

文章编号: 1671-7848(2007)03-0297-05

## 具有大不确定性对象的分层切换控制方法

高 锋, 李 克 强, 王 建 强, 连 小 珉

(清华大学 汽车安全与节能国家重点实验室, 北京 100084)



摘 要: 针对大模型不确定性对象的控制问题, 提出了一种基于鲁棒控制理论的多模型分层切换控制方法。为减少覆盖不确定性需要的模型数量, 采用多个乘性不确定模型来描述对象, 并应用 LMI 方法设计控制器集合。考虑鲁棒控制中常用系统增益来度量不确定性, 设计了一种基于不确定性增益估计的切换指标函数, 并据此将控制器集合中合适的控制器连接到反馈回路中。理论分析表明系统 BIBO 稳定, 且具有一定的扰动抑制能力。仿真实验结果验证了控制方法的有效性。

关 键 词: 切换控制; 多模型; 不确定性估计; 鲁棒控制

中图分类号: TP 27 文献标识码: A

## Hierarchical Switching Control Algorithm for Plant with Large Uncertainties

GAO Feng, LI Ke-qiang, WANG Jian-qiang, LIAN Xiao-min

(State Key Laboratory of Automotive Safety and Energy, Tsinghua University, Beijing 100084, China)

**Abstract:** To the control problem of the plant with large uncertainties, a hierarchical switching control algorithm based on robust control theory is proposed. To reduce the models needed to cover the uncertainties, multiple multiplicative uncertainty models are used to describe the plant, and the controller set is designed by the LMI approach. Since system gain is usually used to valuate the uncertainties in robust control system, a switching index function by estimating the gain of the uncertainties is designed to switch the proper controller in the controller set into the feedback loop. Theoretical analyses show that the system is BIBO stable and a certain disturbance attenuation level can be achieved. Simulation result shows the effectiveness of the control algorithm.

**Key words:** switching control; multiple model; uncertainty estimation; robust control

### 1 引 言

实际工程中, 建立的对象模型必然存在一定的不确定性。不确定性很大时, 通过一个固定的控制器很难同时保证稳定性和好的控制效果, 甚至不能镇定对象。建立多个模型覆盖对象不确定性, 根据切换指标函数, 从控制器集合中选择合适的控制器进行控制是近年来解决此类问题的一个有效方法<sup>[1~14]</sup>。该方法的重点和难点之一是切换指标函数的设计。文献[1~11]以估计误差的  $L_{2\sigma}$  范数构成切换指标函数。文献[12~14]以对象输出的预测误差的  $L_{2\sigma}$  范数作为切换指标函数。上述方法在设计切换指标函数时未充分考虑下层反馈控制系统的特点, 从而未能利用下层系统的鲁棒性来减少模型数量, 提高系统性能, 如文献[5, 6]中便需要大量模型。此外, 已有研究仅分析了系统的渐近性能, 而控制过程的动态性能讨论较少。

针对具有大模型不确定性对象的控制问题, 本

文提出了一种基于鲁棒控制理论的多模型分层切换控制方法, 并对系统的鲁棒稳定性和扰动抑制能力进行了理论分析。

### 2 问题描述和数学准备

由于实际系统中信号的  $L_2$  范数通常随时间会趋于无穷大, 所以文中采用  $L_{2\sigma}$  范数及其导出范数  $H_{\infty}^{\sigma}$  范数来度量信号和系统的大小。 $L_{2\sigma}$  范数定义为<sup>[15]</sup>

$$\|x_t\|_2^{\sigma} = \left( \int_0^t \exp(-\delta(t-\tau)) x^T(\tau) x(\tau) d\tau \right)^{1/2}$$

式中  $\delta \geq 0$  为常数;  $x_t$  为信号  $x$  的截尾信号。

对具有大不确定性的对象, 采用多个乘性不确定模型组成模型集合  $P$  来覆盖对象的不确定性。

$$P = \{P_i(s) = [I + \Delta_i W_i(s)] G_i(s), \|\Delta_i\|_{\infty}^{\sigma} < 1, i = 1, \dots, n\} \quad (1)$$

即对任意可能的对象, 存在  $P_i \in P$  能够对其进行描述。

收稿日期: 2006-04-03; 收修定稿日期: 2006-04-18

作者简介: 高 锋(1979-), 男, 江苏邳江人, 博士, 主要研究方向为智能交通与车辆控制、多模型控制等; 李克强(1963-), 男, 湖南资阳人, 教授, 博士生导师。

