

文章编号: 1671-7848(2007)04-0359-03

二能级量子系统的构造控制稳定性研究

叶 宾, 孔晓红, 须文波

(江南大学 信息工程学院, 江苏 无锡 214122)



摘 要: 由于量子态在 Hilbert 空间中的酉演化性质, 经典稳定性概念在量子动力学中几乎没有意义。利用两个量子态保真度衰减的线性响应近似形式, 提出一种分析量子系统构造控制稳定性的方法。对二能级量子构造控制系统在静态干扰下的保真度摄动分析表明, 当有较多控制脉冲的径向坐标等于 $\pi/2$ 时, 控制系统取得较大的稳定性。两种不同的构造控制酉分解方法的数值仿真结果证明了理论分析的正确性。该分析方法有助于设计高稳定性的量子控制系统。

关 键 词: 量子控制; 保真度; 二能级量子系统

中图分类号: TP 13 **文献标识码:** A

Stabilization of the Constructive Control of Quantum Two-level Systems

YE Bin, KONG Xiao-hong, XU Wen-bo

(School of Information Technology, Southern Yangtze University, Wuxi 214122, China)

Abstract: To the problem that, due to the unitary invariance of the Hilbert-space overlap of quantum states, classical stability concepts make little sense in the quantum dynamics, the linear response formalism of fidelity decay is employed to measure the stability of constructive control of quantum systems with respect to static perturbations. By analysing the fidelity decay of the constructive control of the quantum two-level systems, the stability of the control system is enhanced when more control pulses have radial coordinates equal to $\pi/2$. The simulation results of two different constructive control schemes show the theoretical predictions. The methodology can be applied to design more robust quantum control systems.

Key words: quantum control; fidelity; quantum two-level system

1 引 言

量子力学系统控制问题的研究已经逐渐成为许多国家基础研究的重点之一, 人们希望利用宏观控制理论中的概念和方法结合微观量子世界的特性来控制量子系统^[1,2]。量子控制系统的应用非常广泛, 例如操纵原子或分子的量子状态^[3], 量子计算^[4]等。这一领域的研究在过去的十几年无论是在理论还是实验上都取得了很大的进步^[5,6], 提出了一系列控制量子系统的方法和理论, 主要有量子开环控制, 量子构造控制, 量子闭环学习控制和闭环反馈控制等^[7-10]。

任何量子控制系统在物理实现过程中都将不可避免地存在来自外部环境或者系统内部的干扰作用。为了减小这些干扰带来的不利影响, 研究并提高控制系统在各种干扰下的稳定性非常重要。

在研究经典系统的稳定性时, 通常考察初始状态受到扰动作用时, 系统恢复到平衡状态的能力。

但是在量子动力学中, 酉演化性质使量子态之间的范数不随系统演化改变。因此对量子控制系统无法通过初态的干扰作用研究其稳定性。本文提出使用量子保真度摄动分析量子控制系统的稳定性, 详细研究了静态干扰下二能级量子构造控制系统的保真度衰减。并对构造控制系统进行了仿真研究。

2 量子构造控制

尽管在量子控制系统应用中目标系统多种多样, 但是量子控制系统最终都等同于产生一个特定的酉演化算符。通过应用一系列的控制脉冲 $u(t)$, 被控制系统的酉演化算符 $U(t)$ 可以用双线性方程式 (1) 表示。

$$i\hbar\dot{U}(t) = (H_0 + \sum_k H_k u_k(t))U(t) \quad (1)$$

式中, H_0 为系统内部哈密顿量, 描述系统的自由演化; H_k 为表示控制作用的外部哈密顿量。

对系统酉演化算符 $U(t)$ 进行结构分解得到了

收稿日期: 2007-03-23; 收修定稿日期: 2007-04-05

作者简介: 叶 宾(1980-), 男, 河南南阳人, 博士, 主要研究方向为量子信息和量子控制等; 须文波(1946-), 男, 江苏无锡人, 教授, 博士生导师。

一些构造控制方法^[9-13]。构造控制方法的优势在于控制场的结构简单,也就是说,它只需要一些简单的控制脉冲,例如分段定常脉冲和高斯波包等。文献^[12]给出了一个把任意一个 $U \in \text{su}(2)$ 分解为简单算符积形式:

$$U = \prod_{k=1}^q \exp(a_k A + b_k B) \quad (2)$$

式中, $a_k > 0$; $|b_k| \leq C$; C 为预先定义的常量边界; A, B 为任意的 $2 \times 2_{\text{su}(2)}$ 矩阵,它们组成一对正交矩阵对。

