第 28 卷 第 1 期 应 用 数 学 学 报 Vol. 28 No. 1
2005 年 1 月 ACTA MATHEMATICAE APPLICATAE SINICA Jan., 2005

非线性 Schrödinger 方程的高精度守恒差分格式*

张鲁明
(南京航空航天大学数学系，南京 210016)
(E-mail: zlmwjp@nuaa.edu.cn)

摘　要　本文首先分析线性 Schrödinger 方程一种高阶差分格式的构造方法，得到方程的耗散项. 在此基础上对三次非线性 Schrödinger 方程，提出了一种精度为 $O(\tau^2+h^2)$ 的差分格式，证明了该格式保持了连续方程的两个守恒量，且是收敛的与稳定的. 并通过数值例子与已有隐格式进行了比较，结果表明，本文格式在计算量类似的情况下，提高了数值精度.

关键词　NLS 方程；差分格式；高精度；稳定性
MR(2000) 主题分类　65M06
中图分类　O241.82

1　引言

本文考虑三次非线性 Schrödinger 方程 (NLS) 的如下初边值问题

$$i\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+q|u|^2u=0, \tag{1}$$

$$u(x,0)=u^0(x), \tag{2}$$

$$u(0,t)=u(l,t)=0, \tag{3}$$

这里 $u(x,t)$ 是未知复值函数，$u^0(x)$ 为已知的复值函数，q 是已知实常数，$i=\sqrt{-1}$. 该问题具有如下两个守恒律:

$$\int_0^l |u|^2\,\mathrm{d}x=\text{const}, \tag{4}$$

$$\int_0^l \left(|u_x|^2-\frac{q}{2}|u|^4\right)\mathrm{d}x=\text{const}. \tag{5}$$

众所周知，方程 (1) 在非线性光学、等离子物理等物理学领域中有着广泛的应用，用有限差分方法对其定解问题进行求解也已有众多的文章发表. 如 M. Dlfour 等人 1981

本文 2003 年 8 月 18 日收到. 2004 年 6 月 16 日收到修改稿.
* 国家自然科学基金 (10471023) 资助项目.

年就提出了一个有限差分格式 [1]; 1984 年， Thiab R. Taha 等人总结和提出了五个有限差分格式 [2]; J. M. Sanz-Serna 提出了 "蛙跳" 格式 [3]; 1986 年，常谦顺等人提出了一个守恒的 Crank-Nicolson 格式 [4]; 1995 年， Zhang Fei 等人提出了一个三层守恒差分格式 [5]; 本人也曾研究过一些守恒的差分格式 [6–8]. 对数值求解，追求较高的数值精度是永恒的课题. 本文首先对线性方程构造了一个高精度的差分格式，分析认为该格式的获得相当于先对线性方程增加一个耗散项，然后再进行通常的差分离散. 在此基础上，文中对问题 (1)–(3) 提出了一个新的差分格式，证明了该格式保持了方程的两个守恒量，并且由此出发，用能量方法证明了差分格式的稳定性和收敛性. 通过数值实验，与已有的某些常用隐格式进行比较，结果表明，本文格式在计算量类似的情况下提高了计算精度. 因此是一个很好的数值格式.

2 线性方程高精度差分格式的构造

首先引入如下记号：

$$
\begin{aligned}
&u_j^n \sim u(jh, n\tau), \qquad D_x = \frac{\partial}{\partial x},\\
&\delta_x u_j^n = u_{j+1/2} - u_{j-1/2}, \qquad T_x u_j^n = u_{j+1}^n,\\
&(u_j^n)_x = \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{h}, \qquad (u_j^n)_{\bar{x}} = \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{h},\\
&(u_j^n)_{\hat{x}} = \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2h}, \qquad (u^n, v^n) = h\sum_j u_j^n \overline{v}_j^n,\\
&\|u^n\|^2 = (u^n, u^n), \qquad \|u^n\|_\infty = \sup_j |u_j^n|,
\end{aligned}
$$

其中 h 和 τ 分别为空间和时间步长. 还可类似地定义对时间的差商 $(u_j^n)_t, (u_j^n)_{\bar{t}}$ 和 $(u_j^n)_{\hat{t}}$. 为方便起见，本文约定以下用到的 C 为非负常数，且在不同的地方可以有不同的值.

