第 26 卷 第 1 期　应 用 数 学 学 报　Vol. 26 No. 1
2003 年 1 月　ACTA MATHEMATICAE APPLICATAE SINICA　Jan., 2003

具无限时滞的非线性积分微分方程的周期解*

陈凤德

(福州大学数学系, 福州 350002; 北京大学数学科学学院, 北京 100871)

摘　要　本文考虑具无限时滞非线性积分微分方程

$$x'(t)=A(t,x(t))x(t)+\int_{-\infty}^{t}C(t,s)x(s)\,\mathrm{d}s+g(t,x(t-\tau))+b(t), \tag{1}$$

和

$$x'(t)=f(t,x(t))+\int_{-\infty}^{t}C(t,s)x(s)\,\mathrm{d}s+g(t,x(t-\tau))+b(t), \tag{2}$$

其中 $t\in R,\tau\geq 0$ 是常数, $x\in R^n$; $A(t,x)$, $C(t,s)$ 为 $n\times n$ 连续的函数矩阵; $f(t,x)$, $g(t,x)$, $b(t)$ 是 n 维连续向量. 本文利用线性系统的指数型二分性理论和不动点定理研究此系统, 建立了保证其周期解存在性. 唯一性的充分条件. 得到了一些新的结果, 推广了相关文献的主要结果.

关键词　无限时滞, 周期解, 指数型二分性, 存在性, 唯一性

1　引言

常微分方程和泛函微分方程的周期解存在性问题, 一直是很多数学家所关心的问题 (如 [1–4]), [5–13] 分别研究了周期系统

$$x'(t)=f\big(t,x(t)\big), \tag{1.1}$$

$$x'(t)=A\big(t,x(t)\big)x(t)+b\big(t,x(t-r)\big), \tag{1.2}$$

$$x'(t)=A(t)x(t)+\int_{-\infty}^{t}C(t,s)x(s)\,\mathrm{d}s+g\big(t,x(t)\big)+b(t) \tag{1.3}$$

的周期解存在性问题, 其中 $f(t,x),g(t,x)\in C(R\times R^n,R^n)$, $A(t,x),C(t,s)$ 为连续的函数矩阵, 且 $f(t,x)=f(t+T,x)$, $A(t,x)=A(t+T,x)$, $b(t,x)=b(t+T,x)$, $C(t+T,s+T)=C(t,s)$, $T>0$, $r\in R$. 然而据笔者所知, 尚未有学者对形如 (1), (2) 的方程的周期解存在性问题进行过研究. 本文的目的是运用线性系统的指数型二分性理论和不动点方法来给出系统 (1), (2) 存在周期解的充分性条件. 我们得到了一些新的结果, 同时推广了 [5, 6] 的主要结果.

本文 2000 年 10 月 11 日收到.
* 福州大学校人才基金 (0030824228) 资助项目.

设 $A(t)$ 是定义在 R 上的连续的 $n\times n$ 实矩阵函数, 我们考虑线性系统

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=A(t)x. \tag{1.4}$$

设 $X(t)$ 是 (1.4) 的标准解方阵, 假如存在常数 $\alpha>0$, $K\ge 1$, 及投影 P (满足 $P^2=P$ 的实方阵 P 称为投影) 使得下式成立:

$$\begin{cases} \|X(t)PX^{-1}(s)\|\le K\exp\big(-\alpha(t-s)\big), & t\ge s\\ \|X(t)(I-P)X^{-1}(s)\|\le K\exp\big(\alpha(t-s)\big), & t\le s, \end{cases}$$

则称线性系统 (1.4) 具有指数型二分性, 这时称 (K,α) 为 (1.4) 的二分性常数. 有关线性系统指数型二分性理论的知识, 读者可参考 [14, 15].

