

文章编号: 1671-7848(2006)06-0521-05

三容水箱的机理建模

赵科, 王生铁, 张计科

(内蒙古工业大学 信息工程学院, 内蒙古 呼和浩特 010051)



摘 要: 针对三容水箱是较为典型的非线性、时延对象, 具有很强的代表性这一特点, 通过机理建模方法建立了三容水箱的一般数学模型。分析了线性和非线性阻力板的流量特性, 并通过实验测定了阻力板流量系数。最后给出了三容水箱的线性化模型。由仿真实验可知, 非线性模型的阶跃响应和实验测得的响应曲线相吻合, 说明用该方法建立的数学模型是正确的和可行的。

关键词: 三容水箱; 数学模型; 机理建模

中图分类号: TP 273

文献标识码: A

Mechanism Modeling for Three-tank Water

ZHAO Ke, WANG Sheng-tie, ZHANG Ji-ke

(College of Information Engineering, Inner Mongolia University of Technology, Hohhot 010051, China)

Abstract: To the three-tank water, a typically non-linear and delayed plant, the general mathematic model of three-tank water is established by means of mechanism modeling method, and the characteristics of both linear and non-linear weir flow meters are analyzed. The flow coefficients of weir flow meters are determined by experiment, and the linearization model of three-tank water is obtained. Step response of the model complies with experimental result so that the proposed model is correct and practical, and lays the foundation for the research on the advanced control strategy of three-tank water.

Key words: three-tank water; mathematic model; mechanism modeling

1 引言

机理建模是按照系统运动的机理和规律建立数学模型, 其结果不但给出系统输入输出变量间的关系, 也给出系统状态和输入输出的关系。用机理建模方法, 虽然必须对系统作深入的分析研究, 尤其对于比较复杂的系统, 要得到一个满意的结果往往比较困难, 但是可得到有关系统的详细描述, 模型的物理意义明了、准确度高、适应性强。

三容水箱是较为典型的非线性、时延对象, 工业上许多被控对象的整体或局部都可以抽象成三容水箱的数学模型, 具有很强的代表性, 因此三容水箱数学模型的建立具有非常重要的意义。三容水箱的数学建模以及控制策略的研究对工业生产中液位控制系统的研究有指导意义, 例如工业锅炉、结晶器液位控制。到目前为止, 国内外对于本文所提出的三容水箱结构的研究较少, 大多结构为三容水箱

通过阀门互相连通, 模型建立相对简单^[1]。

本文针对三容水箱液位系统, 介绍了其机理模型的建立。

2 三容水箱工作原理

三容水箱液位控制系统的实验装置由三容水箱主体、差压变送器、控制器、气动调节阀、电磁阀、电气转换器、空气压缩机、水泵组成。

该装置包含三个透明有机玻璃水箱构成的液位对象, 对每个水箱可以采用插入阻力板的方法来改变其流量特性, 其阻力板根据隙缝式流量计原理设计为线性阻力板和非线性阻力板, 可以根据需要构成不同阶次的被控对象。

三容水箱工况组合如下: 稳压水源经手阀 V_0 分两路分别经过调节阀 V_{c1} 、 V_{c2} (气动阀) 及手阀 $V_1 \sim V_6$, 可分别进入各个水箱 (电磁阀未画)。其中一路为正常工艺液体的通路, V_{c1} 为正常工艺液体的调

收稿日期: 2005-11-03; 收修定稿日期: 2005-12-01

基金项目: 内蒙古工业大学科研基金资助项目(X200415)

作者简介: 赵科(1978-), 男, 山西大同人, 研究生, 主要研究方向为智能控制等。

节阀,可以通过选择手阀 V_1, V_3, V_5 的开关形式来获得不同阶次的被控对象。以 3 号水箱液位 h_3 作为被控变量为例,当 V_1 开, V_3, V_5 关,则被控对象的阶次为三阶;当 V_3 开, V_1, V_5 关,则被控对象的阶次为二阶;当 V_5 开, V_1, V_3 关,则被控对象的阶次为一阶。当然也可以把 1 号水箱液位 h_1 或 2 号水箱液位 h_2 选作被控变量,来做一阶或二阶的实验。另一路的调节阀 V_{22} 和手阀 V_2, V_4, V_6 构成干扰通路,选择进入 1, 2, 3 号水箱的手阀 V_2, V_4, V_6 的开关形式,即可改变扰动加入的位置,以便做干扰加入位置对调节质量影响的实验。如图 1 所示。