针对上述对象,通过对控制器集合  $C$  和切换指标函数的设计构成基于鲁棒控制理论的多模型分层切换控制系统,使得闭环系统在保证鲁棒稳定性的同时,对外部扰动具有一定的抑制能力。

### 3 系统设计

分层切换控制系统结构如图 1 所示。

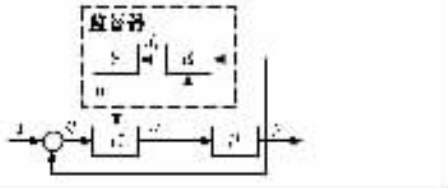


图 1 多模型分层切换控制系统结构

Fig.1 Multi-model hierarchical switching control system

系统分为两层:上层为监督器,根据对象的输入输出切换信号  $\sigma$ ,它与集合  $C$  中控制器的编号对应,由  $\sigma$  选择对应的控制器并将其切换到反馈回

$$\begin{pmatrix} A_{pi}^{\delta} X + X A_{pi}^{\delta T} + B_{p2i} \hat{C}_i + (B_{p2i} \hat{C}_i)^T & \hat{A}_i^T + A_{pi}^{\delta} + B_{p2i} \hat{D}_i C_{p2i} & B_{p1i} + B_{p2i} \hat{D}_i D_{p2i} & * \\ * & A_{pi}^{\delta T} Y + Y A_{pi}^{\delta} + \hat{B}_i C_{p2i} + (\hat{B}_i C_{p2i})^T & Y B_{p1i} + \hat{B}_i D_{p2i} & * \\ * & * & -\gamma I & * \\ C_{p1i} X + D_{p12i} \hat{C}_i & C_{p1i} + D_{p12i} \hat{D}_i C_{p2i} & D_{p11i} + D_{p12i} \hat{D}_i D_{p21i} & -\gamma I \end{pmatrix} < 0, \quad (3)$$

$$\begin{pmatrix} X & I \\ I & Y \end{pmatrix} > 0, \quad i = 1 \dots n$$

式中  $A_{pi}^{\delta} = A_{pi} + 0.5\delta I$ ;  $\gamma < 1$ ; \* 表示由矩阵对称性得到的矩阵块。

利用 Matlab 的 LMI 工具箱可求解不等式 (3)<sup>[16]</sup>。若不等式 (3) 可行,则对  $I - XY$  进行奇异值分解得满秩矩阵  $M$  和  $N$  满足  $MN^T = I - XY$ 。定义:

$$D_{Ki} = \hat{D}_i$$

$$C_{Ki} = (\hat{C}_i - D_{Ki} C_{p2i} X)(M^T)^{-1}$$

$$B_{Ki} = N^{-1}(\hat{B}_i - Y B_{p2i} D_{Ki})$$

$$A_{Ki} = N^{-1}(\hat{A}_i - Y(A_{pi} + B_{p2i} D_{Ki} C_{p2i})X)(M^T)^{-1} - B_{Ki} C_{p2i} X (M^T)^{-1} - N^{-1} Y B_{p2i} C_{Ki} - 0.5\delta I$$

则控制器集合为

$$C = \{K_i(s) | K_i(s) = C_{Ki}(sI - A_{Ki})^{-1} B_{Ki} + D_{Ki}, \quad i = 1 \dots n\} \quad (4)$$

由 LMI 理论<sup>[16]</sup>和广义系统式 (2) 可知,求解得到的控制器集合  $C$  和模型集合  $P$  满足:

①存在对称正定矩阵  $X_1$  使得:

$$\begin{pmatrix} A_{rci}^{\delta T} X_1 + X_1 A_{rci}^{\delta} & X_1 B_{rci} & C_{rci}^T \\ B_{rci}^T X_1 & -\gamma I & D_{rci}^T \\ C_{rci} & D_{rci} & -\gamma I \end{pmatrix} < 0, \quad i = 1 \dots n$$

式中  $A_{rci}^{\delta} = A_{rci} + 0.5\delta I$ ;  $\{A_{rci}, B_{rci}, C_{rci}, D_{rci}\}$  为系统  $W_i(s)G_i(s)K_i(s)[I + G_i(s)K_i(s)]^{-1}$  的状态空间描述。