2 主要结果

考虑下列积分方程

$$x'(t)=A\big(t,x(t)\big)x(t)+\int_{-\infty}^{t}C(t,s)x(s)\,\mathrm{d}s+g\big(t,x(t-\tau)\big)+b(t), \tag{2.1}$$

$$x'(t)=f\big(t,x(t)\big)+\int_{-\infty}^{t}C(t,s)x(s)\,\mathrm{d}s+g\big(t,x(t-\tau)\big)+b(t), \tag{2.2}$$

$$x'(t)=A(t)x(t)+\int_{-\infty}^{t}C(t,s)x(s)\,\mathrm{d}s+g\big(t,x(t-\tau)\big)+b(t), \tag{2.3}$$

其中 $x\in R^n$, $t\in R$, $A(t,x)=\big(a_{ij}(t,x)\big)_{n\times n}$, $C(t,s)=\big(c_{ij}(t,x)\big)_{n\times n}$ 都是 $n\times n$ 函数矩阵; $A(t,x)$ 在 $R\times R^n$ 上连续; $C(t,s)$ 在 $R\times R$ 上连续; $f:R\times R^n\to R$ 连续可导; $g:R\times R^n\to R$ 连续; $b(t):R\to R^n$ 连续. 现作下列假设:

(A_1) $A(t,x)$ 和 $b(t)$ 关于 t 都是 T- 周期的, 且 $l(t,x)\le\alpha(t)\le 0$, 其中 $l(t,x)=\max\limits_{1\le j\le n}\big\{a_{jj}(t,x)+\sum\limits_{i=1,i\ne j}^{n}|a_{ij}(t,x)|\big\}$, $\alpha(t)$ 是连续的不恒为零的 T- 周期函数.

(A_2) $\int_{-\infty}^{t}\|C(t,s)\|\,\mathrm{d}s$ 有界且对任意的 $t,s\in R$ 有 $C(t+T,s+T)=C(t,s)$.

(A_3) $g(t,x)$ 关于 t 是 T- 周期的且 $g(t,0)=0$, 此外有 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sup\limits_{\|x\|\le n}\|g(t,x)\|=0$.

(A_4) $\alpha(t)+\delta\int_{-\infty}^{t}\|C(t,s)\|\,\mathrm{d}s\le 0$, 其中 $\alpha(t)$ 由 (A_1) 给出. $\delta>1$ 常数.

(A_5) 对于任意的 $\varepsilon>0$, 存在着 $L=L(\varepsilon)>0$ 使得对于任意的 $t_1>-\infty$, $t-t_1\ge L$ 就有 $\int_{-\infty}^{t_1}\|C(t,s)\|\,\mathrm{d}s<\varepsilon$.

(A_6) $f(t,x)\in C'(R\times R^n,R^n)$. 记 $\big(\frac{\partial f}{\partial x}\big)_{n\times n}=\big(b_{ij}(t,x)\big)_{n\times n}=B(t,x)$, 则 $B(t,x)$ 满足 (A_1).

(A_7) $g(t,x)$ 关于 t 是 T- 周期的; 且又存在非负连续的 T- 周期函数 $b_1(t)$ 使得 $\|g(t,x)-g(t,y)\|\le b_1(t)\|x-y\|$.

(A_8) 存在常数 $\delta>1$, 使得对于任给的 $t\in R$, 有

$$\alpha(t)+\delta\Big[\int_{-\infty}^{t}\|C(t,s)\|\,\mathrm{d}s+b_1(t)\Big]\le 0,$$

其中 $\alpha(t), b_1(t)$ 分别由 (A_1) 和 (A_7) 决定.

(A_9)　$A(t)$ 关于 t 是 T- 周期的, 且 $e(t) \le \alpha(t) \le 0$, $\alpha(t) \not\equiv 0$, 其中 $e(t) = \max\limits_{1\le j\le n}\{a_{jj}(t) + \sum\limits_{i=1,i\ne j}^{n} |a_{ij}(t)|\}$.