为了构造高精度差分格式，我们现在建立微分算子 D_x 与差分算子 δ_x 之间的近似关系，为了方便，我们仍用 "$=$" 表示 "$\approx$". 由 Taylor 展开有

$$
\begin{aligned}
u_{j+1}^n =& u_j^n + h\Big(\frac{\partial u}{\partial x}\Big)_j^n + \frac{h^2}{2!}\Big(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Big)_j^n + \frac{h^3}{3!}\Big(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\Big)_j^n + \cdots\\
=& \Big(I + hD_x + \frac{h^2}{2!}D_x^2 + \frac{h^2}{3!}D_x^3 + \cdots\Big)u_j^n = \exp(hD_x)u_j^n,
\end{aligned}
$$

其中 I 为单位算子. 由 $T_x u_j^n = u_{j+1}^n$, 得: $T_x = \exp(hD_x)$, 或 $hD_x = \ln T_x$. 由 $\delta_x = T_x^{\frac{1}{2}} - T_x^{-\frac{1}{2}}$ 得:

$$
\delta_x = \exp\Big(\frac{1}{2}hD_x\Big) - \exp\Big(-\frac{1}{2}hD_x\Big) = 2sh\Big(\frac{1}{2}hD_x\Big).
$$

因此

$$
hD_x = 2sh^{-1}\Big(\frac{1}{2}\delta_x\Big) = \delta_x - \frac{1}{2^2 3!}\delta_x^3 + \frac{3^2}{2^4 5!}\delta_x^5 + \cdots, \tag{6}
$$

$$
h^2 D_x^2 = \delta_x^2 - \frac{1}{12}\delta_x^4 + \frac{1}{90}\delta_x^6 - \cdots. \tag{7}
$$

现考虑线性 Schrödinger 方程 $iu_t+u_{xx}=0$ 的差分离散. 根据 Taylor 展开有

$$\begin{aligned}u_j^{n+1}&=u_j^n+\tau\frac{\partial}{\partial t}u_j^n+\frac{\tau^2}{2!}\frac{\partial^2}{\partial t^2}u_j^n+\cdots\\&=\Big(I+\tau\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\tau^2}{2!}\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\cdots\Big)u_j^n=\exp\Big(\tau\frac{\partial}{\partial t}\Big)u_j^n.\end{aligned}\tag{8}$$

于是

$$\exp\Big(-\frac{\tau}{2}\frac{\partial}{\partial t}\Big)u_j^{n+1}=\exp\Big(\frac{\tau}{2}\frac{\partial}{\partial t}\Big)u_j^n,\tag{9}$$

将算子关系 $i\frac{\partial}{\partial t}=-D_x^2$ 代入 (9) 得:

$$\exp\Big(-i\frac{\tau}{2}D_x^2\Big)u_j^{n+1}=\exp\Big(i\frac{\tau}{2}D_x^2\Big)u_j^n,\tag{10}$$

将式 (10) 两端算子作 Taylor 展开, 并取两项近似得:

$$\Big(I-i\frac{\tau}{2}D_x^2\Big)u_j^{n+1}=\Big(I+i\frac{\tau}{2}D_x^2\Big)u_j^n,\tag{11}$$

对式 (7) 取前两项近似得:

$$D_x^2=\frac{1}{h^2}\Big(\delta_x^2-\frac{1}{12}\delta_x^4\Big)=\frac{1}{h^2}\delta_x^2\Big(I+\frac{1}{12}\delta_x^2\Big)^{-1},\tag{12}$$

将式 (12) 代入 (11) 并记 $r=\frac{\tau}{h^2}$ 得:

$$\Big(I-\frac{ir}{2}\delta_x^2\Big(I+\frac{1}{12}\delta_x^2\Big)^{-1}\Big)u_j^{n+1}=\Big(I+\frac{ir}{2}\delta_x^2\Big(I+\frac{1}{12}\delta_x^2\Big)^{-1}\Big)u_j^n,\tag{13}$$

