文章编号:1671-7848(2006)03-0221-03

具有H_∞干扰抑制的中立型系统保成本控制

杨 帆[1,2],张庆灵[1]
(1.东北大学 理学院,辽宁 沈阳 110004;2.通化师范学院 数学系,吉林 通化 134002)

摘 要:针对一类范数有界时变非线性不确定性的中立型系统,将其转化为时滞广义系统。利用时滞广义系统的相关理论、Lyapunov-Krasovskii 稳定性定理和线性矩阵不等式方法,通过无记忆状态反馈实现了具有 H_∞ 干扰抑制的保成本控制,并给出了具有 H_∞ 干扰抑制的中立型系统保成本控制器存在的充分条件及相应的干扰抑制保成本指标。控制器的设计使得闭环系统鲁棒稳定,具有给定 H_∞ 干扰衰减度同时使给定的干扰抑制保成本指标最优。所得结论等价于一组线性矩阵不等式(LMI)的可解性问题。最后给出算例以验证设计方法的有效性。
关 键 词:中立型时滞系统;保成本控制;H_∞ 控制;线性矩阵不等式;状态反馈
中图分类号:TP 13 文献标识码:A

Guaranteed Cost Control with H_∞ Disturbance Attenuation for Neutral Systems

YANG Fan[1,2], ZHANG Qing-ling[1]
(1. School of Science, Northeastern University, Shenyang 110004, China;
2. Department of Mathematics, Tonghua Teachers' College, Tonghua 134002, China)

Abstract: With the help of time-delay singular systems theory, Lyapunov-Krasovskii stability theory and linear matrix inequality approach, guaranteed cost memory-less state feedback controller with disturbance attenuation H_∞ performance is realized for a class of nonlinear neutral systems with norm-bounded, which is changed into time-delay singular systems. The sufficient conditions for the existence of such controller and the performance are given. A controller is designed such that the closed-loop system is robustly stable and possesses the H_∞ disturbance attenuation level, and the optimal guaranteed cost upper bound is obtained. The obtained conclusion is shown to be equivalent to the feasibility of some linear matrix inequality. An example shows the effectiveness of the proposed method.
Key words: neutral time-delay system; guaranteed cost control; H_∞ control; linear matrix inequality; state-feedback

1 引 言

时滞、不确定现象、外界干扰等是工程中经常碰到的现象,往往破坏系统的稳定性,使性能指标退化,以 H_∞ 控制[1,2]、保成本控制等理论为代表的现代鲁棒控制理论引起了广大学者的关注[3~6]。

保成本控制可以使不确定系统二次稳定,有确定的二次型性能指标上界,H_∞ 控制较好地解决系统的鲁棒性,抑制了外部干扰,鉴于此 H_2/H_∞ 混合控制问题得到研究[6]。随着对各种中立型系统的稳定性分析[7],中立型系统的理论越来越成熟[8]。借鉴混合 H_2/H_∞ 的思想,研究中立型系统具有 H_∞ 干扰抑制的保成本控制问题。

2 问题描述

考虑如下一类不确定中立型系统:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A_0x(t) + A_1x(t-h) + A_2\dot{x}(t-h) + \\ \quad Bu(t) + B_1\omega(t) + f(t, x(t), x(t-h), \dot{x}(t-h)) \\ z(t) = Cx(t) + Du(t), x(t_0+\theta) = \varphi(\theta), \\ \quad \forall\theta \in [-h, 0] \end{cases} \tag{1}$$

式中,$x(t)\in \mathbf{R}^n$,$z(t)\in \mathbf{R}^q$,$\omega(t)\in \mathbf{R}_s$,$u(t)\in \mathbf{R}^m$ 分别是状态向量、系统输出、平方可积外部未知干扰信号和系统的控制输入向量;时滞 $h>0$;向量 $\varphi(t)$ 为任意一连续的满足相容性条件的初始函数;A_0,A_1,A_2,B,B_1,C,D 是已知适当维数常数阵;$f(\cdot)$ 是未知的非线性不确定参数但范数有界。

收稿日期:2004-02-12; 收修定稿日期:2006-01-19
基金项目:辽宁省普通高校学科带头人基金资助项目(124210);辽宁省科技基金资助项目(2001401041)
作者简介:杨 帆(1966-),女,吉林通化人,副教授,博士研究生,主要研究方向为广义系统的鲁棒控制和经济控制等;张庆灵(1956-),男,辽宁营口人,教授,博士生导师。

