2007年5月　　控　制　工　程　　May 2007
第14卷第3期　　Control Engineering of China　　Vol.14,No.3

文章编号:1671-7848(2007)03-0281-04

不确定时滞系统的保性能控制

陈泽强，徐小增，胥布工，侯晓丽
(华南理工大学 自动化科学与工程学院，广东 广州　510640)

摘　　要：基于时滞系统的一个新的指数稳定性定理，考虑了时不变不确定时滞系统的保性能控制问题。利用一种新的分析技术，通过解两个 Riccati 不等式和一个线性矩阵不等式得一保性能控制器，该控制器可保证闭环系统指数稳定且使系统满足一定的性能指标。与一般的不确定时滞系统保性能控制不同，所得的性能指标的上界中含有参数，可通过调整参数值的大小来使性能指标达到最优。所得 Riccati 不等式中含有时滞，因此该判据是时滞相关的。数值算例证明了该方法的适用性。
关　键　词：不确定；时滞；保性能控制
中图分类号：TP 27　　　文献标识码：A

Guaranteed Cost Control for Uncertain Time-delay Systems

CHEN Ze-qiang, *XU Xiao-zeng*, *XU Bu-gong*, *HOU Xiao-li*
(College of Automatic Science & Engineering, South China University of Technology, Guangzhou 510640, China)

Abstract: Based on a new exponential stability theorem of time-delay systems, the problem of guaranteed cost control for uncertain time-delay systems is considered. The controller is obtained by solving two Riccati inequalities and a linear matrix inequality, which makes the closed-loop system exponentially stable and guarantees an specific level of performance for any admissible value of the uncertainty. A parameter exists in upper bound of performance, which can be adjusted to obtain the optimal performance. This criterion is delay-dependent. An example shows the applicability of this method .
Key words: uncertainty; time-delay; guaranteed cost control

1　引　言

不确定系统的保性能控制首先在文献[1]中被提出，近年来，不确定时滞系统的保性能控制受到了广泛关注。时滞系统的结果一般分为两类：时滞相关和时滞无关。文献[2~4]考虑了连续时间不确定时滞系统的保性能控制，文献[5]考虑了离散时间不确定时滞系统的保性能控制。对于状态反馈保性能控制，可参看文献[2~5]，对于输出反馈保性能控制，可参看文献[6],这些都是时滞无关的结果。对于时滞相关的结果，文献[7,8]给出了连续时间不确定时滞系统的状态反馈保性能控制，文献[9]给出了离散时间不确定时滞系统的状态反馈保性能控制，对输出反馈情况，可参看文献[10]。

最近，Xu 在文献[11]中给出了时滞系统的一个新的指数稳定性定理。该定理不要求 Lyapunov 函数的导数一直负定，只要求当满足一定条件时，$\dot{V}$ 负定，其他情况可正可负。基于文献[11]中的这种新的思想，结合保性能控制方法，考虑了不确定时滞系统保性能控制问题，得到了新的判据。

2　系统描述及准备知识

考虑不确定时滞系统：

$$\begin{cases}\dot{x}(t)=(A+\Delta A)x(t)+(A_1+\Delta A_1)x(t-d)+\\ \qquad Bu(t)\\ x(t)=\varphi(t),t\in[-d,0]\end{cases}\tag{1}$$

式中，d 为状态时滞；$x(t)\in\mathbf{R}^n$ 为状态；$u(t)\in\mathbf{R}^m$ 为控制输入；A，A_1，B 为适当维数的常数矩阵；ΔA，ΔA_1 为适当维数的不确定矩阵函数，表示系统模型中的时变参量不确定性。

假定 ΔA，ΔA_1 是模有界的且具有下列形式：

$$\Delta A=D_0F_0(t)E_0,\Delta A_1=D_1F_1(t)E_1$$

式中,D_0,D_1,E_0,E_1 为适当维数的常数矩阵,反映

收稿日期：2006-05-16；　收修定稿日期：2006-06-02
基金项目：国家自然科学基金资助项目(60474047)；国家自然科学基金重点资助项目(60334010)；高等学校博士学科点专项基金资助项目(20030561013)
作者简介：陈泽强(1981-)，男，福建龙岩人，研究生，主要研究方向为电机控制、不确定系统的鲁棒控制等；胥布工(1956-)，男，江苏盐城人，教授，博士生导师。

