籽粒在摘脱装置内运动轨迹的理论分析[3]

蒋恩臣① 蒋亦元
(东北农业大学)

摘 要: 建立了籽粒自由运动微分方程式, 对籽粒与外壳的碰撞过程进行了动力学分析, 从理论上建立起结构参数和运动参数与籽粒运动轨迹之间的联系。

关键词: 摘脱装置; 籽粒; 轨迹; 碰撞

1 微分方程的建立

在进行脱出物的运动分析时, 作以下假设: 1) 假设籽粒为球形物体; 2) 不考虑脱出物间的相互影响; 3) 气流对籽粒的作用力按公式 $P = m k_0 v^2$ 计算, 其中 m 为脱出物质量, v 为 — 气流相对于脱出物的速度, 即 $\vec{v} = \vec{u} - \vec{w}$ ($\vec{u}$ 和 $\vec{w}$ 分别为气流和脱出物的速度), k_0 — 漂浮系数。

在运动过程中, 作用于物体上的力有重力 mg, 方向向下, 和气流作用力 P, 方向与气流相对速度 $\vec{v}$ 的方向相同。现将籽粒放在极坐标中进行分析求解。如图1所示。设以 α 表示极角, r 表示极径, $\vec{\alpha}_0$ 和 $\vec{r}_0$ 表示沿半径和旋转方向的单位矢量, β 为 $\vec{w}$ 与极径 $\vec{r}$ 之间的夹角, φ 为气流速度方向与 $\vec{r}$ 间的夹角, λ 为相对速度 $\vec{v}$ 与 $\vec{r}$ 之间的夹角。

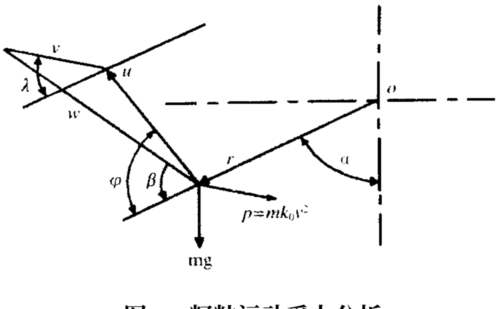

图1 籽粒运动受力分析

Fig. 1 Analysis of the forces acting on grain

在极坐标系中加速度的表达式为

$$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\alpha}^2)\vec{r}_0 + (r\ddot{\alpha} + 2\dot{r}\dot{\alpha})\vec{\alpha}_0 \quad (1)$$

将作用力向 $\vec{r}_0$ 和 $\vec{\alpha}_0$ 两方向上投影得

$$\ddot{r} - r\dot{\alpha}^2 = g\cos\alpha - k_0 v^2\cos\lambda$$

$$r\ddot{\alpha} + 2\dot{r}\dot{\alpha} = -g\sin\alpha - k_0 v^2\sin\lambda$$

上式可以分解为

$$\ddot{r} - r\dot{\alpha}^2 = g\cos\alpha - k_0 v v\cos\lambda \quad (2)$$

$$r\ddot{\alpha} + 2\dot{r}\dot{\alpha} = -g\sin\alpha - k_0 v v_1\sin\lambda \quad (3)$$

如图所示:

$$v\cos\lambda = w\cos\beta - u\cos\varphi = \dot{r} - u\cos\varphi \quad (4)$$

$$v\sin\lambda = w\sin\beta - u\sin\varphi = r\dot{\alpha} - u\sin\varphi \quad (5)$$

由三角关系可得

$$v^2 = w^2 + u^2 - 2wu\cos(\varphi - \beta)$$
$$= w^2 + u^2 - 2wu(\cos\varphi\cos\beta + \sin\varphi\sin\beta)$$

因为 $w\cos\beta = \dot{r}$, $w\sin\beta = r\dot{\alpha}$, $w = \sqrt{\dot{r}^2 + (r\dot{\alpha})^2}$

所以有

$$v^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\alpha}^2 + u^2 - 2u(\dot{r}\cos\varphi + r\dot{\alpha}\sin\varphi)$$

$$v = \sqrt{\dot{r}^2 + r^2\dot{\alpha}^2 + u^2 - 2u(\dot{r}\cos\varphi + r\dot{\alpha}\sin\varphi)} \quad (6)$$