注意到算子 δ_x^2 与 $I+\frac{1}{12}\delta_x^2$ 的可交换性, 我们有:

$$\Big(I+\frac{1}{12}\delta_x^2-i\frac{r}{2}\delta_x^2\Big)u_j^{n+1}=\Big(I+\frac{1}{12}\delta_x^2+i\frac{r}{2}\delta_x^2\Big)u_j^n.\tag{14}$$

这就是所谓 Douglas 差分格式, 其截断误差为 $O(h^4+\tau^2)$, 根据 Fourier 方法, 易得增长因子:

$$G(\beta,\tau)=\frac{-2i\sin^2\frac{\beta h}{2}+\frac{5}{6}+\frac{1}{6}\cos\beta h}{2i\sin^2\frac{\beta h}{2}+\frac{5}{6}+\frac{1}{6}\cos\beta h},\tag{15}$$

明显地, $|G|=1$, 因此这是一个恒稳定的格式.

3 非线性方程的差分格式及解的估计

以下我们将对初边值问题 (1)–(3) 在时间域 $[0,T]$ 内考虑差分解. 式 (14) 可以写成:

$$i(u_j^n)_t+\big(u_j^{n+\frac{1}{2}}\big)_{x\bar{x}}+\frac{ih^2}{12}(u_j^n)_{x\bar{x}t}=0,\tag{16}$$

其中, $u_j^{n+\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}(u_j^n+u_j^{n+1})$. 显然 (16) 对应于方程

$$iu_t+u_{xx}+\frac{ih^2}{12}u_{xxt}=0.$$

我们称该方程中的项 $\frac{ih^2}{12}u_{xxt}$ 为线性 Schrödinger 方程的耗散项. 基于此, 对问题 (1)–(3), 我们构造差分格式如下:

$$i(u_j^n)_t + \left(u_j^{n+\frac{1}{2}}\right)_{x\bar{x}} + \frac{ih^2}{12}(u_j^n)_{x\bar{x}t} + \frac{q}{2}\left(|u_j^{n+1}|^2 + |u_j^n|^2\right)u_j^{n+\frac{1}{2}} = 0,$$
$$j = 1, 2\cdots, J; \quad n = 1, 2, \cdots, N, \tag{17}$$
$$u_j^0 = u^0(jh), \qquad j = 0, 1, 2, \cdots, J, \tag{18}$$
$$u_0^n = u_J^n = 0, \qquad n = 1, 2, \cdots, N. \tag{19}$$

通过 Taylor 展开易证这格式的截断误差为 $O(\tau^2 + h^2)$.

引理 1 对满足齐次边界条件 (19) 的任何两个网格函数 $\{u_j\}$ 和 $\{v_j\}$, 成立如下等式:

$$\sum_{j=1}^{J}(u_j)_{x\bar{x}}v_j = -\sum_{j=0}^{J-1}(u_j)_x(v_j)_x. \tag{20}$$

引理 2[9] (离散 Sobolev 不等式) 对任何网格函数 u_j, $j = 0, 1, \cdots, J$, 有

$$\|u\|_\infty \le \varepsilon\|u_x\| + C(\varepsilon)\|u\|, \tag{21}$$

其中 $C(\varepsilon)$ 为与 ε 有关的常数.

引理 3[10] (离散 Gronwall 不等式) 设 $w(k)$ 和 $\rho(k)$ 是非负网格函数, 若 $C > 0, \rho(k)$ 不减且

$$w(k) \le \rho(k) + C\tau\sum_{l=0}^{k-1}w(l),$$

则对任何 $0 \le k \le N$, 成立

$$w(k) \le \rho(k)e^{Ck\tau}. \tag{22}$$

引理 4 对任何网格函数 u_j, $j = 0, 1, \cdots, J$, 且 $u_0 = u_J$, 则

$$\|u_x\|^2 \le \frac{4}{h^2}\|u\|^2. \tag{23}$$

引理 5 差分格式 (17)–(19) 的解满足如下守恒律:

$$\|u^n\|^2 - \frac{h^2}{12}\|u_x^n\|^2 = \text{const}, \tag{24}$$
$$\|u_x^n\|^2 - \frac{q}{2}\|u^n\|_4^4 = \text{const}, \tag{25}$$

其中, $\|u^n\|_4^4 = h\sum\limits_{j=1}^{J}|u_j^n|^4$. 这是对 (4), (5) 式的数值模拟.