即存在非负常数 $\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2$，使得：

$$\| f(t,x(t),x(t-h),\dot{x}(t-h)) \| \leqslant \alpha_0 \| x(t) \| + \alpha_1 \| x(t-h) \| + \alpha_2 \| \dot{x}(t-h) \| \quad (2)$$

系统所对应的二次型性能指标：

$$J = \int_0^{\infty} (x^{\mathrm{T}}(t) Q x(t) + u^{\mathrm{T}}(t) R u(t)) \mathrm{d}t = \int_0^{\infty} z^{\mathrm{T}}(t) z(t) \mathrm{d}t = \int_0^{\infty} \| z(t) \|_2^{\mathrm{T}} \mathrm{d}t \quad (3)$$

式中，对称正定矩阵 Q,R 分别是给定的状态和控制权矩阵，且满足：

$$C = [Q^{1/2} \quad 0]^{\mathrm{T}}, D = [0 \quad R^{1/2}]^{\mathrm{T}}.$$

设计控制器 $u(t) = Kx(t)$，使得对于不确定性式(2)，闭环系统渐近稳定，且满足：

$$J = \int_0^{\infty} z^{\mathrm{T}}(t) z(t) \mathrm{d}t \leqslant \int_0^{\infty} \gamma^2 \omega^{\mathrm{T}}(t) \omega(t) \mathrm{d}t + J^* \quad (4)$$

当 $\omega(t) = 0$ 时，$J < J^*$ 即为一般的保成本(GCC)问题；$\omega(t) \neq 0$ 时，从 $\omega(t)$ 到 $z(t)$ 的传递函数满足一定抑制水平 γ，就是 H_∞ 控制问题。设：

$$\dot{x}(t) = y(t)$$

$$y(t) = (A_0 + A_1 + BK) x(t) - A_1 \int_{t-h}^{t} y(s) \mathrm{d}s + A_2 y(t-h) + B_1 \omega(t) + f(t,x(t),x(t-h),y(t-h))$$

相应的闭环系统表示为广义时滞系统如下：

$$E\dot{X}(t) = \bar{A}_0 X(t) - \bar{A}_1 \int_{-h}^{0} X(t+s) \mathrm{d}s + \bar{A}_2 X(t-h) + \bar{B}_1 \omega(t) + \bar{f} \quad (5)$$

式中，

$$X(t) = [x^{\mathrm{T}}(t) \quad y^{\mathrm{T}}(t)]^{\mathrm{T}}; E = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$$\bar{A}_0 = \begin{bmatrix} 0 & I \\ A_0 + A_1 + BK & -I \end{bmatrix};$$

$$\bar{A}_i = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & A_i \end{bmatrix}, i = 1,2; \bar{B}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ B_1 \end{bmatrix};$$

$$\bar{f} = \begin{bmatrix} 0 \\ f(t,x(t),x(t-h),\dot{x}(t-h)) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ f \end{bmatrix}$$

定义 1 给定干扰抑制水平 $\gamma > 0$，对于不确定系统式(1)和不确定性式(2)及性能指标式(3)，如果存在正定对称阵 R_1,R_2 使得如下矩阵不等式：

$$\Xi = \begin{bmatrix} \Sigma + \Omega & P^{\mathrm{T}}\bar{A}_2 & P^{\mathrm{T}}\bar{B}_1 \\ * & \varepsilon^{-1}M - R_2 & 0 \\ * & * & -\gamma^2 I \end{bmatrix} < 0 \quad (6)$$

成立，则控制器 $u(t) = K(t)$ 称为系统式(1)和式(3)的具有 H_∞ 范数的保成本控制器。

式中，$\Sigma = P^{\mathrm{T}}\bar{A}_0 + \bar{A}_0^{\mathrm{T}}P + hP^{\mathrm{T}}R_1^{-1}P + \varepsilon P^{\mathrm{T}}P + \varepsilon^{-1}N + h\bar{A}_1^{\mathrm{T}}R_1\bar{A}_1 + R_2$；

$\Omega = \mathrm{diag}\{(C+DK)^{\mathrm{T}}(C+DK),0\}$；

$M = 3\alpha_1^2 I$；$N = \mathrm{diag}\{3\alpha_0^2 I,0\}$

3 主要定理

定理 1 设不确定系统式(1)具有性能指标式(3)以及外部干扰 $\omega(t)$，鲁棒保性能 H_∞ 控制对于不确定性参数式(2)，具有以下性质：

①系统渐近稳定；②系统具有零初始条件时，$\| z(t) \|_2 \leqslant \gamma \| \omega(t) \|_2$，$\gamma > 0$ 是给定干扰衰减度；③性能指标 J 存在上确界 J^*。