了不确定性的结构信息；$F_0(t)$，$F_1(t)$为未知的矩阵函数，且满足 $F_i^{\mathrm{T}}(t)F_i(t)\leqslant \boldsymbol{I}$，$i=0,1$。

对系统式(1)，定义二次型性能指标：

$$J=\int_0^{\infty}[\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{R}\boldsymbol{u}(t)]\mathrm{d}t \tag{2a}$$

式中，Q 和 R 为给定的正定对称加权矩阵。

定义 1 考虑不确定系统式(1)和性能指标式(2)，如果存在控制律 $u^*(t)$和正数 J^* 使得对所有容许的不确定性，闭环系统是渐近稳定的且闭环性能指标值满足 $J\leqslant J^*$，则称 J^* 为不确定系统式(1)的一个性能上界，称 $u^*(t)$为系统式(1)的一个保性能控制律。

考虑一般时滞动态系统：

$$\dot{x}(t)=f(t,x_t) \tag{2b}$$

式中“·”为右导数。

C_n 为从 $[-\tau\quad 0]$ 到 $\mathbf{R}^n$ 的连续函数所构成的巴拿赫空间，$\tau>0$ 为一常数，定义：

$$\Omega=\{\boldsymbol{\varphi}\in C_n \,\|\boldsymbol{\varphi}\|_{\tau}\leqslant\rho,\rho>0\}$$

式中，$\|\boldsymbol{\varphi}\|_{\tau}=\sup\limits_{-\tau\leqslant\theta\leqslant0}\|\boldsymbol{\varphi}(\theta)\|$，$f:R\times\Omega\to\mathbf{R}^n$ 映射 C_n 中有界集到 $\mathbf{R}^n$ 中有界集。

引理 1 令 $V(x)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{P}>0\in\mathbf{R}^{n\times n}$，假定存在一个正数 $\Pi\geqslant1$，使得：

$$\sup\nolimits_{s\in R}\{y^{\mathrm{T}}(0)\boldsymbol{P}f(s,y_t)\}\leqslant\Pi V(y_t(0)),\forall\, y_t\in\Omega$$

则系统式(2b)的平衡点 $x_e\equiv0$ 是以衰减度 $\alpha>0\in\mathbf{R}_+$ 指数稳定的，若对从任意$(t_0,x_{t0})\in\mathbf{R}\times\Omega$ 出发的解$\boldsymbol{x}(t_0,x_{t0})(t)$，当且仅当 $V(x_t(0))=\Pi V_{t_0}\exp(-2\alpha(t-t_0))$，$t\geqslant t_0\in\mathbf{R}$，下式成立：

$$\dot{V}(x_t(0))\leqslant-2\alpha V(x_t(0)),\forall\, x_t\in S(\boldsymbol{L}_t(\theta))$$

式中，$\overline{V}_{t_0}=\sup_{\theta\in[-\tau,0]}\{V(x_{t_0}(\theta))\}$。

$S(\boldsymbol{L}_t(\theta))$定义为

$$S(L_t(\theta))=\left\{y_t\in C_n\left|\begin{array}{l}L_t(\theta)=L(t+\theta)=\\ \qquad\Pi\overline{V}_{t0}\exp(-2\alpha(t+\theta-t_0))\\ V(y_t(0))=L_t(0)\\ V(y_t(\theta))=V(y_t(0))\times\\ \qquad\cos^2(\omega\theta)\exp(-2\alpha\theta)\\ \theta\in[-\tau,0],\omega\in\mathbf{R},t\geqslant t_0\in\mathbf{R}\end{array}\right.\right\}$$

3 主要结果

先考虑没有不确定性的时滞系统：

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{x}(t-d)+\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t)\\ \boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{\varphi}(t),t\in[-d,0]\end{cases} \tag{3}$$

定理 1 考虑时滞系统式(3)和性能指标式(2a)，给定正数 α，若存在正定矩阵 P 及正数 ε 使得：

$$\begin{cases}\boldsymbol{PA}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}+1/\varepsilon\boldsymbol{PA}_1\boldsymbol{A}_1{}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}+\varepsilon\exp(2\alpha d)+2\alpha\boldsymbol{P}+\boldsymbol{Q}-\\ \qquad\boldsymbol{PBR}^{-1}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}<0\\ \boldsymbol{Q}-\boldsymbol{PDR}^{-1}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}>0\\ \boldsymbol{PA}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}+\boldsymbol{PA}_1\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{A}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}+\boldsymbol{Q}+\boldsymbol{R}-\boldsymbol{PBR}^{-1}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\leqslant0\end{cases} \tag{4}$$