证　式 (17) 与 $u^{n+1} + u^n$ 作内积并取虚部得:

$$\left(\|u^n\|^2\right)_t - \frac{h^2}{12}\left(\|u_x^n\|^2\right)_t = 0,$$

由此可立得等式 (24).

式 (17) 与 $u^{n+1}-u^n$ 作内积并取实部得

$$\|u_x^{n+1}\|^2-\|u_x^n\|^2-\frac{q}{2}\left(\|u^{n+1}\|^4-\|u^n\|^4\right)=0,$$

由此可立得等式 (25). 在上述证明中已经利用了引理 1 的结论.

引理 6 差分格式 (17)-(19) 的解满足

$$\|u^n\|_\infty\le C, \tag{26}$$

证 由引理 4, 5 易得, $\|u^n\|\le C$, 又由 Sobolev 不等式得

$$\begin{aligned}&\|u^n\|_4^4\le\|u^n\|_\infty^2\|u^n\|^2\le\|u^n\|^2\left(\varepsilon\|u_x^n\|+C(\varepsilon)\|u^n\|\right)^2\\ \le&2\|u^n\|^2\left(\varepsilon^2\|u_x\|^2+C^2(\varepsilon)\|u^n\|^2\right),\end{aligned}$$

代入 (25) 式得:

$$\|u_x^n\|^2\le C+q\|u^n\|^2\left(\varepsilon^2\|u_x\|^2+C^2(\varepsilon)\|u^n\|^2\right),$$

此即

$$\left(1-q\varepsilon^2\|u^n\|^2\right)\|u_x^n\|^2\le C,$$

显然, 只要取 ε 足够小, 就能保证 $1-q\varepsilon^2\|u^n\|^2>0$ 成立, 从而导出 $\|u_x^n\|\le C$, 再由 Sobolev 不等式便得 (26) 式成立.

4 差分格式的稳定性

定理 1 设定解问题 (1)-(3) 的解 $u(x,t)$ 对 x 有有界的四阶导数, 对 t 有有界的三阶导数, 则差分格式 (17)-(19) 的解在平方模的意义下连续地依赖于初值.

证 记 $U_j^n=u(jh,n\tau)$, 则

$$R_j^n=i(U_j^n)_t+(U_j^{n+\frac12})_{x\bar x}+\frac{ih^2}{12}(U_j^n)_{x\bar xt}+\frac{q}{2}\left(|U_j^{n+1}|^2+|U_j^n|^2\right)U_j^{n+\frac12}, \tag{27}$$

式 (27) 减式 (17) 且设 $e_j^n=U_j^n-u_j^n$, 则有

$$\begin{aligned}R_j^n=&\,i(e_j^n)_t+\left(e_j^{n+\frac12}\right)_{x\bar x}+\frac{ih^2}{12}(e_j^n)_{x\bar xt}\\&+\frac{q}{2}\left(|U_j^{n+1}|^2+|U_j^n|^2\right)U_j^{n+\frac12}-\frac{q}{2}\left(|u_j^{n+1}|^2+|u_j^n|^2\right)u_j^{n+\frac12}.\end{aligned} \tag{28}$$

$$e_j^0=\varepsilon_j, \tag{29}$$

$$e_{J+j}^n=e_j^n=0, \tag{30}$$

其中 R_j^n 为截断误差, 阶数为 $O(\tau^2+h^2)$, (28) 式两边与 $e^{n+1}+e^n$ 作内积并取虚部得

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\tau}\left(\|e^{n+1}\|^2-\|e^n\|^2\right)-\frac{h^2}{12\tau}\left(\|e_x^{n+1}\|^2-\|e_x^n\|^2\right)\\&+\operatorname{Im}\left(G,e^{n+1}+e^n\right)=\operatorname{Im}\left(R^n,e^{n+1}+e^n\right),\end{aligned} \tag{31}$$

其中

$$G=\frac{q}{2}\left(|U^{n+1}|^2+|U^n|^2\right)U^{n+\frac12}-\frac{q}{2}\left(|u^{n+1}|^2+|u^n|^2\right)u^{n+\frac12}.$$