将(4)、(5)和(6)式分别代入(2)和(3)式得

$$\ddot{r} = r\dot{\alpha}^2 + g\cos\alpha - k_0 \times \sqrt{\dot{r}^2 + (r\dot{\alpha})^2 + u^2 - 2u(\dot{r}\cos\varphi + r\dot{\alpha}\sin\varphi)}\,(\dot{r} - u\cos\varphi) \quad (7)$$

$$\ddot{\alpha} = \frac{1}{r}\left[-2\dot{r}\dot{\alpha} - g\sin\alpha - k_0 \times \sqrt{\dot{r}^2 + (r\dot{\alpha})^2 + u^2 - 2u(\dot{r}\cos\varphi + r\dot{\alpha}\sin\varphi)}\,(r\dot{\alpha} - u\sin\varphi)\right] \quad (8)$$

这就是运动轨迹微分方程式。此方程为非线性的, 非常数的, 一般形式的二阶常微分方程组, 很难获得其运动方程的精确解, 只能采用数值解法进行求解计算, 对此微分方程可做如下变换:

令 $y_1 = r$; $y_2 = \dot{r}$; $y_3 = \alpha$; $y_4 = \dot{\alpha}$

则方程(7)和(8)变为 $y_1' = y_2$ (9)

$$y_2' = y_1 y_4^2 + g\cos y_3 - k_0 \times \sqrt{u^2 + y_2^2 + y_1^2 y_4^2 - 2u(y_2\cos\varphi + y_1 y_4\sin\varphi)}\,(y_2 - u\cos\varphi) \quad (10)$$

$$y_3' = y_4 \quad (11)$$

收稿日期: 1999-11-05
3 国家自然科学基金资助项目(59605011)
①蒋恩臣, 博士, 副教授, 哈尔滨市香坊区东北农业大学工程学院, 150030

$$y_4' = \frac{1}{y_1}\Big[2y_2 \cdot y_4 - g\sin y_3 - k_0\sqrt{u^2 + y_2^2 + y_1 y_4^2 - 2u(y_2\cos U + y_1 y_4 \sin U)}\,(y_1 y_4 - u\sin U)\Big] \qquad (12)$$

方程组(9)～(12)已变为一阶微分方程组, 可以用龙格—库塔法(Runge2kutta)求解[2]。

上述微分方程组反映了脱出物仅在气流作用下自由运动的情况, 没反映护罩及输送管路的影响。实际上, 脱出物在运动过程中还将与护罩、输送管路发生碰撞, 故必须考虑护罩和输送管路的形状。

2 护罩及输送管路的极坐标方程式

护罩及输送管路的形状如图 2 所示, 其中护罩为渐扩形, 并通过一圆弧过渡到输送管路的上板。输送管路的上、下板为 2 条平行的直线。

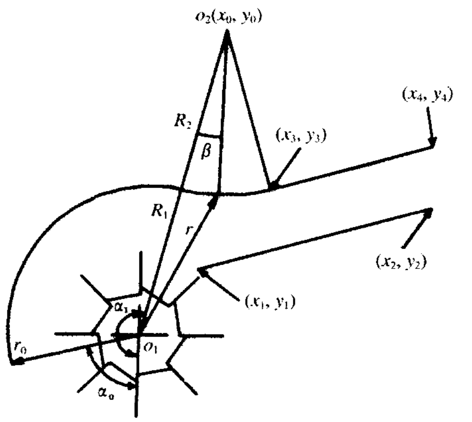

图 2 护罩及输送管路的结构

Fig. 2 The structures of the hood and the suction conduit

2.1 护罩的数学方程式

护罩的形状为渐扩形, 其数学表达式为

$$r = r_0 + a(A - A_0) \qquad (A \le A_1) \qquad (13)$$

式中 r_0—起始半径, A_0—起始角, a—系数, A_1—护罩段最大极角。

2.2 过渡圆弧的数学方程式

过渡圆弧是一段以(x_0, y_0)为圆心, 以R_2为半径的圆弧, 在极坐标下有下列关系式成立

$$r\sin(A - A_1) = R_2\sin B$$

$$r\cos(A - A_1) = (R_1 + R_2) - R_2\cos B$$

两式两边平方、相加得

$$r^2 - 2R\,r\cos(A - A_1) + 2R_1R_2 + R_1^2 = 0$$

其中$R = R_1 + R_2$

该方程的解为

$$r = R\cos(A - A_1) - \sqrt{R^2\cos^2(A - A_1) - (R_1^2 + 2R_1R_2)} \qquad (A_1 < A \le A_2) \qquad (14)$$