定理 2.1 如果满足条件 $(A_1$-$A_5)$, 则方程 (2.1) 至少存在一个 T- 周期解.

注 2.1 当 $\tau = 0$, $A(t,x) \equiv A(t)$ 时, 定理 2.1 即 [6, 定理 2.1].

定理 2.2 如果满足条件 $(A_2$-$A_6)$, 则方程 (2.2) 至少存在一个 T- 周期解.

定理 2.3 如果满足条件 (A_2), (A_5), (A_7)-(A_9), 则方程 (2.3) 存在唯一 T- 周期解.

注 2.3 当 $\tau = 0$ 时, 定理 2.3 即 [6, 定理 2.2].

注 2.4 利用作者在 [13] 中获得的关于周期线性系统指数型二分性存在性条件的结果, 我们将条件 (A_1) 和 (A_9) 分别用下面的 (A_1') 和 (A_9') 时, 定理 2.1, 定理 2.3 仍然成立.

(A_1')　$A(t,x)$ 和 $b(t)$ 关于 t 都是 T- 周期的, 且 $l(t,x) \le \alpha(t) \le 0$, 其中 $l(t,x) = \max\limits_{1\le i\le n}\{a_{ii}(t,x) + \sum\limits_{j=1,\ j\ne i}^{n} |a_{ij}(t,x)|\}$, $\alpha(t)$ 是连续的不恒为零的 T- 周期函数.

(A_9')　$A(t)$ 关于 t 是 T- 周期的, 且 $e(t) \le \alpha(t) \le 0$, $\alpha(t) \not\equiv 0$, 其中 $e(t) = \max\limits_{1\le i\le n}\{a_{ii}(t) + \sum\limits_{j=1,\ j\ne i}^{n} |a_{ij}(t)|\}$.

注 2.5 作为特殊情况, 当 $C(t,s) = C(t-s)$ 时, 定理 2.1–2.3 中的条件 (A_2) 为: $\int_{-\infty}^{t} \|C(t,s)\|\,\mathrm{d}s = \int_{-\infty}^{t} \|C(t-s)\|\,\mathrm{d}s = \int_{-\infty}^{0} \|C(s)\|\,\mathrm{d}s < +\infty$; 而条件 (A_5) 可以略去, 条件 (A_4) 及 (A_8) 中的积分 $\int_{-\infty}^{t} \|C(t,s)\|\,\mathrm{d}s$ 可以改为 $\int_{-\infty}^{0} \|C(s)\|\,\mathrm{d}s$, 这样所有定理的结论仍然成立.

3　几个引理

考虑周期系统

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = A(t)x, \tag{3.1}$$

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = A(t)x + g(t), \tag{3.2}$$

其中 $A(t) = \big(a_{ij}(t)\big)_{n\times n}$ 是 R 上的 $n\times n$ 连续函数矩阵, $g(t)$ 是 R 上的 n 维连续函数向量且 $A(t), g(t)$ 关于 t 是 T- 周期的.

引理 3.1[13, 定理 1] 对系统 (3.1), 设存在周期为 T 的不全为零的连续函数 $\alpha(t)$, 使得对任给的 $t \in R$ 有 $a_{ii}(t) + \sum\limits_{j=1,j\ne i}^{n} |a_{ij}(t)| \le \alpha(t) \le 0$, $i = 1,2,\cdots,n$, 则系统 (3.1) 具有投影为 I 的指数型二分性.

