $A = \{a, b\}$ 是相容集合 , $\wedge A = \perp$, 且 $(\frac{1}{2}\chi_B + \frac{1}{3}\chi_C)(\wedge A) = 0$, 但是

$$(\frac{1}{2}\chi_B + \frac{1}{3}\chi_C)(a) \wedge (\frac{1}{2}\chi_B + \frac{1}{3}\chi_C)(b) = \frac{1}{2} \wedge \frac{1}{3} = \frac{1}{3}.$$

故

$$(\frac{1}{2}\chi_B + \frac{1}{3}\chi_C)(\wedge A) \neq \wedge (\frac{1}{2}\chi_B + \frac{1}{3}\chi_C)(A).$$

因此 $\subseteq$ 是不能缺少的.

可以将这个性质推广到有限多个的情形,我们有下面的命题

命题 2 如果 $r_i \in [0,1]$, $V_n \subseteq V_{n-1} \subseteq \cdots \subseteq V_1$, V_i 是 D 上的相容开集,则 $\sum_{i=1}^{n} r_i\chi_{V_i}$ 也是稳定模糊谓词,其中 $\sum_{i=1}^{n} r_i \leqslant 1$.

4 $\xi(D)$ 与 $\mathscr{S}_f(D)$ 是 D - 半格同态的

本节根据 D - 半格的一些知识讨论稳定模糊谓词的 D - 半格同态问题.

由文献[17]可知,相容开集除了带有集合自然的包含序关系外,还有一种极小序关系 $\sqsubseteq_\mu$, 现在介绍这种序关系.

首先引入记号 μU,它是相容开集中极小元组成的集合,即

$$\mu U = \{x \in U \mid x \text{是} U \text{的极小元}\}.$$

定义6[17]　设 D 是相容交的完备偏序集, $U,V \in \xi(D)$,若 $\mu U \subseteq \mu V$,则记 $U \sqsubseteq_{\mu} V$,且称 $\sqsubseteq_{\mu}$ 为极小序关系.

命题3[17]　设 D 是相容交的完备偏序集, $U,V \in \xi(D)$,若 $U \sqsubseteq_{\mu} V$,则 $U\ V$.

同时由文献[17]我们也知道对于稳定映射间除了点式序关系外,还有稳定序关系记为 $\leqslant_s$,即 $f \leqslant_s g$ 当且仅当 $f \leqslant g$ 且 $\forall x \in D$, $\forall y \in E$ 当 $y \leqslant f(x)$ 时 $m(f,x,y) = m(g,x,y)$.

引理2[17]　设 D,E 是相容交的完备偏序集, $f,g:D \to E$ 是稳定映射,则下面两条等价:

(1) $f \leqslant_s g$;

(2) $f \leqslant g$,并且 $\forall x' \in D$,若 $x \leqslant x'$ 则 $f(x) = f(x') \wedge g(x)$.

还需要介绍下面的定义

定义7[20]　设 A 是有最小元的半格, 0,1 为它的最小元和最大元,若 A 的任意分离子集都有并,则称 A 是分离完备半格,简称 D-半格. 对于 ξ-半拓扑空间 $(D,\xi(D))$ 和模糊 ξ-半拓扑空间 $(D,\mathscr{S}_f(D))$ 来说, $\xi(D)$, $\mathscr{S}_f(D)$ 都是 D-半格.

定义8[20]　设 A,B 是 D-半格,半格同态 $f:A \to B$ 称为 D-半格同态,若 f 保分离并,即对于 A 中的任一分离子集 X,有 $f(\amalg X) = \amalg f(X)$.

有了这些预备知识我们可以得到下面的定理

定理5　设 D 是相容交的完备偏序集,令

$$\chi:\ \xi(D) \to \mathscr{S}_f(D)$$
$$U \to \chi_U.$$

则 χ 是 $\xi(D)$ 到 $\mathscr{S}_f(D)$ 的 D 半格同态,在极小序关系 $\sqsubseteq_{\mu}$ 下 χ 是保序映射.

证明　① χ 是 $\xi(D)$ 到 $\mathscr{S}_f(D)$ 的映射.

② χ 是单射. 因为若 $\chi_U = \chi_V$,则 $U = V$. 否则, $\exists x \in U$ 但 $x \notin V$,则有 $\chi_U(x) = 1 = \chi_V(x)$,所以 $x \in V$,矛盾.

③设 $U,V \in \xi(D)$,则 $\chi_{U\cap V} = \chi_U \wedge \chi_V$,即 $\chi_{U\cap V} = \chi_U \wedge \chi_V$.

④设 $\{U_i \mid i \in I\} \subseteq \xi(D)$ 且 U_i 是分离的,则 $\chi(\amalg_{i\in I} U_i) = \amalg_{i\in I} \chi_{U_i}$,即

$$\chi_{\amalg_{i\in I} U_i} = \amalg_{i\in I} \chi_{U_i}.$$

从而可知 χ 是 $\xi(D)$ 到 $\mathscr{S}_f(D)$ 的 D-半格同态.

若 $U \sqsubseteq_{\mu} V$,则由命题3可知 $U \subseteq V$,有 $\chi_U \leqslant \chi_V$,而且 $\chi_U \leqslant_s \chi_V$.