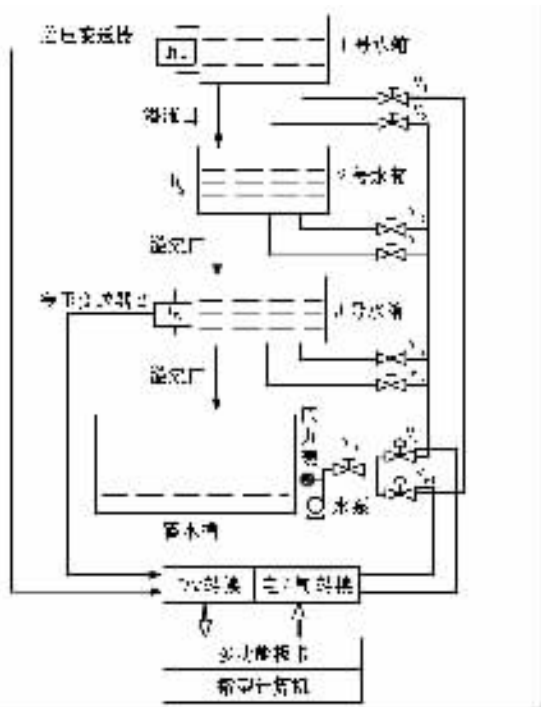


图 1 三容水箱实验装置原理

对于被控参数-水箱液位,平衡后当流入侧阀门开大时,流入量大于流出量,导致液位上升。同时由于出水压力的增大使流出量逐渐增大,其趋势是重新建立起流入量与流出量之间的平衡关系,即液位上升到一定高度时,使流出量增大到与流入量相等,重新建立起平衡关系,液位最后稳定在某一高度上;反之,液位会下降,并最终稳定在另一高度上。

3 三容水箱的一般数学模型

根据动态物料平衡关系,单位时间内进入被控过程的物料减去单位时间内从被控过程流出的物料等于被控过程中物料存储量的变化率^[2]。

三容水箱液位对象的模型,如图 2 所示。



图 2 三容水箱液位对象

被控参数 h_3 的动态方程可由下面几个关系式导出。

$$\begin{cases} q_i - q_1 = C_1 \frac{dh_1}{dt} \\ q_1 = f_1(h_1) \end{cases}, \quad \begin{cases} q_1 - q_2 = C_2 \frac{dh_2}{dt} \\ q_2 = f_2(h_2) \end{cases},$$

$$\begin{cases} q_2 - q_3 = C_3 \frac{dh_3}{dt} \\ q_3 = f_3(h_3) \end{cases}$$

所以状态方程为

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{C_1} f_1(h_1) \\ \frac{1}{C_2} f_1(h_1) - \frac{1}{C_2} f_2(h_2) \\ \frac{1}{C_3} f_2(h_2) - \frac{1}{C_3} f_3(h_3) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{C_1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} q_i \quad (1)$$

式中, C_1, C_2, C_3 分别为三个水箱的液容; $f_1(h_1), f_2(h_2), f_3(h_3)$ 分别由所设置阻力板流量特性决定。

4 阻力板流量特性分析

在进行阻力板流量特性分析时,水箱中的水流相当复杂,无法精确地分析,而且液体具有收缩性、粘性等性质。所以在分析流量特性的过程中,只能在理想条件下求解,最后通过实验测定阻力板流量系数加以修正。水箱中的水波和涡流经过隔板的多次削弱后,水流可以认为是平缓的紊流,因此,对流过阻力板的水流做如下的假设:

- ① 流过阻力板同一高度任一微小面积上的水流速度大小相等,且方向平行。
- ② 水流通过阻力板平面时,做垂直于该平面的运动。
- ③ 水流经过阻力板后的压强为大气压。
- ④ 流过阻力板的水流,不计粘滞力和表面张力的影响。

1) 线性阻力板流量特性分析 线性阻力板的底部是一个宽为 B , 高为 A 的矩形孔,上部为宽 X 随高度 Z 增加逐渐缩小的隙缝,满足关系式:

$$X = \frac{2B}{\pi} \arcsin\left(\frac{A}{Z}\right)^2$$

线性阻力板结构 如图 3 所示。

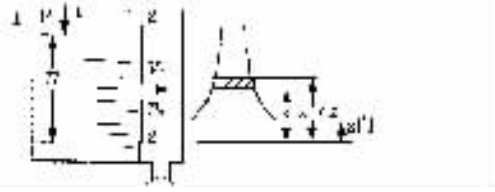


图 3 线性阻力板结构图

在阻力板上相应于 $[z, z + dz]$ 的窄条上,各点的流速 V_2 相同,由于水箱截面面积远大于阻力板通流面积,所以一般 $V_2 \gg V_1$ 。

图 3 中,1-1 和 2-2 截面,由理想伯努力方程得到^[31]:

$$\frac{V_1^2}{2g} + \frac{1}{\rho g} P_1 + H = \frac{V_2^2}{2g} + \frac{1}{\rho g} P_2 + z$$