引理 3.2[13, 引理 4] 若 $g(t)$ 为连续的 T- 周期函数, $\int_0^T \|g(s)\|\,\mathrm{d}s < m$, 则

$$\int_{-\infty}^{t} \exp\big(-\alpha(t-s)\big)\,\|g(s)\|\,\mathrm{d}s < \frac{m}{1-\exp(-\alpha T)}.$$

引理 3.3[6, 引理 3.1] 条件同引理 3.1, 设 $X(t)$ 是 (3.1) 的基本解方阵, 则有

$$\|X(t)X^{-1}(s)\| \le \exp\Big(\int_s^t \alpha(r)\,\mathrm{d}r\Big), \qquad t \ge s.$$

引理 3.4[6, 引理 3.2] 设 $C(t,s)$ 是 $n\times n$ 连续函数矩阵且满足 (第二节) 条件 (A_2) 和 (A_5), 如果 $f_1(t)$ 是 n 维连续的 T- 周期函数, 则 $g(t)=\int_{-\infty}^t C(t,s)f_1(s)\,\mathrm{d}s$ 也是连续的 T- 周期函数.

考虑如下的微分系统

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = A(t)x + \int_{-\infty}^t C(t,s)f_1(s)\,\mathrm{d}s + f_2(s), \tag{3.4}$$

其中 $t\in R$, $x\in R^n$; $A(t), C(t,s)$ 都是 n 阶连续 T- 周期函数矩阵; $f_1(t)$ 及 $f_2(t)$ 都是 n 维连续 T- 周期函数.

引理 3.5[6, 引理 3.4] 如果 (第二节) 条件 (A_2), (A_5) 和 (A_9) 成立, 则方程 (3.4) 存在唯一的 T- 周期解 $x(t)$ 满足

$$x(t) = \int_{-\infty}^t X(t)X^{-1}(r)\Big[\int_{-\infty}^r C(r,s)f_1(s)\,\mathrm{d}s + f_2(r)\Big]\,\mathrm{d}r, \tag{3.5}$$

其中 $X(t)$ 是 (3.1) 的基本解方阵.

4 定理的证明

定理 2.1 的证明 设 $B=\{u(t)\mid u: R\to R^n$ 连续的 T- 周期函数 $\}$, 则 B 在范数 $\|u\|=\sup\{\|u(t)\|: 0\le t\le T\}$ 下是一个 Banach 空间. 对任意的 $u\in B$, 考虑方程

$$x'(t) = A\big(t,u(t)\big)\,x + \int_{-\infty}^t C(t,s)u(s)\,\mathrm{d}s + g\big(t,u(t-\tau)\big) + b(t). \tag{4.1}$$

由定理的条件及引理 3.4 知道 $\big[\int_{-\infty}^t C(t,s)u(s)\,\mathrm{d}s + g\big(t,u(t-\tau)\big)+b(t)\big]$ 是连续的 T- 周期函数. 又由条件 (A_1) 和 [6] 引理 3.3 知 $x'(t)=A\big(t,u(t)\big)x$ 具有指数型二分性, 且二分性常数 (K,α) 与 $u(t)$ 无关. 于是由引理 3.5 知道 (4.1) 有唯一的 T- 周期解

$$x_u(t) = \int_{-\infty}^t X_u(t){X_u}^{-1}(r)\Big[\int_{-\infty}^r C(r,s)u(s)\,\mathrm{d}s + g\big(r,u(r-\tau)\big) + b(r)\Big]\,\mathrm{d}r. \tag{4.2}$$

今定义算子 $F: B\to B$ 如下: $Fu(t)=x_u(t)$, $\forall u\in B$. 下证 F 在 B 中至少有一个不动点. 下面将用 Schauder 不动点定理 ([16, 105 页]) 来证明这一点. 为此, 记 $D_n=\{u\mid u\in B,\ \|u\|\le n\}$ 其中 n 为自然数.