②存在对称正定矩阵  $X_2$  使得:

路中;下层为由当前控制器和对象组成的反馈控制系统。当  $\sigma$  固定时,监督器不影响下层反馈控制系统,此时下层系统为一般的线性定常系统。当  $\sigma$  发生变化时,连接到反馈回路中的控制器会发生切换。

1) 控制器集合设计 定义性能指标加权函数为  $W_{per}(s)$ ,得到如下广义系统:

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & W_i(s)G_i(s) \\ 0 & W_{per}(s) & -W_{per}(s)G_i(s) \\ I & 0 & -G_i(s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ u \end{pmatrix}, \quad i = 1 \dots n \quad (2)$$

上述系统对应的状态空间描述的系数矩阵为

$$\begin{pmatrix} A_{pi} & B_{p1i} & B_{p2i} \\ C_{p1i} & D_{p11i} & D_{p12i} \\ C_{p2i} & D_{p21i} & D_{p22i} \end{pmatrix}, \quad i = 1 \dots n$$

则控制器集合  $C$  存在的条件为存在对称矩阵  $X, Y$  和矩阵  $\hat{A}_i, \hat{B}_i, \hat{C}_i, \hat{D}_i$  使得线性矩阵不等式 (3) 可行:

$$\begin{pmatrix} A_{pci}^{\delta T} X_2 + X_2 A_{pci}^{\delta} & X_2 B_{pci} & C_{pci}^T \\ B_{pci}^T X_2 & -\gamma I & D_{pci}^T \\ C_{pci} & D_{pci} & -\gamma I \end{pmatrix} < 0, \quad i = 1 \dots n$$

式中  $A_{pci}^{\delta} = A_{pci} + 0.5\delta I$ ,  $\{A_{pci}, B_{pci}, C_{pci}, D_{pci}\}$  为系统  $W_{per}(s)[I + G_i(s)K_i(s)]^{-1}$  的状态空间描述。

条件①主要考虑闭环切换系统的鲁棒性,条件②主要考虑系统对扰动的抑制性能。

2) 监督器设计 由图 1 知,监督器包括不确定增益估计器  $E$  和切换逻辑  $S$  两部分。

①不确定增益估计器  $E$  由对象的输入  $u$  和输出  $y$ ,对象与集合  $P$  中模型之间的不确定性对当前信号的  $L_{2\delta}$  增益进行估计。估计器方程为

$$y_i = \frac{H_i(s)}{\Lambda(s)} u + \frac{\Lambda(s) - N_i(s)}{\Lambda(s)} y$$

$$e_i = y_i - y$$

$$z_i = \frac{H_i(s)}{\Lambda(s)} W_i(s) u$$

$$J_i(t) = \|e_{it}\|_2^{\delta_2} - \|z_{it}\|_2^{\delta_2}$$

$$i = 1 \dots n \quad (5)$$

式中  $H_i(s)N_i(s) = G_i(s)$ ;  $\Lambda(s)$  为稳定的多项式;  $J_i(t)$  反应了对象与各模型之间的不确定性对当前信号的  $L_{2\delta}$  增益是否大于 1。

②切换逻辑  $S$  根据  $J_i(t)$  输出切换信号  $\sigma$  从

集合  $C$  中选择对应的控制器进行控制。文中直接将  $J_i(t)$  最小的模型的编号作为输出,并将对应的控制器连接到反馈回路中。

以上完成了各部分的设计,按图 1 将各部分进行连接,即可得到文中的分层切换控制系统。

### 4 性能分析

为便于表述,对于切换系统:

$$\begin{cases} \dot{x} = A_\sigma x + B_\sigma u \\ y = C_\sigma x + D_\sigma u \end{cases} \quad (6)$$

