

文章编号: 1671-7848(2007)04-0356-03

一种基于跟踪微分器的简单自适应控制算法

国冬雪¹, 尹怡欣², 李安贵¹

(1. 北京科技大学 数力系, 北京 100083; 2. 北京科技大学 信息工程学院, 北京 100083)



摘 要: 应用跟踪微分器在处理信号时具有较强的误差衰减能力和抗扰动能力, 针对传统的简单自适应控制算法中增益调节过于简单、收敛速度慢且适应性不强的缺点, 对传统的简单自适应算法进行了改进, 提高了收敛速度, 减小了静差。描述了该算法的结构和原理, 运用 Lyapunov 稳定性理论和 LaSalle 不变性原理证明了控制算法是稳定的, 跟踪误差收敛到零。计算机仿真结果验证了算法的可行性和有效性, 并给出了参数选择的一般法则。

关键词: 简单自适应控制; 跟踪-微分器; 稳定性

中图分类号: TP 273

文献标识码: A

Simple Adaptive Control Algorithm Based on Tracking-differentiator

GUO Dong-xue¹, YIN Yi-xin², LI An-gui¹

(1. Department of Mathematics Mechanics, Beijing University of Science & Technology, Beijing 100083, China;

2. School of Information Engineering, Beijing University of Science & Technology, Beijing 100083, China)

Abstract: The tracking-differentiator which has high error reduction and anti-disturbance capability to process signal is used to improve the ability of the traditional simple adaptive control. The convergence speed is increased, and the steady-state error is reduced. The focus is on describing the structure and principle of the method and proving stability of the algorithm and convergence of error by Lyapunov stability theory and LaSalle invariance principle. Simulations show the validity of the algorithm. And the rules of selecting the parameters of the algorithm are given.

Key words: simple adaptive control (SAC); tracking-differentiator; stability

1 引言

简单自适应控制(Simple Adaptive Control, SAC)是一种新型的直接自适应算法, 它是对理想参考模型进行跟踪且结构简单的控制算法^[1]。其主要特点包括: 控制结构简单可调参数少; 控制系统的设计几乎与被控对象无关; 可适用于单变量系统和多变量系统; 可实现高阶被控对象对低阶理想参考模型的性能跟踪。但是传统的简单自适应控制算法的控制增益调整采用简单的 PI 调节, 而这种调节算法对被控对象要求过严^[2], 收敛速度慢。为此引入一种对被控对象有很强的适应性和鲁棒性的跟踪-微分器控制算法, 该算法保持了简单自适应控制算法和跟踪微分器的优点, 提高了收敛速度, 且能很好地适应被控对象环境的变化。

2 控制算法

具有 ASPR (Almost Strict Positive Realness) 特性的被控对象由下述能控能观的 m 输入 m 输出的 n 阶状态方程描述^[3]:

$$\dot{x}_p(t) = A_p x_p(t) + B_p u_p(t) \quad (1)$$

$$y_p(t) = C_p x_p(t) \quad (2)$$

式中, $A_p \in \mathbf{R}^{n \times n}$, $B_p \in \mathbf{R}^{n \times m}$, $C_p \in \mathbf{R}^{m \times n}$ 都是一致有界的; $x_p(t) \in \mathbf{R}^n$ 为被控系统的状态变量; $u_p(t) \in \mathbf{R}^m$ 为其输入变量; $y_p(t) \in \mathbf{R}^m$ 为其输出变量。

相应的, 渐近稳定的 m 输入 m 输出的 n_m 阶参考模型可描述为

$$\dot{x}_m(t) = A_m x_m(t) + B_m u_m(t) \quad (3)$$

$$y_m(t) = C_m x_m(t) \quad (4)$$

式中, $A_m \in \mathbf{R}^{n_m \times n_m}$; $B_m \in \mathbf{R}^{n_m \times m}$; $x_m(t) \in \mathbf{R}^{n_m}$; $C_m \in \mathbf{R}^{m \times n_m}$; $y_m(t) \in \mathbf{R}^m$; $u_m(t) \in \mathbf{R}^m$ 且有 $n \gg n_m$ 。

定义输出误差:

$$e_y(t) = y_p(t) - y_m(t) \quad (5)$$

简单自适应控制的目的是使被控对象的输出 y_p 能够在许可范围内渐近跟踪参考模型的输出 y_m , 即:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e_y(t) = 0 \quad (6)$$