其中 A_1 和 A_2 分别为过渡圆弧始末位置对应的极角。

2.3 输送管路上下板数学方程式

输送管路上下底板为相互平行的直线, 在极坐标系下的数学方程式可分别为

$$r = \frac{(y_1 - kx_1)}{(k\sin A - \cos A)} \qquad (15)$$

$$r = \frac{(y_3 - kx_3)}{(k\sin A - \cos A)} \qquad (16)$$

式中 x_3、y_3 和 x_1、y_1—— 分别为上下板前端点坐标; k—— 直线斜率。

3 脱出物与外壳碰撞过程分析

如图 3 所示, 设外壳的轨迹为M, 其极坐标方程统一表示为 $r = r(A)$

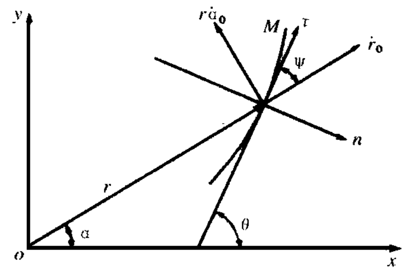

图 3 籽粒与外壳碰撞过程分析

Fig. 3 Analysis of the dynamics of the grain impact against the hood

利用直角坐标与极坐标的关系 $x = r\cos A$, $y = r\sin A$则方程组 $x = r(A)\cos A$, $y = r(A)\sin A$, 变为参数方程, 其中参数为极角 A, 切线的斜率为

$$y' = \frac{dy}{dA} \div \frac{dx}{dA} = \frac{r'(A)\sin A + r(A)\cos A}{r'(A)\cos A - r(A)\sin A}$$

$$y' = \frac{r'(A)\,\mathrm{tg}A + r(A)}{r'(A) - r(A)\,\mathrm{tg}A} \qquad (17)$$

为了确定籽粒与壁面相碰撞后的速度, 现将碰撞前一刻的瞬时速度 $\dot{r}_0$ 和 $r \cdot \dot{A}$ 向 S 和 n 方向上投影:

$$v_{S0} = \dot{r}_0\cos W + r\dot{A}\sin W \qquad v_{n0} = \dot{r}_0\sin W - r\dot{A}\cos W$$

式中 W—— 为切线与极径 r 之间的夹角; n—— 曲线在该点处的法线方向, 向外为正; S—— 切线方向。注脚"0"表示碰撞前速度。

碰撞后, v_S 将保持不变, 而 v_n 将发生方向变化, 以 $k \cdot v_{n_0}$ 的速度沿相反的方向弹回, 其中 k 为弹性恢复系数, 碰撞后的速度为

$$v_S = v_{S0} = \dot r_0 \cos W + r\dot A \sin W$$

$$v_n = -k v_{n0} = k(r\dot A \cos W - \dot r_0 \sin W)$$

再将 v_S、v_n 变回到 $\dot r$ 和 $\dot A$ 方向上, 则有

$$\begin{aligned}
\dot r &= v_r = v_S \cos W + v_n \sin W \\
&= (\dot r_0 \cos W + r\dot A \sin W)\cos W + k(r\dot A \cos W - \dot r_0 \sin W)\sin W \\
&= \dot r_0(\cos^2 W - k\sin^2 W) + r\dot A \sin W \cos W(1+k)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
r\dot A &= -v_n \cos W + v_S \sin W \\
&= -k(r\dot A \cos W - \dot r_0 \sin W)\cos W + (\dot r_0 \cos W + r\dot A \sin W)\sin W \\
&= -kr\dot A \cos^2 W + k\dot r_0 \sin W \cos W + \dot r_0 \sin W \cos W + r\dot A \sin^2 W \\
&= \dot r_0 \sin W \cos W(1+k) + r\dot A(-k\cos^2 W + \sin^2 W)
\end{aligned}$$

$$\dot r = \dot r_0(\cos^2 W - k\sin^2 W) + r\dot A \times \frac{1+k}{2}\sin 2W \qquad (18)$$

$$r\dot A = \frac{1+k}{2} \times \dot r_0 \sin 2W + r\dot A(\sin^2 W - k\cos^2 W) \qquad (19)$$