现估计式 (31) 中左端的最后一项和右端项．由于

$$\begin{aligned}G=&\frac{q}{2}\left(|U^{n+1}|^2+|U^n|^2\right)e^{n+\frac{1}{2}}+\frac{q}{2}\left(|U^{n+1}|^2+|U^n|^2-|u^{n+1}|^2-|u^n|^2\right)u^{n+\frac{1}{2}}\\=&\frac{q}{2}\left(|U^{n+1}|^2+|U^n|^2\right)e^{n+\frac{1}{2}}+\frac{q}{2}\left(U^{n+1}\overline{e}^{n+1}+e^{n+1}\overline{u}^{n+1}+U^n\overline{e}^n+e^n\overline{u}^n\right)u^{n+\frac{1}{2}},\end{aligned}$$

我们得到:

$$\begin{aligned}\mathrm{Im}\,(G,e^{n+1}+e^n)=&q\mathrm{Im}\Big[h\sum_{j=1}^{J-1}\left(|U_j^{n+1}|^2+|U_j^n|^2\right)|e^{n+\frac{1}{2}}|^2\\&+qh\sum_{j=1}^{J-1}\left(U^{n+1}\overline{e}^{n+1}+e^{n+1}\overline{u}^{n+1}+U^n\overline{e}^n+e^n\overline{u}^n\right)u_j^{n+\frac{1}{2}}\overline{e}_j^{n+\frac{1}{2}}\Big]\\\le&C\left(\|e^{n+1}\|^2+\|e^n\|^2\right)+Ch\sum_{j=1}^{J-1}\left(|e_j^{n+1}|+|e_j^n|\right)^2\\\le&C\left(\|e^{n+1}\|^2+\|e^n\|^2\right).\end{aligned}\tag{32}$$

又

$$\mathrm{Im}\,(R^n,e^{n+1}+e^n)\le\|R^n\|^2+\frac{1}{2}\left(\|e^{n+1}\|^2+\|e^n\|^2\right).\tag{33}$$

将式 (32) 和 (33) 代入 (31) 得

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\tau}\left(\|e^{n+1}\|^2-\|e^n\|^2\right)-\frac{h^2}{12\tau}\left(\|e_x^{n+1}\|^2-\|e_x^n\|^2\right)\\=&\mathrm{Im}\,(R^n,e^{n+1}+e^n)-\mathrm{Im}\,(G,e^{n+1}+e^n)\\\le&\|R^n\|^2+\frac{1}{2}\left(\|e^{n+1}\|^2+\|e^n\|^2\right)+C\left(\|e^{n+1}\|^2+\|e^n\|^2\right)\\\le&\|R^n\|^2+C\left(\|e^{n+1}\|^2+\|e^n\|^2\right),\end{aligned}$$

此即

$$\begin{aligned}&(1-C\tau)\left(\|e^{n+1}\|^2-\|e^n\|^2\right)-\frac{h^2}{12}\left(\|e_x^{n+1}\|^2-\|e_x^n\|^2\right)\\\le&\tau\|R^n\|^2+2C\tau\|e^n\|^2,\end{aligned}\tag{34}$$

(34) 式对 n 求和得

$$\begin{aligned}&(1-C\tau)\,\|e^{N+1}\|^2-\frac{h^2}{12}\|e_x^{N+1}\|^2\\\le&\tau\sum_{n=1}^{N}\|R^n\|^2+2C\tau\sum_{n=1}^{N}\|e^n\|^2+(1-C\tau)\,\|e^0\|^2-\frac{h^2}{12}\|e_x^0\|^2\\\le&T\|R\|^2+2C\tau\sum_{n=0}^{N}\|e^n\|^2+(1-C\tau)\,\|e^0\|^2-\frac{h^2}{12}\|e_x^0\|^2,\end{aligned}\tag{35}$$

其中,

$$\|R\|^2=\sup_{0\le n\le N}\|R^n\|^2,\qquad N\tau\le T.$$

由引理 4 得:

$$\left(\frac{2}{3}-C\tau\right)\|e^{N+1}\|^2 \le T\|R\|^2 + C\tau\sum_{n=0}^{N}\|e^n\|^2 + \left(\frac{4}{3}-C\tau\right)\|e^0\|^2. \tag{36}$$

取 τ 足够小, 使得 $\frac{2}{3}-C\tau>\sigma>0$, 最后由 Gronwall 不等式得

$$\|e^n\|^2 \le C\big(\|e^0\|^2+\|R\|^2\big).$$

类似地, 也可以证明格式 (17)-(19) 是收敛的.