系数矩阵  $\{A_\sigma, B_\sigma, C_\sigma, D_\sigma\}$  在某一集合内取值,表示为  $\sigma \in \Theta$ 。切换系统采用如下方式表示:

$$y = G_\sigma(s)u$$

式中,  $G_\sigma(s) = C_\sigma(sI - A_\sigma)^{-1}B_\sigma + D_\sigma$

在进行性能分析前,首先引入如下引理。

引理 1<sup>[17]</sup> 对于切换系统式(6),若存在对称正定矩阵  $X$  和  $Y$ ,使得对于任意  $\sigma \in \Theta$ ,有:

$$A_\sigma^T X + X A_\sigma \leq -Y$$

则切换系统式(6)全局一致按指数渐近稳定。

引理 2 对于式(6)所示的切换系统,若存在对称正定矩阵  $X$ ,使得对于任意的  $\sigma \in \Theta$  有:

$$\begin{pmatrix} A_\sigma^{\delta T} X + X A_\sigma^\delta & X B_\sigma & C_\sigma^T \\ B_\sigma^T X & -\gamma I & D_\sigma^T \\ C_\sigma & D_\sigma & -\gamma I \end{pmatrix} < 0 \quad (7)$$

式中,  $\gamma > 0; A_\sigma^\delta = A_\sigma + 0.5\delta I$ 。

则在任意切换下,有  $\|G_\sigma(s)\|_\infty^\delta < \gamma$ 。

证明 将式(7)左边矩阵分别左乘和右乘  $\text{diag}\{\gamma^{1/2}I, \gamma^{1/2}I, \gamma^{-1/2}I\}$ ,并定义  $Y = \gamma X$ ,利用 Schur 补性质有:

$$T_\sigma = \begin{pmatrix} (A_\sigma + 0.5\delta I)^T Y + Y(A_\sigma + 0.5\delta I) & Y B_\sigma \\ B_\sigma^T Y & -\gamma^2 I \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} C_\sigma^T \\ D_\sigma^T \end{pmatrix} (C_\sigma \quad D_\sigma) < 0, \forall \sigma \in \Theta \quad (8)$$

不失一般性,假设切换顺序为

$$\sigma = \begin{cases} \sigma_0, & 0 = t_0 \leq t \leq t_1 \\ \sigma_1, & t_1 \leq t \leq t_2 \\ \vdots \end{cases} \quad (9)$$

定义  $x_\delta(\tau) = \exp(-0.5\delta(t-\tau))x(\tau), u_\delta(\tau) = \exp(-0.5\delta(t-\tau))u(\tau), [x_\delta(\tau)] = x_\delta^T(\tau)Yx_\delta(\tau)$ ,由方程式(6)有:

$$\frac{d}{d\tau}x_\delta(\tau) = (A_\sigma + 0.5\delta I)x_\delta(\tau) + B_\sigma u_\delta(\tau) \quad (10)$$

则在任意两次切换之间有:

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} \exp(-\delta(t-\tau)) [y^T(\tau)x(\tau) - \gamma^2 u^T(\tau)u(\tau)] d\tau = J_{ii} + [x_\delta(t_i)] - [x_\delta(t_{i+1})] \quad (11)$$

$$\text{式中 } J_{ii} = \int_{t_i}^{t_{i+1}} \begin{pmatrix} x_\delta(\tau) \\ u_\delta(\tau) \end{pmatrix}^T T_{\sigma_i} \begin{pmatrix} x_\delta(\tau) \\ u_\delta(\tau) \end{pmatrix} d\tau$$

由式(8)有:

$$J_{ii} < 0 \quad (12)$$

定义:

$$J(t) = \int_0^t \exp(-\delta(t-\tau)) [y^T(\tau)y(\tau) - \gamma^2 u^T(\tau)u(\tau)] d\tau$$

根据式(9),在每段时间上分段积分,将式(11)代入有:

$$J(t) = J_{i0} + J_{i1} + \dots + [x_\delta(t_0)] - [x_\delta(t)]$$

设初始状态为 0,根据  $L_{2\delta}$  范数的定义和式(12)有  $\|y\|_{2t}^{\delta 2} < \gamma^2 \|u\|_{2t}^{\delta 2}$ ,即:

$$\|G_\sigma(s)\|_\infty^\delta < \gamma \quad (13)$$

1) 稳定性分析 图 1 所示系统的等效反馈结构如图 2 所示。

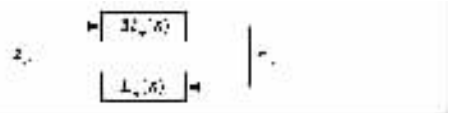


图 2 等效反馈结构

Fig.2 Equivalent structure of the feedback control system

图中  $\sigma$  为切换逻辑  $S$  输出的切换信号,作为下标表示对应模型的相关信号和传递特性。

定理 1 图 2 等效系统的闭环  $L_{2\delta}$  增益小于  $\gamma$ 。

证明 不失一般性,假设当前对象由  $P_j$  描述,切换逻辑  $S$  的输出由式(9)描述。由系统方程有:

$$e_j = -\Delta_j z_j$$

考虑初始状态按指数收敛到 0,假设初始状态为 0,由于  $\|\Delta_j\|_\infty^\delta < 1$ ,则切换指标  $J_j$  满足:

$$J_j(t) = \|e_{j_i}\|_2^{\delta 2} - \|z_{j_i}\|_2^{\delta 2} < 0 \quad (14)$$

切换指标是时间的连续函数,在切换时刻  $t_i$  有:

$$J_{\sigma_i}(t_{i+1}) = J_{\sigma_{i+1}}(t_{i+1}) \quad (15)$$

$\forall t > 0$ ,设  $t \in (t_n, t_{n+1})$ ,由切换指标函数和  $L_{2\delta}$  范数的定义有:

$$\|e_{\sigma_i}\|_2^{\delta 2} - \|z_{\sigma_i}\|_2^{\delta 2} = J_{\sigma_i}(t) - \exp(-\delta(t-t_n))J_{\sigma_n}(t_n) + \exp(-\delta(t-t_n))J_{\sigma_{n-1}}(t_n) - \dots + \exp(-\delta(t-t_1))J_{\sigma_0}(t_1) \quad (16)$$

将式(15)代入式(16)有:

$$\|e_{\sigma_i}\|_2^{\delta 2} - \|z_{\sigma_i}\|_2^{\delta 2} = J_{\sigma_i}(t) \quad (17)$$

根据切换逻辑  $S$  的切换规则,有:

$$\|e_{\sigma_i}\|_2^{\delta 2} - \|z_{\sigma_i}\|_2^{\delta 2} = J_{\sigma_i}(t) < J_j(t) < 0 \quad (18)$$

即  $M_\sigma(s)$  的  $L_{2\delta}$  增益小于 1。

另一方面,根据图 1 中的反馈系统结构,可得:

$$z_\sigma = W_\sigma(s)G_\sigma(s)K_\sigma(s)[I + G_\sigma(s)K_\sigma(s)]^{-1}e_\sigma \quad (19)$$

由条件①和引理 2 可知  $\|L_\sigma(s)\|_\infty^\delta < \gamma$ 。结合

式(18)如图 2 所示的闭环系统的  $L_{2\delta}$  增益小于  $\gamma$ 。

进一步 根据小增益定理可知文中控制系统中的信号  $e_\sigma$  和  $z_\sigma$  的  $L_{2\delta}$  范数有界。由图 1 所示的反馈控制系统结构有：

$$u = [ N_o(s)N_{K\sigma}(s)I + H_o(s)H_{K\sigma}(s) ]^{-1} H_{K\sigma}(s) \times [ N_o(s)r + \Lambda(s)e_\sigma ] \quad (20)$$

$$y = [ N_o(s)N_{K\sigma}(s)I + H_o(s)H_{K\sigma}(s) ]^{-1} \times [ H_o(s)H_{K\sigma}(s)r - N_{K\sigma}(s)\Lambda(s)e_\sigma ] \quad (21)$$

显然切换系统式(20)和式(21)也存在满足引理 1 要求的对称正定矩阵,所以控制信号  $u$  和对象输出  $y$  也有界。综合以上分析可知,文中的控制系统 BIBO 稳定。

2)跟踪性能分析 信号  $q$  为  $y$  跟踪  $r$  的跟踪误差,由于系统存在切换过程,不同于一般的定常反馈系统,故定义新的信号来反应系统的跟踪性能：

$$\begin{cases} q^* = N_o(s)\Lambda(s)q \\ r^* = N_o(s)\Lambda(s)r \end{cases} \quad (22)$$

由引理 1 可知式(22)中的两个切换系统全局一致按指数渐近稳定,所以信号  $q^*$  对  $r^*$  的抑制能力一定程度上也反应了  $q$  对  $r$  的抑制能力。图 1 的控制系统,  $q^*$  对  $r^*$  的抑制能力有如下定理。