证明 取 Lyapunov-Krasovskii 函数为

$$V(x_t) = X^{\mathrm{T}}EPX + \int_{-h}^{0}\int_{t}^{t-\theta} X^{\mathrm{T}}(\tau+\theta)\bar{A}_1^{\mathrm{T}}R_1\bar{A}_1 X(\tau+\theta)\mathrm{d}\tau\mathrm{d}\theta + \int_{t-h}^{t} X^{\mathrm{T}}(s)R_2X(s)\mathrm{d}s$$

式中，$P = \begin{bmatrix} P_1 & 0 \\ P_2 & P_3 \end{bmatrix}$，$P_1 > 0$。

$V(t)$ 沿着闭环系统式(5)的解轨线导数：

$$\dot{V}(x_t) \leqslant \begin{bmatrix} X(t) \\ X(t-h) \\ \omega(t) \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} \Sigma & P^{\mathrm{T}}\bar{A}_2 & P^{\mathrm{T}}\bar{B}_1 \\ * & \varepsilon^{-1}M - R_2 & 0 \\ * & * & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X(t) \\ X(t-h) \\ \omega(t) \end{bmatrix} \quad (7)$$

从而系统是渐近稳定的($\omega(t) = 0$)。

$$\dot{V}(x_t) + z^{\mathrm{T}}(t)z(t) - \gamma^2\omega^{\mathrm{T}}(t)\omega(t) = \begin{bmatrix} X(t) \\ X(t-h) \\ \omega(t) \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \Xi \begin{bmatrix} X(t) \\ X(t-h) \\ \omega(t) \end{bmatrix} < 0$$

当 $\omega(t) = 0$ 时，由定义有：

$$\dot{V}(x_t) < -\begin{bmatrix} X(t) \\ X(t-h) \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \Omega \begin{bmatrix} X(t) \\ X(t-h) \end{bmatrix}$$

从而，

$$x^{\mathrm{T}}Qx + u^{\mathrm{T}}Ru = x^{\mathrm{T}}(C+DK)^{\mathrm{T}}(C+DK)x < -\dot{V}(t)$$

从 0 到 T 积分并令 $T \to \infty$，由系统渐近稳定有：

$$J = \int_0^{\infty} (x^{\mathrm{T}}Qx + u^{\mathrm{T}}Ru)\mathrm{d}t = V(0) = \varphi^{\mathrm{T}}(0)P_1\varphi(0) + \int_{-h}^{0}\int_{0}^{-\theta} X^{\mathrm{T}}(\tau+\theta) \times \bar{A}_1^{\mathrm{T}}R_1\bar{A}_1X(\tau+\theta)\mathrm{d}\tau\mathrm{d}\theta + \int_{-h}^{0} X^{\mathrm{T}}(s)R_2X(s)\mathrm{d}s = J^*$$

当 $\omega(t) \neq 0$ 时，$\dot{V}(t) < -X^{\mathrm{T}}\Omega X + \gamma^2\omega^{\mathrm{T}}(t)\omega(t)$

从而，$z^{\mathrm{T}}(t)z(t) \leqslant \gamma^2\omega^{\mathrm{T}}(t)\omega(t)$.

定理 2 给定系统式(1)和二次型性能指标式(3)及一定的干扰抑制水平 $\gamma > 0$，如果存在正定对称矩阵 $R_i = \begin{bmatrix} R_{ic} & 0 \\ 0 & R_{i0} \end{bmatrix}$，$i = 1,2$，某个常数 $\varepsilon > 0$，

$P^{-1}=Q=\begin{bmatrix}Q_1 & 0\\ Q_2 & Q_3\end{bmatrix}$ 使下列 LMI 式(8)可解,则系统式(1)存在具有 H_∞ 范数下的干扰抑制水平的保成本控制器 $u(t)=YX^{-1}$。令 $M=Q_2+Q_2^{\mathrm T}+\varepsilon I$,$N=Q_3-Q_2^{\mathrm T}+Q_1^{\mathrm T}(A_0+A_1)^{\mathrm T}+Y^{\mathrm T}B^{\mathrm T}$,$L=-Q_3-Q_3^{\mathrm T}+\varepsilon I$