此分解过程在许多量子控制问题中具有明确的物理意义。比如在使用分段定常脉冲控制一个二能级系统时, a_k 表示第 k 个控制脉冲的作用时间, b_k 为脉冲的脉区(Pulse area)。改变算符对 (A, B) 将得到不同的控制方案。

3 量子保真度

量子保真度分析通过扰动量子系统哈密顿函数,研究系统从同一初始状态演化的稳定性^[14]。对初态为 $|\Psi(0)\rangle$ 的量子系统,保真度被定义为

$$F(t) = |\langle \Psi_\delta(t) | \Psi(t) \rangle|^2 \quad (3)$$

式中, $|\Psi(t)\rangle$ 为未扰演化算符 $U_0(t)$ 下的未扰量子态; $|\Psi_\delta(t)\rangle$ 为系统受扰演化算符 $U_\delta(t)$ 下的量子态; δ 为干扰强度。

一个干扰强度为 δ 的受扰酉演化算符通常可以用厄米算符 $V(t)$ 表示为

$$U_\delta(t) = U_0(t) \exp(-iV(t)\delta/\hbar) \quad (4)$$

根据线性响应近似理论^[15],系统保真度可以表示为

$$F(t) = 1 - \frac{\delta^2}{2} \sum_{t, t'=1}^T \alpha(t, t') + \alpha(\delta^3) \quad (5)$$

式中, $\alpha(t, t')$ 是扰动算符的量子相关函数。

它具有如下形式:

$$\alpha(t, t') = \langle V(t)V(t') \rangle = \text{tr}(V(t)V(t'))/N \quad (6)$$

式中, N 为 Hilbert 空间的维数; $\langle \cdot \rangle$ 表示算符的期望值; t 为一个离散的整形变量,代表一些基本的单步演化,例如一个基本的量子门操作等。

在真实的物理情况下,量子控制系统总是存在着与外界环境的联系。即使系统能够完全与外界环境隔离,量子比特能级间隔的波动和量子比特之间的近距离静态相互作用等仍然会在量子计算机内部产生不可避免的静态干扰。对一个量子系统来说,随机噪声干扰 V_{random} 导致保真度呈指数下降,而静态干扰 V_{static} 引起的保真度衰减为高斯下降^[16],因此静态干扰比随机噪声干扰对系统稳定性的影响更大。本文只考虑二能级量子控制系统在静态干扰下

的稳定性。当干扰强度 δ 较小时,式(5)中的相关函数算符均值为

$$\begin{aligned} \alpha(t, t') &= \frac{1}{N} \text{tr}(V(t, t')V) = \\ &= \frac{1}{N} \text{tr}U(t, t')^2 \end{aligned} \quad (7)$$

因为相关函数算符 $\alpha(t, t')$ 的对角元素对每一个固定的 V 为静态量,所以系统保真度主要由相关函数算符的非对角线元素决定。从式(7)可以看出,当演化算符 $U(t)$ 的迹为 0 时,相关函数算符的均值最小,此时系统保真度最大。

4 二能级量子控制系统的保真度分析

二能级量子系统是一种比较简单易控的量子力学系统。它在量子计算和量子信息领域中经常作为量子比特的物理实现模型。考虑上节介绍的构造控制方法。任意一个 $\text{su}(2)$ 矩阵都可以分解为式(2)的形式,并且满足条件 $a_k > 0, |b_k| \leq C$ 。给定一个 2×2 的矩阵 $G, G = a_k A + b_k B$ 为式(2)中第 k 个因式的幂,计算可得:

$$\begin{aligned} \text{tr}(\exp(G)) &= \exp\left[\frac{1}{2}(g_{11} + g_{22} + (g_{11}^2 - 2g_{11}g_{22} + \right. \\ &\quad \left. g_{22}^2 + 4g_{12}g_{21})^2)\right] + \exp\left[\frac{1}{2}(g_{11} + g_{22} - \right. \\ &\quad \left. (g_{11}^2 - 2g_{11}g_{22} + g_{22}^2 + 4g_{12}g_{21})^2)\right] = \\ &= \exp[(g_{11}^2 + g_{12}g_{21})^2] + \\ &= \exp[-(g_{11}^2 + g_{12}g_{21})^2] \end{aligned} \quad (8)$$