设计控制律 $\boldsymbol{u}(t)=-\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}(t)$，则在此控制律作用下，闭环系统以指定衰减度 α 指数稳定，且性能指标：

$$J\leqslant\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(0)\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}(0)+\int_{-d}^{0}\boldsymbol{\varphi}^{\mathrm{T}}(s)\boldsymbol{R}\boldsymbol{\varphi}(s)\mathrm{d}s$$

证明 令 $V(\boldsymbol{x}(t))=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}(t)$，则：

$$\dot{V}(\boldsymbol{x}(t))=2\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{PA}\boldsymbol{x}(t)+2\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{PA}_1\boldsymbol{x}(t-d)+2\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{PB}\boldsymbol{u}(t)$$

根据 Xu 在文献[12]中的分析技术及引理 1，在 $\boldsymbol{x}_t\in S(\boldsymbol{L}_t(\theta))$这一瞬时时刻 t，有：

$$\begin{cases}V(y_s(0_k))=V(y_s(0))=V(x_s(0))\\ y_s(-\tau_k(s))=y_s(0_k)|\cos(\xi_k\tau_k(s))|\exp(\alpha\tau_k(s))=\\ \qquad y_s(0_k)|\cos(\omega_k\tau_{kM})|\exp(\alpha\tau_{kM})\\ V(y_s(-\tau_k(s)))=V(y_s(0))\cos^2(\xi_k\tau_k(s))\exp(2\alpha\tau_k(s))=\\ \qquad V(y_s(0))\cos^2(\omega_k\tau_{kM})\exp(2\alpha\tau_{kM})\end{cases}$$

其相应关系可如图 1 所示。

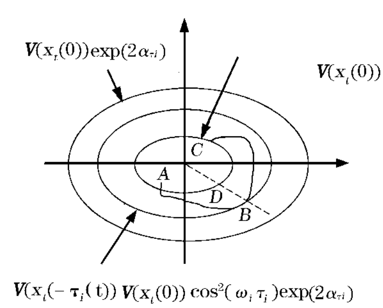

图 1 瞬时时刻状态关系

Fig.1 Relation of state at instantaneous

图 1 中，A 点为初始时刻的状态 $x_{t_0}(0)$；C 点为当 $\boldsymbol{x}_t\in S(\boldsymbol{L}_t(\theta))$这一瞬时时刻 t 的状态 $\boldsymbol{x}_t(0)$；B 为相对于时刻 t 滞后 $\tau_i(t)$时的状态 $\boldsymbol{x}_t(-\tau(t))$；$D$ 为与 C 处在同一椭球上且与坐标原点及点 B 处在同一直线上的与 B 同方向的向量函数 $\boldsymbol{y}_t(0_k)$。

因此，当 $x_t\in S(\boldsymbol{L}_t(\theta))$时，有：

$$\begin{aligned}&2\boldsymbol{x}_t^{\mathrm{T}}(0)\boldsymbol{PA}\boldsymbol{x}_t(0)+2\boldsymbol{x}_t^{\mathrm{T}}(0)\boldsymbol{PA}_1\boldsymbol{x}_t(-d)=\\ &2\boldsymbol{x}_t^{\mathrm{T}}(0)\boldsymbol{PA}_0\boldsymbol{x}_t(0)+2\exp(\alpha d)|\cos(\xi d)|\boldsymbol{x}_t^{\mathrm{T}}(0)\boldsymbol{PA}_1\times\\ &\boldsymbol{x}_t(0_k)\leqslant\boldsymbol{x}_t^{\mathrm{T}}(0)(\boldsymbol{PA}_0+\boldsymbol{A}_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P})\boldsymbol{x}_t(0)+\\ &\exp(\alpha d_i)|\boldsymbol{x}_t^{\mathrm{T}}(0)(\boldsymbol{PA}_1\exp(\mathrm{j}wd)+\\ &\exp(-\mathrm{j}wd)\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{P})\boldsymbol{x}_t(0)|\leqslant\\ &\max_{y^{\mathrm{T}}Py=V(x_s(0))}\left\{\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix}\boldsymbol{PA}_0+\boldsymbol{A}_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\\ \pm\exp(\alpha d)(\boldsymbol{PA}_1+\boldsymbol{A}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P})\end{pmatrix}\boldsymbol{y}\right\},\boldsymbol{y}\in\mathbf{R}^n\end{aligned}$$