简单自适应控制的结构图如图 1 所示。

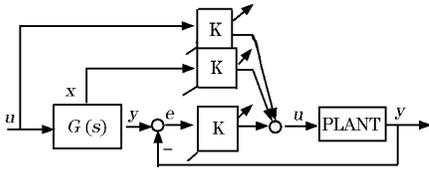


图 1 SAC 控制系统结构框图

Fig. 1 Structure of SAC

定义控制输入：

$$u_p(t) = K(t)\gamma(t) \quad (7)$$

式中， $K(t) = [K_c(t) \ K_x(t) \ K_i(t)]$ ；

$$\gamma(t) = [e_y(t)^T \ x_m(t)^T \ u_m(t)^T]^T。$$

利用基于跟踪微分器的非线性 PID 算法对增益矩阵 $K(t)$ 进行自适应调整结构图，如图 2 所示。

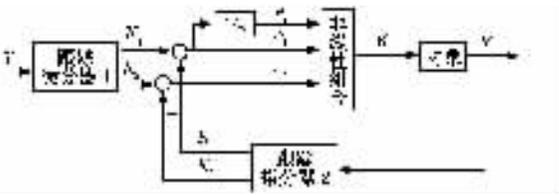


图 2 增益矩阵 $K(t)$ 自适应调整结构图

Fig.2 Adaptive control of gain matrix $K(t)$

对增益矩阵 $K(t)$ 的自适应调整如下：

$$\begin{cases} \dot{K}_1 = K_2 \\ \dot{K}_2 = -R_1 \text{sat}(K_1 - Y_m(t) + |K_2|K_2/2R_1, \delta_1) \\ \dot{K}_3 = K_4 \\ \dot{K}_4 = -R_2 \text{sat}(K_3 - Y_p(t) + |K_4|K_4/2R_2, \delta_2) \\ \dot{K}_5 = K_1 - K_3 \\ e_0 = K_5, e_1 = K_1 - K_3, e_2 = K_2 - K_4 \\ K = H(|e_0/T_1|^\alpha \text{sign}(e_0) + |e_1|^\alpha \text{sign}(e_1) + |e_2/T_D|^\alpha \text{sign}(e_2)) = K_I(t) + K_P(t) + K_D(t) \end{cases} \quad (8)$$

式中， $Y_m(t) = y_m(t)\gamma^T(t)$ ； $Y_p(t) = y_p(t)\gamma^T(t)$ ； sat 为线性饱和函数。

其表示形式为

$$\text{sat}(A, \delta) = \begin{cases} \text{sign}(A) & |A| \geq \delta \\ A/\delta & |A| \leq \delta \end{cases} \quad \delta > 0 \quad (9)$$

对增益矩阵 $K(t)$ 进行自适应调整采用了基于跟踪微分器的非线性 PID 算法，这样采用的跟踪微分器可以对被控系统安排“理想”的过渡过程，从而改善了系统的动态特性^[4]。

3 稳定性分析

设计自适应控制器使系统达到理想跟踪状态，即 $y_p^* = y_m$ 。* 表示理想跟踪。定义理想跟踪情况下的各个变量：

$$u_p^*(t) = U_1 x_m(t) + U_2 u_m \quad (10)$$

$$x_p^*(t) = X_1 x_m(t) + X_2 u_m \quad (11)$$

$$y_p^*(t) = C_p x_p^*(t) \quad (12)$$

式中， y_p^*, x_p^*, u_p^* 与 y_p, x_p, u_p 的维数一致。

由参考模型式(3)式(4)可以推导出：

$$x_m(t) = -A_m^{-1} B_m u_m + \exp(A_m t) [x_m(0) + A_m^{-1} B_m u_m] = E u_m + \exp(A_m t) \delta_0 \quad (13)$$

式中， $E = -A_m^{-1} B_m$ ； $\delta_0 = x_m(0) + A_m^{-1} B_m u_m$ 。

由式(10)~式(13)可以推出：

$$A_p x_p^*(t) + B_p u_p^*(t) - \dot{x}_p^*(t) = [A_p(X_1 E + X_2) + B_p(U_1 E + U_2)] u_m + [A_p X_1 + B_p U_1 - X_1 A_m] \exp(A_m t) \delta_0$$

$$y_p^*(t) - y_m(t) = C_p x_p^*(t) - C_m x_m(t) = [C_p(X_1 E + X_2) - C_m E] u_m + [C_p X_1 - C_m] \exp(A_m t) \delta_0$$

$$[C_p X_1 - C_m] \exp(A_m t) \delta_0$$

假设：

$$X = X_1 E + X_2$$

$$U = U_1 E + U_2$$

当 X 和 U 满足：

$$\begin{bmatrix} A_p & B_p \\ C_p & O \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ U \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} O & E \\ C_m & E \end{bmatrix} \text{时, 有:}$$

$$\dot{x}_p^*(t) = A_p x_p^*(t) + B_p u_p^*(t) + \phi(t) \quad (14)$$

$$y_p^*(t) = y_m(t) + \varphi(t) \quad (15)$$

式中 $\phi(t) = -[A_p X_1 + B_p U_1 - X_1 A_m] \exp(A_m t) \delta_0$ ；

$$\varphi(t) = [C_p X_1 - C_m] \exp(A_m t) \delta_0。$$

因为 A_m 设定为稳定矩阵，所以当 $t \rightarrow \infty$ 时有 $\phi(t) \rightarrow 0, \varphi(t) \rightarrow 0$ ，就可以达到理想跟踪状态。