利用式(18) 和(19) 可以求出脱出物与壁面发生碰撞后的速度值 $\dot r$ 和 $r\dot A$。

$\overset{o}{r}$ 与 S 之间的夹角 W 求法如下

$$\begin{aligned}
\mathrm{tg}W &= \mathrm{tg}(H - A) \\
&= (\mathrm{tg}H - \mathrm{tg}A) \div (1 + \mathrm{tg}A \times \mathrm{tg}H) \\
&= (y' - \mathrm{tg}A) \div (1 + y' \times \mathrm{tg}A)
\end{aligned}$$

将(17) 式代入上式得

$$\mathrm{tg}W = \left(\frac{r'\mathrm{tg}A + r}{r' - r\,\mathrm{tg}A} - \mathrm{tg}A\right) \times \frac{1}{1 + \dfrac{r'\mathrm{tg}A + r}{r' - r\,\mathrm{tg}A} \times \mathrm{tg}A}$$

$$= \frac{r(1+\mathrm{tg}^2 A)}{r'(1+\mathrm{tg}^2 A)}$$

所以　$\mathrm{tg}W = r \div r'$　(20)

利用上式可求出各壁面的 W 值

对护罩有

$$r = r_0 + a(A - A_0) \qquad r' = a$$

代入(20) 式得

$$\mathrm{tg}W = \frac{r_0 - aA_0}{a} + A$$

$$W = \mathrm{arctg}\left(\frac{r_0 - aA_0}{a} + A\right) \qquad (21)$$

对圆弧过渡段有

$$r = R \times \cos(A - A_1) - \sqrt{R^2\cos^2(A - A_1) - (R_1^2 + 2R_1R_2)}$$

$$r' = -R \times \sin(A - A_1) + \frac{\cos(A - A_1)\sin(A - A_1)R^2}{\sqrt{R^2\cos^2(A - A_1) - (R_1^2 + 2R_1R_2)}}$$

$$\frac{r}{r'} = \frac{R\cos(A - A_1) - \sqrt{R^2\cos^2(A - A_1) - (R_1^2 + 2R_1R_2)}}{-R\sin(A - A_1) + \dfrac{R^2\cos(A - A_1)\sin(A - A_1)}{\sqrt{R^2\cos^2(A - A_1) - (R_1^2 + 2R_1R_2)}}}$$

$$= \frac{R\cos(A - A_1)\sqrt{R^2\cos^2(A - A_1) - (R_1^2 + 2R_1R_2)} - [R^2\cos^2(A - A_1) - (R_1^2 + 2R_1R_2)]}{-R\sin(A - A_1)\sqrt{R^2 \times \cos^2(A - A_1) - (R_1^2 + 2R_1R_2)} + R^2\cos(A - A_1)\sin(A - A_1)}$$

$$W = \mathrm{arctg}(r \div r') \qquad (22)$$

对输送管路底板有

$$r = \frac{(y_1 - kx_1)}{(k\sin A - \cos A)}$$

$$r' = (y_1 - kx_1) \times \frac{-(k\cos A + \sin A)}{(k\sin A - \cos A)^2}$$

$$\frac{r}{r'} = \frac{1 - k \times \mathrm{tg}A}{k + \mathrm{tg}A}$$

$$W = \mathrm{arctg}\left(\frac{1 - k \times \mathrm{tg}A}{k + \mathrm{tg}A}\right) \qquad (23)$$

上板的 W 值与此表达式相同。

利用公式(9)～(12)、(18)、(19)、(21)、(22) 和(23) 可求得各种型式外壳的数学方程并可对碰撞过程进行分析。

4　结　语

本文对籽粒在摘脱装置内运动的过程进行了理论分析, 为进行籽粒运动全过程的计算机模拟打下了基础。

[参　考　文　献]

[1]　赵学笃, 姜志国　谷粒空气动力特性的试验研究　农业机械学报, 1979, 10(4): 42～51

[2]　关治, 陈景良　数值计算方法　北京: 人民教育出版社, 1979

[3]　钱祥征　常微分方程解题方法　长沙: 湖南科学技术出版社, 1984

[4]　蒋恩臣, 蒋亦元　板齿摘脱滚筒流场特性研究　农业工程学报, 2000, 16(1): 59～62

Theoretical Analysis of Grain Motion in the Stripping Unit

Jiang Enchen　　Jiang Yiyuan

(*Northeast Agricultural University, Harbin*　150030)

Abstract: The differential equations of free grain motion in air flow were developed. The dynamics of the grain impact against the hood and conduit was analysed. As a result, the relationship between structural operating parameters and grain trajectories was theoretically determined.

Key words: stripping unit; grain; trajectories; impact