(1) 先证明存在自然数 N, 使得 $F: D_N\to D_N$. 反证法: 若不然, 对任意的自然数 n, 都存在 $u_n\in D_n$, 使得 $\|Fu_n\|\ge n$. 因为 $b(t)$ 是连续的 T- 周期函数, 故有 $m>0$ 使得 $t\in R$ 时, $\|b(t)\|\le m$. 于是由定理条件及引理 3.1, 3.3 及 (4.2) 式得:

$$\frac{\|Fu_n\|}{n} \le \frac{1}{n}\int_{-\infty}^t \exp\Big(\int_r^t \alpha(s)\,\mathrm{d}s\Big)\Big[\|u_n\|\int_{-\infty}^r \|C(r,s)\|\,\mathrm{d}s + \big\|g\big(r,u_n(r-\tau)\big)\big\| + m\Big]\,\mathrm{d}r$$

$$
\begin{aligned}
&\le \int_{-\infty}^{t} \exp\Big(\int_r^t \alpha(s)\,\mathrm{d}s\Big)\Big(-\frac{\alpha(r)}{\delta}\Big)\,\mathrm{d}r \\
&\quad + \frac{1}{n}\int_{-\infty}^{t} K\exp\big(-\alpha(t-r)\big)\big[\big\|g\big(r,u_n(r-\tau)\big)\big\| + m\big]\,\mathrm{d}r \\
&= \frac{1}{\delta} + \frac{K}{n}\int_{-\infty}^{t} \exp\big(-\alpha(t-r)\big)\,\big\|g\big(r,u_n(r-\tau)\big)\big\|\,\mathrm{d}r + \frac{Km}{n\alpha}.
\end{aligned}
$$

因为 $\int_{-\infty}^{t} K\exp\big(-\alpha(t-r)\big)\,\mathrm{d}r = \frac{K}{\alpha}$, 并由条件 (A_3) 可得:

$$
\overline{\lim_{n\to+\infty}}\ \frac{K}{n}\int_{-\infty}^{t} \exp\big(-\alpha(t-r)\big)\,\big\|g(r,u_n(r-\tau))\big\|\,\mathrm{d}r = 0.
$$

于是从上面的分析知道

$$
\overline{\lim_{n\to+\infty}}\ \frac{\|Fu_n\|}{n} \le \frac{1}{\delta} < 1.
$$

因此当 n 充分大时, $\frac{\|Fu_n\|}{n} < 1$, 这与假设 $\frac{\|Fu_n\|}{n} \ge 1$ 相矛盾. 因此存在充分大的自然数 N, 使得 $F: D_N \to D_N$.

(2) 证明 FD_N 是 B 中的紧子集. 事实上, 因为 $FD_N \sqsubseteq D_N$, 所以 $\{Fu(t) \mid u \in D_N\}$ 是一致有界的. 记

$$
\begin{aligned}
b_1 &= \sup\big\{\|A(t,x)\| \,\big|\, (t,x) \in [0,T] \times R_N\big\}, \\
b_2 &= \sup\Big\{\int_{-\infty}^{t} \|C(t,s)\|\,\mathrm{d}s \,\Big|\, t \in [0,T]\Big\}, \\
b_3 &= \sup\big\{\big\|g(t,x)\big\| \,\big|\, (t,x) \in [0,T] \times R_N\big\},
\end{aligned}
$$

其中 $R_N = \{x | x \in R^n,\ \|x\| \le N\}$. 因为对任意的 $u \in D_N$ 有

$$
\frac{\mathrm{d}Fu(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}x_u(t)}{\mathrm{d}t} = A\big(t,u(t)\big)x_u(t) + \int_{-\infty}^{t} C(t,s)u(s)\,\mathrm{d}s + g\big(t,u(t-\tau)\big) + b(t).
$$

所以

$$
\Big\|\frac{\mathrm{d}Fu(t)}{\mathrm{d}t}\Big\| \le b_1 N + b_2 N + b_3 + m.
$$

故 $\{Fu(t) \mid u \in D_N\}$ 是等度连续的, 由 Ascoli-Arezela 定理知道 FD_N 是 B 中的紧子集.