定理 1 具有 ASPR 特性的被控系统式(1)，式(2)对于参考模型式(3)，式(4)，若 K_e^* 使 $A_p - B_p K_e^* C_p$ 稳定，且 K_x^*, K_u^* 由 $K_x^* = U_1, K_u^* = U_2$ 给出，则控制律 $u_p(t) = K^*(t)\gamma(t)$ 将在 $t \rightarrow \infty$ 使 $y_p(t) \rightarrow y_m(t)$ 其中：

$$K^*(t) = [K_e^*(t) \ K_x^*(t) \ K_u^*(t)]$$

下面利用 Lyapunov 稳定性分析方法和正实性引理来证明误差方程和增益矩阵 $K(t)$ 是收敛的。

定义状态误差为 $e_x(t) = x_p^*(t) - x_p(t)$ ，则由式(14)式(15)可得：

$$\begin{aligned} \dot{e}_x(t) &= \dot{x}_p^*(t) - \dot{x}_p(t) = [A_p + B_p K_e^* C_p] e_x(t) + B_p [(K^* - K(t))\gamma(t)] - B_p K_e^* \varphi(t) + \phi(t) = \\ & A_x e_x(t) + B_p W(t) + \Phi(t) \end{aligned} \quad (16)$$

式中， $A_x = [A_p + B_p K_e^* C_p]$ ；

$$W(t) = (K^* - K(t))\gamma(t)；$$

$$\Phi(t) = -B_p K_e^* \varphi(t) + \phi(t)。$$

选择 Lyapunov 函数为

$$V(t) = e_x^T(t) P e_x(t) + \text{tr} \{ [K(t) - K^*] \times [K(t) - K^*]^T \} \quad (17)$$

根据正实性引理：

$$PA_x + A_x^T P = -Q \tag{18}$$

$$PB_p = C_p^T \tag{19}$$

则由式(5)式(8)式(16)~式(19)可以推得：

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) = & \dot{e}_x^T(t)Pe_x(t) + e_x^T(t)P\dot{e}_x(t) + \\ & 2\text{tr}\{[K(t) - K^*] \dot{K}^T(t)\} = \\ & e_x^T(t)(\dot{\chi} - Q)e_x(t) + e_y^T(t)\Delta u_p(t) + [e_y^T(t) \\ & \Delta u_p(t)]^T - \varphi^T(t)[K(t) - K^*]\gamma(t) - \\ & [\varphi^T(t)[K(t) - K^*]\gamma(t)]^T + \\ & \Phi^T(t)Pe_x(t) + e_x^T(t)P\Phi(t) + \\ & 2\text{tr}\{[\Delta u_p(t)e_y^T(t)H] \alpha/T_1 * \text{sig}((K_5/T_1)^\alpha) \\ & * \text{sig}(K_5)|K_5|^{\alpha-1} + \alpha \text{sig}((K_1 - K_3)^\alpha) \\ & \text{sig}(K_1 - K_3)|K_1 - K_3|^{\alpha-2} * \text{sig}(K_1 - \\ & K_3)_2 - K_4)\}^T + 2\text{tr}\{[K(t) - \\ & K^*]H]T_D \alpha \text{sig}(((K_2 - K_4)T_D)^\alpha - 1) * \\ & \text{sig}(K_2 - K_4)|K_2 - K_4|^{\alpha-1} * (-R_1 \text{sa}(K_1 - \\ & Y_m(t) + |K_2|K_2/2R_1, \delta_1 + R_2 \text{sa}(K_3 - \\ & Y_p(t) + |K_4|K_4/2R_2, \delta_2))\}^T \end{aligned}$$

应用 LaSalle 的不变性原理， $\dot{V}(t)$ 的第一项为一个小于零的数，后面的项在 $t \rightarrow \infty$ 时，因为 $\Phi(t) \rightarrow 0$ ， $\varphi(t) \rightarrow 0$ 和 $\Delta u_p \rightarrow 0$ ，趋向于零。所以 $\dot{V}(t)$ 趋向于一个小于零的式子，从而可以保证 $e_x(t)$ 和 $K(t)$ 的稳定性，达到了控制目的。