故：

$$\dot{V}\boldsymbol{x}(t))\leqslant\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{PA}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P})\boldsymbol{x}+1/\varepsilon\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{PA}_1\boldsymbol{A}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\varepsilon\exp(2\alpha d)\boldsymbol{x}+2\boldsymbol{x}\boldsymbol{PB}\boldsymbol{u}(t)$$

把控制律代入，若式(4)中前两个不等式成立，则可得 $\dot V(x(t)) < -2\alpha V(x(t))$。根据定理 1，可知闭环系统是以衰减度 α 指数稳定的。

当 $x_t \notin S(L_t(\theta))$ 时，有：

$$\dot V(x(t)) = 2x^{\mathrm T}PAx + 2x^{\mathrm T}PA_1x(t-d) + 2x^{\mathrm T}PBu(t) \leqslant x^{\mathrm T}(PA + A^{\mathrm T}P)x + x^{\mathrm T}PA_1R^{-1}A_1^{\mathrm T}Px + x^{\mathrm T}(t-d)Rx(t-d) - 2x^{\mathrm T}PBR^{-1}B^{\mathrm T}Px$$

，故：

$$\dot V(x(t)) + x^{\mathrm T}Qx + u^{\mathrm T}Ru \leqslant x^{\mathrm T}(PA + A^{\mathrm T}P)x + x^{\mathrm T}PA_1R^{-1}A_1^{\mathrm T}Px - x^{\mathrm T}PBR^{-1}B^{\mathrm T}Px + x^{\mathrm T}Qx + x(t-d)Rx(t-d)$$

，若：

$$PA + A^{\mathrm T}P + PA_1R^{-1}A_1^{\mathrm T}P + Q - PBR^{-1}B^{\mathrm T}P \leqslant -R$$

即式(4)中第三个不等式成立，则：

$$\dot V(x(t)) + x^{\mathrm T}Qx + u^{\mathrm T}Ru \leqslant x^{\mathrm T}(t-d)Rx(t-d) - x^{\mathrm T}(t)Rx(t) \tag{5}$$

令：$V_1 = V + \int_{-d}^{0} x^{\mathrm T}(t+s)Rx(t+s)\mathrm ds$，则：

$$\dot V_1 = \dot V + x^{\mathrm T}(t)Rx(t) - x^{\mathrm T}(t-d)Rx(t-d)$$

故式(5)可化为

$$\dot V_1(x(t)) + x^{\mathrm T}Qx + u^{\mathrm T}Ru \leqslant 0$$

由式(4)中第一个不等式知，使得 $x_t \in S(L_t(\theta))$ 的时刻 t 为有限个或至多可列个，由 V_1 对时间 t 的连续性可得：

$$J = \int_0^{\infty}[x^{\mathrm T}(t)Qx(t) + u^{\mathrm T}(t)Ru(t)]\mathrm dt \leqslant -\int_0^{\infty}\dot V_1(x(t))\mathrm dt \leqslant V_1(x(0)) = x^{\mathrm T}(0)Px(0) + \int_{-d}^{0}\varphi^{\mathrm T}(s)R\varphi(s)\mathrm ds$$

即结论成立。

注　在一般的保性能控制文章中，因为要求 $\dot V<0$，故式(5)的左边都要求小于等于 0。而引理 1 中只有当 $x_t \in S(L_t(\theta))$ 时，要求 $\dot V \leqslant -2\alpha V < 0$，其他时候 $\dot V$ 可正可负。因此，与之相应的在式(5)中不要求左边 $\leqslant 0$，而让其小于等于右边一个可正可负的数。这也是本文的一个创新之处。