由于 $P_1 = P_2, V_1^2(2g)$ 相对于 $V_2^2(2g)$ 很小,可以忽略,由上式得:

$$V_2 = [2g(H - z)]^{1/2}$$

建立直角坐标系,取过阻力板底边的直线为 x 轴,过底边的中点垂直向上为 z 轴。实际液位高度为 H ,取 z 为积分变量,它的变化区间为 $[0, H]$,采用定积分元素法,可以求得不同液位高度时流过阻力板的液体流量。

①当 $H \leq A$ 时:

$$dQ = [2g(H - z)]^{1/2} B dz$$

$$Q = B \int_0^H [2g(H - z)]^{1/2} dz = \frac{2}{3} B (2g)^{1/2} H^{3/2} \quad (2)$$

②当 $A < H \leq 100$ 时:

$$Q = \frac{2}{3} B (2g)^{1/2} (A^{3/2} - H^{3/2}) + \frac{2}{3} B (2g)^{1/2} \times (H - A)^{3/2} + B (2gA)^{1/2} (H - A/3) \quad (3)$$

由于 $H \gg A$,所以式(3)简化为

$$Q = B (2gA)^{1/2} H \quad (4)$$

实际的液体有粘性,在流动过程中必然有能量损失,因此实际流量比理想值要小,引入修正系数后,上式为

$$Q = \alpha B (2gA)^{1/2} H \quad (5)$$

实验测得, $\alpha = 0.6$ 。

2) 非线性阻力板流量特性分析 非线性阻力板的流量计算方法与线性阻力板流量计算方法相同,均采用定积分元素法。

①当 $H \leq 10$ 时:

$$Q = B \int_0^H [2g(H - z)]^{1/2} (4 - \frac{1}{5}z) dz = -\frac{4}{75} (2g)^{1/2} H^{5/2} + \frac{8}{3} (2g)^{1/2} H^{3/2} \quad (6)$$

②当 $10 < H \leq 60$ 时:

$$Q = -\frac{4}{75} (2g)^{1/2} H^{5/2} + \frac{8}{3} (2g)^{1/2} H^{3/2} + \frac{4}{75} (2g)^{1/2} (H - 10)^{3/2} H - \frac{8}{15} (2g)^{1/2} (H - 10)^{3/2} \quad (7)$$

③当 $60 < H \leq 70$ 时:

$$Q = -\frac{4}{75} (2g)^{1/2} H^{5/2} + \frac{8}{3} (2g)^{1/2} H^{3/2} + \frac{4}{75} (2g)^{1/2} (H - 10)^{3/2} H - \frac{8}{15} (2g)^{1/2} (H - 10)^{3/2} - \frac{22}{75} (2g)^{1/2} (H - 60)^{3/2} H + \frac{424}{15} (2g)^{1/2} (H - 60)^{3/2} \quad (8)$$

④当 $70 < H \leq 100$ 时:

$$Q = -\frac{4}{75} (2g)^{1/2} H^{5/2} + \frac{8}{3} (2g)^{1/2} H^{3/2} + \frac{4}{75} (2g)^{1/2} (H - 10)^{3/2} H - \frac{8}{15} (2g)^{1/2} (H - 10)^{3/2} - \frac{22}{75} (2g)^{1/2} (H - 60)^{3/2} H + \frac{424}{15} (2g)^{1/2} (H - 60)^{3/2} + \frac{64}{225} (2g)^{1/2} (H - 70)^{3/2} H - \frac{896}{45} (2g)^{1/2} (H - 70)^{3/2} \quad (9)$$

非线性阻力板结构,如图 4 所示。

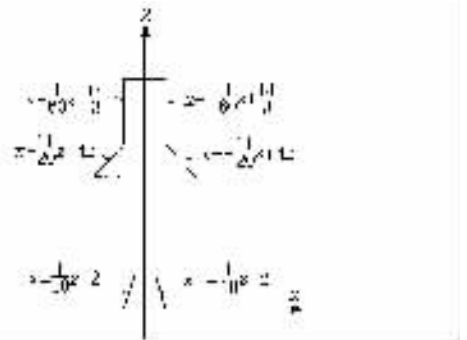


图 4 非线性阻力板结构图

上述各流量特性,同样引入流量系数加以修正。流量系数测定数据,见表 1。

表 1 流量系数测定数据

注水量 ($\text{mm}^3 \cdot \text{s}^{-1}$)	液位高度 mm	理论流量 ($\text{mm}^3 \cdot \text{s}^{-1}$)	流量系数 β
233 219	94	315 170	0.740 0
219 337	90	286 690	0.765 1
216 561	89	279 670	0.774 3
205 454	87	265 770	0.773 0
194 349	85	252 050	0.771 1