4 仿真研究

选择高阶被控对象进行 Matlab 仿真，仿真结果如图 3 所示。

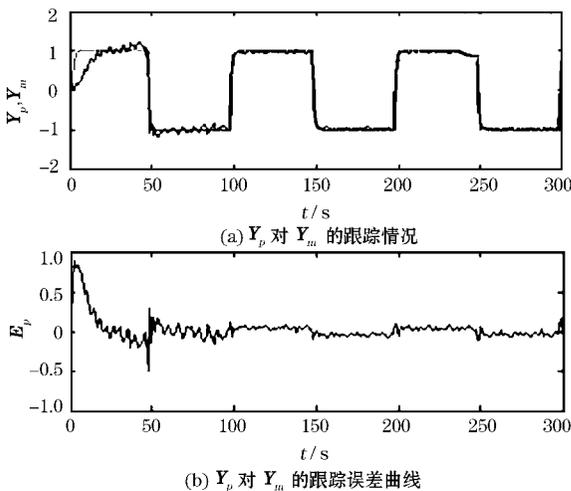


图 3 对线性系统控制算法的仿真实验结果

Fig. 3 Simulation results of linear system

其传递函数为

$$G(s) = \frac{0.8s + 0.4}{s^4 + 0.23s^3 + 0.027s^2 + 0.055s + 0.072}$$

该被控对象为一开环稳定系统，其零极点为 $-0.42 \pm 0.31i$ ， $0.30 \pm 0.41i$ 。

选取参考模型的状态方程形式为

$$\dot{x}_m(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1.0 \\ -0.08 & 0.6 \end{bmatrix} x_m(t) + \begin{bmatrix} 0.7 \\ 0.2 \end{bmatrix} u_m(t)$$

$$y_m(t) = [1 \ 0] x_m(t)$$

跟踪微分器算法中的参数选取 $T_D = 10$ ， $T_1 = 0.25$ ， $H = 3 \times 10^{-3}$ ， $\alpha = 2/3$ ， $R_1 = 0.055$ ， $R_2 = 10$ ， $\delta_1 = 5.5 \times 10^{-8}$ ， $\delta_2 = 0.001$ 。控制增益自适应算法中各个 K 的初值可任意选取为零，参考输入信号采取幅值为 ± 1 的周期方波信号。

可以看到被控对象输出渐近跟踪了参考模型的输出，跟踪误差也平均接近于零。

控制算法的控制结果与增益矩阵 $K(t)$ 自适应调整参数， H ， α ， T_1 ， T_D ， R_1 ， R_2 ， δ_1 ， δ_2 以及 $K_1(0)$ ， $K_2(0)$ ， $K_3(0)$ ， $K_4(0)$ ， $K_5(0)$ 的选取有很大的关系。通过大量仿真实验研究，控制参数的选取规则如下：

- ① $K_1(0)$ ， $K_2(0)$ ， $K_3(0)$ ， $K_4(0)$ ， $K_5(0)$ 一般可以任意选取为零。
- ② 比例系数 H ，积分时间 T_1 和微分时间 T_D 的选取与一般的 PID 控制有相似之处。
- ③ α 通常取一小于 1 的常数，从而加强误差抗扰动能力。
- ④ 参数 δ_1 ， δ_2 对微分信号有影响，通常要保证微分信号尽量不受其影响， R 与 δ 存在一定的比例关系^[5]。

5 结语

基于跟踪微分器的简单自适应控制算法从理论上证明了算法的收敛性，并通过仿真实验验证了其对高阶线性系统跟踪的可行性和有效性。

参考文献 (References)：

[1] Bar-Kana I. Absolute stability and robust discrete adaptive control of multivariable systems[M]. New York :Academic Press ,1989.

[2] 安世奇,孙一康,王京. 简单自适应控制的算法与发展[J]. 电机与控制学报, 2004, 8(3) :263-267. (An Shiqing, Sun Yikang, Wang Jing. The algorithm and development of the simple adaptive control [J]. Electric Machines and Control 2004, 8(3) :263-267.)

[3] Bar-Kana I, Kaufman H. Global stability and performance of a simplified algorithm [J]. Int J Control, 1985, 42(6) :1491-1505.

[4] 韩京清. 一种新型控制器—NLPII [J]. 控制与决策, 1994, 9(6) :401-407. (Han Jingqing. A new type of controller-NLPID [J]. Control and Decision, 1994, 9(6) :401-407.)

[5] 韩京清. 非线性跟踪-微分器 [J]. 系统科学与数学, 1994, 14(2) :177-183. (Han Jingqing. Nonlinear tracking-differentiator [J]. Journal of Systems Science and Mathematical Science, 1994, 14(2) :177-183.)

[6] 李宁宁, 宋苏. 一种鲁棒神经网络自适应控制策略及其应用 [J]. 控制工程, 2007, 14(3) :290-293. (Li Ningning, Song su. Robust Neural network adaptive control scheme and its application [J]. Control Engineering of China, 2007, 14(3) :290-293.)