$$\begin{bmatrix}
M & N & 0 & 0 & 0 & hR_{1c} & 0 & 0 & hQ_2^{\mathrm T}A_1^{\mathrm T} & Q_1^{\mathrm T} & Q_2^{\mathrm T} & 3\alpha_0^2Q_1^{\mathrm T} & 3\alpha_1^2Q_1^{\mathrm T} & 3\alpha_2^2Q_2^{\mathrm T} & (CQ_1+DY)^{\mathrm T}\\
* & L & 0 & A_2R_{20} & B_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
* & * & -R_{2c} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
* & * & * & -R_{20} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
* & * & * & * & -\gamma^2I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
* & * & * & * & * & -hR_{1c} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
* & * & * & * & * & * & -hR_{10} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
* & * & * & * & * & * & * & -hR_{1c} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
* & * & * & * & * & * & * & * & -hR_{10} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
* & * & * & * & * & * & * & * & * & -R_{2c} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
* & * & * & * & * & * & * & * & * & * & -R_{20} & 0 & 0 & 0 & 0\\
* & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * & -3\varepsilon\alpha_0^2I & 0 & 0 & 0\\
* & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * & -3\varepsilon\alpha_1^2I & 0 & 0\\
* & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * & -3\varepsilon\alpha_2^2I & 0\\
* & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * & -I
\end{bmatrix}<0 \quad (8)$$

证明　在式(6)中左乘 diag $\{Q^{\mathrm T},I,I\}$,右乘 diag $\{Q,I,I\}$ 有:

$$\Pi=\begin{bmatrix}Q^{\mathrm T}(\Sigma+Q)Q & \bar A_2^{\mathrm T} & \bar B_1\\ \bar A_2 & \varepsilon^{-1}M-R_2 & 0\\ \bar B_1^{\mathrm T} & 0 & -\gamma^2I\end{bmatrix}<0$$

利用 Schur 补引理,经计算有式(8)成立。

4　数值例子

设系统式(1)的参数、性能指标及不确定性参数等分别是:

$$A_0=\begin{bmatrix}1.5 & 1\\ 1.0 & 1\end{bmatrix},A_1=\begin{bmatrix}2.0 & 1\\ 1.3 & 3\end{bmatrix},A_2=\begin{bmatrix}0.5 & 1\\ -1.0 & -1\end{bmatrix},$$

$$B=\begin{bmatrix}-1.0\\ -0.6\end{bmatrix},B_1=\begin{bmatrix}0.01\\ 0.01\end{bmatrix},C=\begin{bmatrix}1\\ -2\end{bmatrix},D=5$$

干扰抑制率 $\gamma=0.7$,常数 $a=0.01,b=0.02,c=0.03$

利用 Matlab LMI Toolbox 求得:

$Y=[4.3812\ \ -4.4410]$,

$$Q_1=\begin{bmatrix}-7.294\,6 & 6.014\,6\\ 7.294\,9 & -8.087\,8\end{bmatrix}$$

控制律为

$$u(t)=YQ_1^{-1}x(t)=[-0.201\quad 0.399]\,x(t)$$

5　结　语

本文针对一类范数有界时变非线性不确定性的中立型系统,主要采用线性矩阵不等式(LMI)方法,将其转化为时滞广义系统,通过无记忆状态反馈实现了具有 H_∞ 干扰抑制的保成本控制。该控制器的设计保证了在系统不存在外部干扰的情况下,不确定中立型系统二次稳定,并有确定的二次型性能指标;当存在外部干扰时使保成本性能指标最优,又同时具有给定的 H_∞ 干扰衰减度。

参考文献:

[1] Fridman E, Shaked U. A descriptor system approach to H_∞ control of linear time-delay systems[J]. IEEE Trans Automat Control, 2002, 47(2): 253-279.

[2] Xie L, Fridman E, Shaked U. Robust-control of distributed delay systems with application to combustion control[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2001, 46(12): 1930-1935.

[3] Chen G D, Yu L, Chu J. Guaranteed cost controller design for uncertain linear systems with both state and control delays[J]. Acta Automatic Sinica, 2002, 28(2): 314-316.

[4] Yang G H, Wang J L, Soh Y C. Reliable guaranteed cost control for uncertain nonlinear systems[J], IEEE Transactions on Automatic Control, 2000, 45(11): 2188-2192.

[5] Yu Li, Chu J. An LMI approach to guaranteed cost control of linear time-delay systems[J]. Automatica, 1999, 35(6): 1155-1159.

[6] Khargonekar P P, Rotea M A. Mixed H_2/H_∞ control: a convex optimization approach[J] IEEE Trans on Automatic Control, 1991, 36(7): 824-837.

[7] Mahmoud M S. Robust H_∞ control of linear neutral systems[J]. Automatica, 2000, 36(5): 757-764.

[8] Fridman E. New Lyapunov-Krasovskii functionals for stability of linear retarded and neutral type systems[J]. Systems Control Letters, 2001, 431(4): 309-319