事实上,设 $x,y \in D$,且 $x \leqslant y$,我们需要证明

$$\chi_U(x) = \chi_U(y) \wedge \chi_V(x).$$

若 $\chi_U(x) = 1$,则 $x \in U$,从而 $x,y \in U$, $x,y \in V$,故 $\chi_U(y) = 1$, $\chi_V(x) = 1$,所以 $\chi_U(y) \wedge \chi_V(x) = 1$. 反之,设 $\chi_U(y) = 1$, $\chi_V(x) = 1$,则得 $y \in U$, $x \in V$. 由 $y \in U$ 得 $y_1 \in \mu U$ 使得 $y_1 \leqslant y$. 因 $\mu U \subseteq \mu V$,因此 $y_1 \in \mu V$. 所以 $x \wedge y_1 \in V$ 且 $y_1 \leqslant x$. 这时 $x \in U$,即有 $\chi_U(x) = 1$. 故 $\chi_U(x) = \chi_U(y) \wedge \chi_V(x)$. 因此由引理2可知, $\chi_U \leqslant_s \chi_V$. 即 χ 在极小序下是保序映射.

5 结　论

本文作者在模糊谓词基础上进一步研究了稳定模糊谓词,是对经典谓词的进一步推广. 在文中对稳定模糊谓词的拓扑性质进行了详细的论证,同时还讨论了其线性运算,在 D-半格上的同态性等问题. 对稳定模糊谓词的研究可以使 Domain 理论在结构上更加完美.

参考文献:

[1] PLOTKIN G D. Dijkstra's predicate transformers and Smyth's powerdomains[M]. In D Bjorner, editor, Abstract Software Specifications, Lecture Notes in Computer Science, 1980, 86:527 - 553.

[2] SMYTH M B. Powerdomains and predicate transformers: a topological view[J]. In J Diaz, editor, Automata, Language and Programming, Lecture Notes in Computer Science, 1983, 154:662 - 675.

[3] SCOTT D S. Outline of a mathematical theory of computation[A]. In 4th Annual Princeton Conference on Information Systems[C]. 1970, 169 - 176.

[4] CHEN Y X. Stable semantics of weakest pre - predicates[J]. Journal of Software, 2003, 14:161 - 167.

[5] KOZEN D. Semantics of probabilistic programs[J]. Journal of Computer and System Science, 1981:22:328 - 350.

[6] KOZEN D. A probabilistic PDL[J]. Journal of Computer and System Science, 1985, 30:162 - 178.

[7] HE J, SEIDEL K, MCIVER A K. Probabilistic models for the guarded command language[J]. Science of Computer Programming, 1997, 28:171 - 192.

[8] JONES C. Probabilistic non - determinism[D]. PhD thesis, University of Edinburgh, Edinburgh, 1990. Also published as Technical report No CST - 63 - 90.

[9] MCIVER A K, MORGAN C. Partial correctness for probabilistic demonic programs[J]. Theoretical Computer Science, 2001, 266:513 - 541.

[10] MORGAN C, MCIVER A, SEIDEL K. Probabilistic predicate transformers. ACM Trans[J]. Programming Languages and Systems, 1996, 18:325 - 353.

[11] TIX R, KEIMEL K, PLOTKIN G. Sematic domains for combining probability and non - determinism[J]. Electronic Notes in Theoretical Computer Science, 2005, 129:104.

[12] YING M S. Reasoning about probabilistic sequential programs in a probabilistic logic[J]. Acta Informatica, 2003, 39:315 - 389.

[13] ZADEH L A. Fuzzy sets[J]. Information and Control, 1965, 8:338 - 353.

[14] CHEN Y X, ACHIM JUNG. An introduction to fuzzy predicate transformers[R]. The invited talk at the Third International Symposium on Domain Theory, May 2004, Shanxi Normal University, Xi'an, China.

[15] SCOTT D, GUNTER C A. Semantics domains. Manuscript, 1986.

[16] CHENG Y X, GORDON PLOTKIN, WU H Y. On healthy fuzzy predicate transformers[R]. Invited talk at the Fourth International Symposium on Domain Theory, July 2006, Hunan University, Changsha, China.

[17] 陈仪香. 形式语义学的稳定论域理论[M]. 北京:科学出版社, 2003.

[18] BERRY G. Stable models of typed λ - calculi[J]. Lecture Notes in Computer Science, 1978, 62:72 - 88.

[19] 陈仪香. 谓词转换器的拓扑语义[J]. 数学进展, 2003, 32(2):221 - 229.

[20] CHEN Y X. Stone duality and representation of stable domains[J]. Journal od Computer and Mathematics with Applications, 1997, 34:27 - 41

Stable fuzzy predicates

MA Yan-fang, CHEN Yi-xiang

(Mathmatics and Sciences College, Shanghai Normal University, Shanghai 200234, China)

Abstract: We introduce the concept of a stable fuzzy predicate which is a stable fuction from a dcpo with consistent intersection into the unit interval [0,1]. Then, we discuss some basic properties of stable fuzzy predicates and linear opertations on stable fuzzy predicates. Finally, we establish the order-homomorphism relation between ξ- semitopology and fuzzy ξ- semitopology on dcpos with the consistent meets.

Key words: Domain theory; Semitopology; Stable fuzzy predicates

(责任编辑:冯珍珍)