式中, $g_{ij}, i, j = 1, 2$ 为矩阵 G 的元素。

因为 A, B 为 $\text{su}(2)$ 矩阵,所以它们的迹都为 0。因此式(8)中的最后一个等式成立。接下来使用算符 A 和 B 的元素来替换 G , 这样 $g_{11}^2 + g_{12}g_{21}$ 可以表示为 $-(a_k^2 + b_k^2) + a_k b_k (2a_{11}b_{11} + a_{21}b_{12} + a_{12}b_{21})$ 。因为 A, B 为正交对,所以:

$$2a_{11}b_{11} + a_{21}b_{12} + a_{12}b_{21} = \langle \lambda_A, \lambda_B \rangle = 0$$

式中 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 代表两个向量的内积, $|\lambda_A\rangle$ 和 $|\lambda_B\rangle$ 分别为把 A, B 表示成 Pauli 算符的线性组合时的系数组成的向量。

Pauli 算符定义为

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

把这些代入式(8)中,最终得到:

$$\begin{aligned} \text{tr}(\exp(G)) &= \exp[-(a_k^2 + b_k^2)^2] + \\ &= \exp[-(-(a_k^2 + b_k^2))^2] = \\ &= 2\cos(a_k^2 + b_k^2) \end{aligned} \quad (9)$$

式(9)的最后一个等式成立是因为 $-(a_k^2 + b_k^2)^2$ 是一个纯虚数。式中的 $(a_k^2 + b_k^2)^2$ 被称为第 k 个因式的径向坐标。从这个式子可以看出,当有

较多控制脉冲的径向坐标等于 $\pi/2$ 时，控制系统取得较大的保真度。

以下两种酉分解方法被用来仿真构造控制系统，并将其仿真结果和理论分析进行比较。

① $A = i\sigma_y, B = i\sigma_x$ 。② $A = i\sigma_z, B = i\sigma_y$ 。这两种分解下的 (a_k, b_k) 比较见表 1。

表 1 两种酉分解下的 (a_k, b_k)

Table 1 (a_k, b_k) for the two cases of factorizations

(a_k, b_k)	$(i\sigma_y, i\sigma_x)$	$(i\sigma_z, i\sigma_y), \alpha \neq \pi/2$
(a_1, b_1)	$(-\frac{\pi}{2} \sin\theta_1, \frac{\pi}{2} \cos\theta_1)$	$(\frac{\epsilon + \mu}{2} - \frac{\pi}{4}, \rho)$
(a_2, b_2)	$(-\frac{\pi}{2} \sin\theta_2, \frac{\pi}{2} \cos\theta_2)$	$(\frac{\pi}{2} \cos\alpha, \frac{\pi}{2} \sin\alpha)$
(a_3, b_3)	(α, ρ)	$(\frac{3\pi}{2}, \rho)$
(a_4, b_4)	$(-\frac{\pi}{2} \sin\theta_3, \frac{\pi}{2} \cos\theta_3)$	$(\frac{\epsilon - \mu}{2} + \frac{\pi}{4}, \rho)$
(a_5, b_5)	$(-\frac{\pi}{2} \sin\theta_4, \frac{\pi}{2} \cos\theta_4)$	N.A.

其中的参数 ϵ, μ, α 为 $su(2)$ 矩阵 S 的 Cayley-Klein 参数：

$$S = \begin{pmatrix} \exp(i\epsilon) \cos\alpha & \exp(i\mu) \sin\alpha \\ \exp[i(\pi - \mu)] \sin\alpha & \exp(-i\epsilon) \cos\alpha \end{pmatrix}$$

从表 1 中可以看出当 $(A = i\sigma_y, B = i\sigma_x)$ 时，酉演化算符有 5 个因式组成，其中 4 个的径向坐标等于 $\pi/2$ 。而当 $(A = i\sigma_z, B = i\sigma_y)$ 时，只有一个因式的径向坐标为 $\pi/2$ 。同时对 (a_k, b_k) 加以扰动得到系统的受扰酉演化。本文仿真了两个目标 $su(2)$ 演化算符。其中一个演化算符把二能级量子系统从它的基态驱动到等幅值的叠加态，另一个算符对一个二能级量子态进行翻转操作。这种翻转操作在量子计算和量子信息领域为量子非门的物理模型。仿真结果如图 1 所示。