5 数值实验

考察如下算例

$$\begin{aligned}
&iu_t + u_{xx} + 2|u|^2u = 0, && -20<x<20, \quad 0<t<1,\\
&u(x,0) = \mathrm{sech}\,(x)\exp[2ix], && -20\le x\le 20,\\
&u(-20,t) = u(20,t) = 0, && 0\le t\le 1.
\end{aligned}$$

可以验证上述问题的孤波解为:

$$u(x,t) = \mathrm{sech}\,(x-4t)\exp[2ix-3it].$$

对差分格式 (17)-(19), 我们采用如下所谓“追赶迭代法”逐层求解, 三对角迭代方程组为:

$$au_{j-1}^{n+1(s+1)} + bu_j^{n+1(s+1)} + cu_{j+1}^{n+1(s+1)} = d_j^{n(s)}, \qquad j=-J+1,-J+2,\cdots,J-1, \tag{37}$$

$$u_{-J} = u_J = 0, \tag{38}$$

$$u_j^n = u_0(jh), \tag{39}$$

其中

$$a = c = \frac{r}{2}+\frac{i}{12}, \qquad b = \frac{5i}{6}-r, \tag{40}$$

$$\begin{aligned}
d_j^{n(s)} = {}&\left(\frac{i}{12}-\frac{r}{2}\right)(u_{j-1}^n - 2u_j^n + u_{j+1}^n) + iu_j^n\\
&-\frac{\tau}{2}\big(|u_j^{n+1(s)}|^2+|u_j^n|^2\big)(u_j^{n+1(s)}+u_j^n),
\end{aligned} \tag{41}$$

s 表示迭代次数. 取迭代初值 $u_j^{n+1(0)}=u_j^n$, 当 $\big\|u^{n+1(s+1)}-u^{n+1(s)})\big\|<\varepsilon$ (预先给定的小正数), 迭代结束, 并取 $u_j^{n+1}=u_j^{n+1(s+1)}$. 由于

$$|b| = \sqrt{r^2+\frac{25}{36}}, \qquad |a|+|c| = 2\sqrt{\frac{r^2}{4}+\frac{1}{144}} = \sqrt{r^2+\frac{1}{36}},$$

故显然 $|b|>|a|+|c|$, 因此迭代收敛.

现取 $h=0.1$, 分别取 $\tau=0.005, 0.01$, 按范数 $\|\cdot\|_\infty$ 度量误差, 并与 Thiab R. Taha 等人提出的 CRANK-NICOLSON 格式 [2] (我们称为 C-N 格式 1):

$$i(u_j^n)_t + \frac{1}{2}\big[(u_j^n)_{x\bar{x}} + (u_j^{n+1})_{x\bar{x}}\big] + |u_j^{n+1}|^2u_j^{n+1} + |u_j^n|^2u_j^n = 0, \tag{42}$$

常谦顺等人提出的格式 [4] (我们称为 C-N 格式 2):

$$i(u_j^n)_t+\frac{1}{2}\left[(u_j^n)_{x\bar{x}}+(u_j^{n+1})_{x\bar{x}}\right]+\frac{1}{2}\left(|u_j^{n+1}|^2+|u_j^n|^2\right)(u_j^{n+1}+u_j^n)=0 \tag{43}$$

以及 Zhang Fei 等人提出的三层七点格式 [5]:

$$i(u_j^n)_{\hat{t}}+\frac{1}{2}\left[(u_j^{n-1})_{x\bar{x}}+(u_j^{n+1})_{x\bar{x}}\right]+|u_j^n|^2(u_j^{n+1}+u_j^{n-1})=0, \tag{44}$$

的计算结果进行比较，结果列为下表:

表 1　四个差分格式精度比较

t_n	本文格式		C-N 格式 1		C-N 格式 2		[5] 中格式	
	$\tau=0.005$	0.01	0.005	0.01	0.005	0.01	0.005	0.01
0.1	.0012	.0013	.0037	.0038	.0037	.0038	.0038	.0044
0.2	.0021	.0023	.0070	.0072	.0070	.0072	.0073	.0084
0.3	.0030	.0033	.0103	.0106	.0103	.0105	.0107	.0122
0.4	.0039	.0042	.0135	.0139	.0135	.0138	.0140	.0160
0.5	.0047	.0052	.0167	.0172	.0167	.0171	.0173	.0199
0.6	.0056	.0062	.0200	.0206	.0200	.0205	.0208	.0238
0.7	.0065	.0071	.0234	.0241	.0234	.0239	.0243	.0278
0.8	.0074	.0081	.0268	.0276	.0268	.0275	.0278	.0319
0.9	.0083	.0092	.0303	.0312	.0303	.0311	.0315	.0360
1.0	.0093	.0102	.0338	.0348	.0338	.0347	.0352	.0403

此外我们还对 τ 从 0.005 到 0.05 之间的其它取值进行过大量的计算，其结果都表明，本文方法与已有隐格式相比，在不增加结点的情况下 (故与两层隐格式相比，计算量也大体一致), 具有较高的精度. 再加之稳定性和收敛性可以得到保证，因此是一个很好的差分格式.

参　考　文　献

1 Deflour M, Fortin M, Payre G. Finite Difference Solution of a Non-linear Schrödinger Equation. *J. Comput. Phys.*, 1981, 44: 277–288

2 Thiab R, Taha, Mark J. Ablowitz. Analytical and Numerical Aspects of Certain Nonlinear Evolution Equations, Ⅱ. Numerical, Nonlinear Schrödinger Equation. *J. Comput. Phys.*, 1984, 55: 203–230

3 Sanz-Serna J M. Methods for the Numerical Solution of the Nonlinear Schrödinger Equation. *Math. Comput.*, 1984, 43: 21–27

4 Chang Qianshun, Xu Linbao. A Numerical Method for a System of Generalized Nonlinear Schrödinger Equations. *J. Comput. Math.*, 1986. 4(3): 191–199

5 Zhang Fei, Pérez-Grarcíz V M, Vázquez L. Numerical Simulation of Nonlinear Schrödinger Systems: a New Conservative Scheme. *Appl. Math. Comput.*, 1995, 71: 165–177

6 Zhang Luming, Chang Qianshun. A Conservative Numerical Scheme for Nonlinear Schrödinger Equation. *Chinese J. Comput. Phys.*, 1999, 16(6): 661–668 (in Chinese)

7 Zhang Luming, Chang Qianshun. A New Conservative Finite Difference Scheme for Nonlinear Schrödinger Equation. *Appl. Math. J. Chinese Univer.*, 2000, 15(1): 72-78 (in Chinese)

8 Zhang Luming, Chang Qianshun. A Conservative Numerical Scheme for Initial and Boundary Value Problem of Nonlinear Schrödinger Equation. *Acta Math. Scientia*, 2000, 20(2): 240–245 (in Chinese)

9 Chan Tony F, Shen Longjun. Stability Analysis of Difference Schemes for Variable Coefficient Schrödinger Type Equations. *SIAM J. Numer. Anal.*, 1987, 24(2): 336–349

10 Guo Benyu, Pedro J Pascual, Maria J. Rodriguez, Luis Vázquez. Numerical Solution of the Sine-Gordon Equation. *Appl. Math. Comput.*, 1986, 18: 1–14

A HIGH ACCURATE AND CONSERVATIVE FINITE DIFFERENCE SCHEME FOR NONLINEAR SCHRÖDINGER EQUATION

ZHANG LUMING

(*Department of Mathematics, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing* 210016)

(*E-mail: zlmwjp@nuaa.edu.cn*)

Abstract In this paper, we, at first, considered a sort of method constructed high accurate finite difference scheme for linear Schrödinger equation and get dissipation term of the equation. Next, we proposed a conservative finite difference scheme with precision $O(\tau^2 + h^2)$ for the nonlinear Schrödinger equation. It is proved that the scheme preserves two conservative quantities and is convergent and stable. The numerical results show that the scheme has higher precision than the other implicit schemes.

Key words NLS equation; difference scheme; high precision; stability

MR(2000) Subject Classification 65M06
Chinese Library Classification O241.82