定理 2 对所设计的分层切换控制系统有：

$$\frac{\| (W_{per}(s)q^*)_t \|_2^\delta}{\| r_t^* \|_2^\delta} < \frac{\gamma}{1-\gamma}$$

证明 由图 1 的反馈控制系统结构有：

$$q^* = [ I + G_o(s)K_o(s) ]^{-1} (r^* - e_\sigma) \quad (23)$$

根据条件②和引理 2 有：

$$\| (W_{per}(s)q^*)_t \|_2^\delta < \gamma \| (r^* - e_\sigma)_t \|_2^\delta \quad (24)$$

此时不等式(18)仍然成立。将估计器方程式(5)和式(20)代入式(18)根据条件①和引理 2 有：

$$\| e_{\sigma t} \|_2^\delta < \gamma \| (r^* - e_\sigma)_t \|_2^\delta \quad (25)$$

利用范数的三角不等式关系有：

$$\| (r^* - e_\sigma)_t \|_2^\delta - \| r_t^* \|_2^\delta \leq \| e_{\sigma t} \|_2^\delta \quad (26)$$

将式(26)代入式(25)经过适当变换有：

$$\| (r^* - e_\sigma)_t \|_2^\delta < \frac{1}{1-\gamma} \| r_t^* \|_2^\delta \quad (27)$$

将式(27)代入式(24),定理 2 得证。

### 5 仿真分析

被控对象为常见的带纯延时的二阶惯性系统：

$$p(s) = b(s+1)\exp(-\tau s) \quad (28)$$

式中  $3 \leq b \leq 6, 0 \leq \tau \leq 0.1$ 。

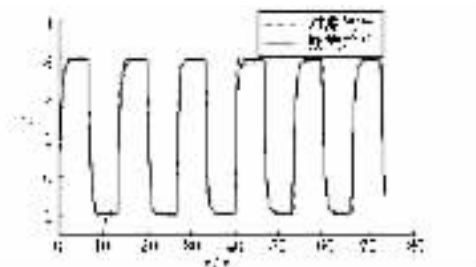
采用三个乘性不确定性模型来覆盖对象的不确定性,并设计对应的控制器集合,设计过程中性能加权函数为

$$W_{per}(s) = (0.01s + 1.5)s \quad (29)$$

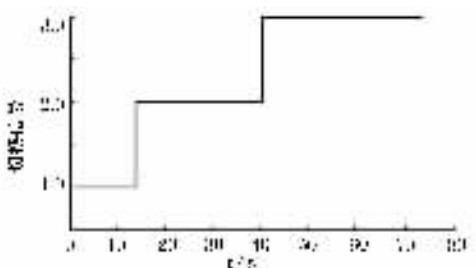
仿真过程中取指数衰减系数  $\delta = 0.4$ ,延时  $\tau$  始终为  $0.1s$ ,  $b$  的变化规律为

$$b = \begin{cases} 3, & 0 \leq t \leq 10 \\ 4, & 10 < t \leq 25 \\ 5, & 25 < t \leq 40 \\ 6, & 40 < t \leq 74 \end{cases} \quad (30)$$

仿真结果如图 3 所示。



(a) 输出曲线



(b) 切换信号

图 3 仿真结果

Fig.3 Simulation results

从图 3(a)的仿真结果可以看出,通过在控制器集合设计时同时考虑鲁棒稳定性和对干扰的抑制能力,文中设计的分层切换控制方法不但可以保证系统的稳定性,同时可以获得比较好的跟踪效果。从图 3(b)的切换信号曲线和式(30)描述的参数  $b$  的变化规律可以看出,文中针对鲁棒控制系统特点设计的基于不确定性估计的指标切换函数能够衡量对象与公称模型之间的不确定性,在对象特性发生变化后能够及时选择与对象最接近的模型对应的控制器进行控制。

### 6 结语

针对大模型不确定性对象的控制问题,文中提出了一种基于鲁棒控制理论的多模型分层切换控制方法。通过理论分析和仿真实验可得,文中设计基于不确定性估计的切换指标函数能够衡量对象与模型之间不确定性的程度,控制系统在任意切换下 BIBO 稳定,存在有界外部扰动和大模型不确定性时,对象的输入输出信号的  $L_{2\delta}$  范数有界,通过对控制器集合的设计,存在大模型不确定性时,对象输出的跟踪误差对外部输入信号具有一定的抑制能力。

(下转第 324 页)