续表 1

注水量 (mm ³ ·s ⁻¹)	液位高度 mm	理论流量 (mm ³ ·s ⁻¹)	流量系数 β
188 796	83	238 530	0.791 5
172 138	80	218 600	0.787 5
155 479	78	205 560	0.756 4
149 927	73	173 760	0.862 8
138 821	70	155 040	0.895 4
116 610	66	129 540	0.900 2
94 398	64	117 150	0.805 8
66 702	50	75 583	0.882 5
50 511	40	55 715	0.906 6
37 611	32	41 294	0.910 8
33 317	29	36 249	0.919 1
28 289	27	33 002	0.857 2
13 882	15	15 605	0.889 6

通过实验测定注水量及相应平衡时的液位高度 根据式(6)~式(9)确定相应液位高度的理论流量 求得非线性阻力板不同范围的流量系数 β。

$$\beta = \begin{cases} 0.90 & 0 \leq H \leq 60 \\ 0.87 & 60 < H \leq 70 \\ 0.81 & 70 < H \leq 80 \\ 0.75 & 80 < H \leq 100 \end{cases} \quad (10)$$

5 三容水箱的线性化模型

三容水箱中的每个水箱可以选用线性或非线性阻力板 构成不同阶次的线性或非线性系统。进行控制系统分析与设计时 很多情况下往往把非线性模型线性化 得到不同平衡点处的线性化模型 再利用线性控制器设计方法进行设计。

1) 三容水箱的线性模型 三个水箱都采用线性阻力板时 由式(1)(5)得:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\alpha B(2gA)^{1/2}}{C_1} & 0 & 0 \\ \frac{\alpha B(2gA)^{1/2}}{C_2} & -\frac{\alpha B(2gA)^{1/2}}{C_2} & 0 \\ 0 & \frac{\alpha B(2gA)^{1/2}}{C_3} & -\frac{\alpha B(2gA)^{1/2}}{C_3} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{C_1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} q_i \quad (11)$$

式(11)说明三容水箱为线性系统 将相应参数 C₁ = 166 585 mm², C₂ = 169 510 mm², C₃ = 166 585 mm², A = 5 mm, B = 14.784 mm, g = 9 806.65mm/s², α = 0.6代入 其传递函数为

$$G(s) = \frac{H_3(s)}{Q_i(s)} = \frac{0.000 36}{(60s + 1)(61s + 1)}$$

2) 三容水箱的线性化模型 三容水箱 1 2 号水箱采用线性阻力板 3 号水箱采用非线性阻力板 由式(1)(5)(10)得:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\alpha B(2gA)^{1/2}}{C_1} h_1 \\ \frac{\alpha B(2gA)^{1/2}}{C_2} h_1 - \frac{\alpha B(2gA)^{1/2}}{C_2} h_2 \\ \frac{\alpha B(2gA)^{1/2}}{C_3} h_2 - \frac{1}{C_3} \beta f_3(h_3) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{C_1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} q_i \quad (12)$$

式(12)说明三容水箱为非线性系统 f₃(h₃)根据液位高度由式(6)~式(9)确定。

现假设在液位为 h₃₀ = 50 mm 平衡点处 对非线性系统线性化 由式(7)(12)得:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \delta h_1 \\ \delta h_2 \\ \delta h_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\alpha B(2gA)^{1/2}}{C_1} & 0 & 0 \\ \frac{\alpha B(2gA)^{1/2}}{C_2} & -\frac{\alpha B(2gA)^{1/2}}{C_2} & 0 \\ 0 & \frac{\alpha B(2gA)^{1/2}}{C_3} & -\frac{\beta f'(h_{30})}{C_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta h_1 \\ \delta h_2 \\ \delta h_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{C_1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \delta q_i \quad (13)$$

代入相应参数 得线性化后的传递函数:

$$G(s) = \frac{\delta H_3(s)}{\delta Q_i(s)} = \frac{0.000 533}{(60s + 1)(61s + 1)(89s + 1)}$$

同理 可以求得三容水箱采用各种阻力板组合情况下 在不同液位高度时的线性化模型。