定理 2　考虑不确定时滞系统式(1)和性能指标式(2a)，给定正数 α，若存在正定矩阵 P 及正数 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \delta_1, \delta_2$ 使得：

$$\begin{cases} PA + A^{\mathrm T}P + 1/\varepsilon_1 PA_1A_1^{\mathrm T}P + \varepsilon_1\exp(2\alpha d) + \\ \quad 1/\varepsilon_2 PD_0D_0^{\mathrm T}P + \varepsilon_2E_0^{\mathrm T}E_0 + 1/\varepsilon_3PD_1D_1^{\mathrm T}P + \\ \quad \varepsilon_3\exp(2\alpha d)E_1^{\mathrm T}E_1 + 2\alpha P + Q - PBR^{-1}B^{\mathrm T}P < 0 \\ Q - PBR^{-1}B^{\mathrm T}P > 0 \\ PA + A^{\mathrm T}P + PA_1R^{-1}A_1^{\mathrm T}P + 1/\delta_1PD_0D_0^{\mathrm T}P + \\ \quad \delta_1E_0^{\mathrm T}E_0 + 1/\delta_2PD_1D_1^{\mathrm T}P + \delta_2E_1^{\mathrm T}E_1 + Q + \\ \quad R - PBR^{-1}B^{\mathrm T}P \leqslant 0 \end{cases} \tag{6}$$

设计控制律 $u(t) = -R^{-1}B^{\mathrm T}Px(t)$，则在此控制律作用下，闭环系统以指定衰减度 α 指数稳定，且性能指标：

$$J \leqslant x^{\mathrm T}(0)Px(0) + \int_{-d}^{0}\varphi^{\mathrm T}(s)(R + \delta_2E_1^{\mathrm T}E_1)\varphi(s)\mathrm ds$$

证明　令 $V(x(t)) = x^{\mathrm T}(t)Px(t)$，当 $x_t \in S(L_t(\theta))$ 时，仍利用 Xu 在文献[12]中的分析技巧，当式(6)中前两个不等式成立时，由引理 1 可得闭环系统是以衰减度 α 指数稳定的。令：

$$V_1 = V + \int_{-d}^{0} x^{\mathrm T}(t+s)(R + \delta_2E_1^{\mathrm T}E_1)x(t+s)\mathrm ds$$

若式(6)中第三个不等式成立，与前面的证明类似，可得性能指标：

$$J \leqslant x^{\mathrm T}(0)Px(0) + \int_{-d}^{0}\varphi^{\mathrm T}(s)(R + \delta_2E_1^{\mathrm T}E_1)\varphi(s)\mathrm ds$$

4　数值算例

考虑系统：

$$\dot x(t) = \begin{pmatrix} -5+q(t) & 1+q(t) \\ 1 & -4 \end{pmatrix}x(t) + \begin{pmatrix} s(t) & s(t) \\ -0.1 & -0.1 \end{pmatrix}x(t-1) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}u(t)$$

$$x_1(t) = 0.5\exp(t/2),$$

$$x_2(t) = \exp(-t/2), t \in (-1, 0)$$

$$Q = I_{2\times 2}, R = 1$$

则：$A = \begin{pmatrix} -5 & 1 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$；$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -0.1 & -0.1 \end{pmatrix}$；

$B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$；$D_0 = D_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$；$E_0 = E_1 = (1 \quad 1)$；

$\| q(t) \| \leqslant 1$；$\| s(t) \| \leqslant 1$

取：$\varepsilon_1 = 0.1, \varepsilon_2 = 1.35, \varepsilon_3 = 0.4, \delta_1 = 0.5, \delta_2 = 0.5$，可解得：$P = \begin{pmatrix} 1.347\,0 & 0 \\ 0 & 0.449\,0 \end{pmatrix}$，故性能指标：

$$J \leqslant 3.845\,1$$

注：由于要求正定矩阵 P 须同时满足两个 Riccati 不等式和一个线性矩阵不等式，因此一般要求状态矩阵 A 为稳定矩阵，这样才能保证正定矩阵的存在性。

5　结　语

基于时滞系统的一个新的指数稳定性定理，本文考虑了时变不确定时滞系统的保性能控制问题。通过解两个 Riccati 不等式和一个线性矩阵不等式得一控制器，该控制器可保证闭环系统指数稳定且使系统满足一定的性能指标。且该判据是时滞依赖的。与一般的保性能控制不同，式(5)中不要求左边 $\leqslant 0$，而让其小于等于右边一个可正可负的数。这是本文的创新之处，也为保性能控制器设计提供了一种新的思路。

(下转第 293 页)