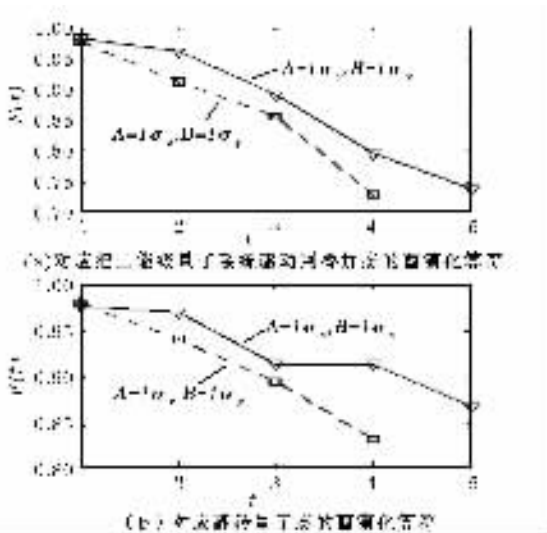


图 1 保真度的衰减曲线
Fig.1 Fidelity decay curve

从仿真结果可以看出，尽管控制过程结束时两种情况下的保真度差别不大，但是在控制过程中 $(A = i\sigma_y, B = i\sigma_x)$ 时的保真度衰减比 $(A = i\sigma_z, B = i\sigma_y)$ 时的慢。这与理论分析结论是一致的。

5 结 语

本文利用量子动力学中的线性响应近似理论，研究了量子构造控制系统的保真度衰减和控制系统的物理参数之间的关系。提出了一种分析量子系统构造控制稳定性的方法。当存在静态干扰时，通过适当调整控制脉冲的径向坐标可以有效地提高控制系统的保真度。这种使用保真度分析系统稳定性的方法为设计高稳定性量子控制系统提供了一种有效方法。数值仿真结果证明了其理论分析的正确性。

参考文献 (References) :

[1] 丛爽, 郑毅松, 姬北辰, 等. 量子系统控制发展综述 [J]. 量子电子学报, 2003, 20(1):1-9. (Cong Shuang, Zheng Yisong, Ji Beichen et al. Survey of progress in quantum control system [J]. Chinese Journal of Quantum Electronics, 2003, 20(1):1-9.)

[2] 程代展. 量子控制 - 一个全新的学科领域 [J]. 控制与决策, 2002, 17(5):513-516. (Cheng Daizhan. Quantum control-a new academic field [J]. Control and Decision, 2002, 17(5):513-516.)

[3] Khaneja N, Glaser S J. Cartan decomposition of $SU(2)$ and control of spin systems [J]. Chemical Physics, 2001, 267(1):11-23.

[4] Raedt H D, Michielsen M. Quantum spin dynamics as a model for quantum computer operation [J]. The European Physical Journal B, 2002, 27(1):15-28.

[5] Rabitz H, de Vivie-Riedle R, Motzkus M, et al. Whither the future of controlling quantum phenomena? [J]. Science, 2000, 288(5):824-828.

[6] Turinici G, Rabitz H. Quantum wavefunction controllability [J]. Chemical Physics, 2001, 267(1):1-9.

[7] Doherty A C, Habib S. Quantum feedback control and classical control theory [J]. Physical Review A, 2000, 62(1):12105-12118.

[8] Mabuchi H, Khaneja N. Principles and applications of control in quantum systems [J]. International Journal of Robust and Nonlinear Control, 2005, 15(1):647-667.

[9] Schirmer S G, Greentree A D. Constructive control of quantum systems using factorization of unitary operators [J]. Journal of Physics A: Mathematical and General, 2002, 35(9):8315-8339.

[10] D'Alessandro D. Controllability of one spin and two interacting spins [J]. Mathematics of Control, Signals, and Systems, 2003, 16(1):1-25.

[11] Ramakrishna V, Ober R. Explicit generation of unitary transformations in a single atom or molecule [J]. Physical Review A, 2000, 61(2):32106-32122.

[12] Ramakrishna V, Flores K L. Quantum control by decompositions of $SU(2)$ [J]. Physics Review A, 2000, 62(10):53409-53420.

[13] Ramakrishna V. Control of molecular systems with very few phases [J]. Chemical Physics, 2001, 267(1):25-32.

[14] Peres A. Stability of quantum motion in chaotic and regular systems [J]. Physical Review A, 1984, 30(4):1610-1615.

[15] Prosen T, Znidaric M. Stability of quantum motion and correlation decay [J]. Journal of Physics A: Mathematical and General, 2002, 35(2):1455-1481.

[16] Prosen T, Znidaric M. Can quantum chaos enhance the stability of quantum computation [J]. Journal of Physics A: Mathematical and General, 2001, 34(11):681-687.