(3) 证明 F 在 D_N 上连续. 对任意的 $u_1, u_2 \in D_N$, 由 (4.1), (4.2) 及定理的条件和引理 3.1, 3.4, 3.5 得

$$
\begin{aligned}
&\big\|Fu_1(t) - Fu_2(t)\big\| \\
&\le \int_{-\infty}^{t} \exp\Big(\int_r^t \alpha(s)\,\mathrm{d}s\Big)\Big[\big\|u_1(t) - u_2(t)\big\|\Big(-\frac{\alpha(r)}{\delta}\Big) \\
&\quad + \big\|g\big(r,u_1(r-\tau)\big) - g\big(r,u_2(r-\tau)\big)\big\|\Big]\,\mathrm{d}r \\
&\le \frac{\|u_1 - u_2\|}{\delta} + K\int_{-\infty}^{t} \exp\big(-\alpha(t-r)\big)\,\big\|g\big(r,u_1(r-\tau)\big) - g\big(r,u_2(r-\tau)\big)\big\|\,\mathrm{d}r.
\end{aligned}
$$

由于 $g(t,x)$ 在 $R\times R_N$ 上一致连续, 故当 $\|u_1-u_2\|\to 0$ 时, $\|g(t,u_1(t-\tau))-g(t,u_2(t-\tau))\|\to 0$, 从而 $K\int_{-\infty}^t \exp(-\alpha(t-r))\|g(r,u_1(r-\tau))-g(r,u_2(r-\tau))\|\,\mathrm{d}r\to 0,\ t\in R$. 于是从上面的分析知道当 $\|u_1-u_2\|\to 0$ 时, $\|Fu_1-Fu_2\|\to 0$, 即 F 在 D_N 上是连续的.

综合上面的分析可知 $F: D_N\to D_N$ 是全连续算子. 故由 Schauder 不动点定理知道 F 在 D_N 上至少有一个不动点. 从 (4.1), (4.2) 易知这个不动点就是 (2.1) 的 T- 周期解. 定理 2.1 证毕.

定理 2.2 的证明 注意到 $f(t,x)\in C^1(R\times R^n,R^n)$ 于是

$$f(t,x)=\big[f(t,x)-f(t,0)\big]+f(t,0)=\Big[\int_0^1 f_x(t,sx)\,\mathrm{d}s\Big]x+f(t,0)=:B(t,x)+f(t,0).$$

于是知道对方程 (2.2), 定理 2.1 的条件全部满足, 故由定理 2.1 知道方程 (2.2) 存在一个 T- 周期解.

定理 2.3 的证明 设 $B=\{u(t)\mid u:R\to R^n$ 连续的 T- 周期函数 $\}$, 则 B 在范数 $\|u\|=\sup\{\|u(t)\|: 0\le t\le T\}$ 下是一个 Banach 空间. 对任意的 $u\in B$. 考虑方程

$$x'(t)=A(t)x+\int_{-\infty}^t C(t,s)u(s)\,\mathrm{d}s+g(t,u(t-\tau))+b(t). \tag{4.3}$$

由定理的条件及引理 3.4, 引理 3.5 知道 (4.3) 有唯一的 T- 周期解

$$x_u(t)=\int_{-\infty}^t X(t)X^{-1}(r)\Big[\int_{-\infty}^r C(r,s)u(s)\,\mathrm{d}s+g(r,u(r-\tau))+b(r)\Big]\,\mathrm{d}r. \tag{4.4}$$

今定义算子 $P:B\to B$ 如下: $Pu(t)=x_u(t)$, $\forall u\in B$. 下证 P 在 B 中是压缩的. 事实上, 对任意的 $u_1,u_2\in B$, 由 (4.4) 及定理的条件可知:

$$\begin{aligned}
&\|Pu_1(t)-Pu_2(t)\|\\
\le&\int_{-\infty}^t \|X(t)X^{-1}(r)\|\Big[\int_{-\infty}^r \|C(r,s)\|\,\|u_1(s)-u_2(s)\|\,\mathrm{d}s\\
&+\|g(r,u_1(r-\tau))-g(r,u_2(r-\tau))\|\Big]\,\mathrm{d}r\\
\le&\|u_1-u_2\|\int_{-\infty}^t \exp\Big(\int_r^t \alpha(s)\,\mathrm{d}s\Big)\Big[\int_{-\infty}^r \|C(r,s)\|\,\mathrm{d}s+b_1(r)\Big]\,\mathrm{d}r\\
\le&\|u_1-u_2\|\int_{-\infty}^t \exp\Big(\int_r^t \alpha(s)\,\mathrm{d}s\Big)\Big(-\frac{\alpha(r)}{\delta}\Big)\,\mathrm{d}r=\frac{1}{\delta}\|u_1-u_2\|.
\end{aligned}$$

即 $\|Pu_1(t)-Pu_2(t)\|\le\frac{1}{\delta}\|u_1-u_2\|$, 因为 $\delta>1$, 故 $\frac{1}{\delta}<1$. 由此知道 P 在 B 中是压缩的, 从而有唯一的不动点, 该不动点就是方程 (2.3) 的唯一的 T- 周期解.

5 例子

例 1 考虑下面的积分微分方程

$$x'(t) = -\Big(\frac{|\cos(tx)|}{5} + 2|\cos t| + x^2\Big)x + \int_{-\infty}^{t} \exp\big(-(t-s)\big)\,|\cos t|\,x(s)\,\mathrm{d}s + \frac{|\cos t|}{8}\sqrt{|x(t-\tau)|} + 2\sin t, \tag{5.1}$$

其中 $t, x \in R$, 易见

$$A(t,x) = -\Big(\frac{|\cos(tx)|}{5} + 2|\cos t| + x^2\Big), \qquad b(t) = 2\sin t,$$
$$g\big(t, x(t-\tau)\big) = \frac{|\cos t|}{8}\sqrt{|x(t-\tau)|}$$

都是连续的且关于 t 是 2π- 周期函数; $C(t,s) = \exp\big(-(t-s)\big)|\cos t|$ 也是连续的, 且 $C(t,s) = C(t+2\pi, s+2\pi)$; 今取 $\alpha(t) = -2|\cos t|$, $\delta = \frac{4}{3} > 1$. 显然, 条件 $(A_1)(A_3)$ 成立. 又 $\int_{-\infty}^{t} |C(t,s)|\,\mathrm{d}s = |\cos t| \le +\infty$, 所以条件 (A_2) 成立. 又

$$\alpha(t) + \delta\int_{-\infty}^{t} |C(t,s)|\,\mathrm{d}s = -\frac{2}{3}|\cos t| \le 0,$$

所以条件 (A_4) 成立. 对任意的 $\varepsilon > 0$ $(\varepsilon < 1)$, 取 $L = L(\varepsilon) > -\ln\varepsilon > 0$, 则当 $t_1 > -\infty$, $t - t_1 \ge L$ 时, 有

$$\int_{-\infty}^{t_1} |C(t,s)|\,\mathrm{d}s \le \int_{-\infty}^{t_1} \exp\big(-(t-s)\big)\,\mathrm{d}s$$
$$= \exp\big(-(t-t_1)\big)\int_{-\infty}^{t_1} \exp\big(-(t_1-s)\big)\,\mathrm{d}s \le \exp(-L) < \varepsilon.$$

即条件 (A_5) 也成立. 故由定理 2.1 知道系统 (5.1) 至少存在一个 2π- 周期解.

例 2 考虑方程

$$x'(t) = -2|\sin t|\,x(t) + \int_{-\infty}^{t} \exp\big(-(t-s)\big)\,|\sin t|\,x(s)\,\mathrm{d}s + \frac{|\sin t|}{4}|x(t-\tau)| + 2\cos t. \tag{5.2}$$

易于验证该方程满足定理 2.3 的条件, 于是知道 (5.2) 存在唯一的 2π- 周期解.

显然, 上述两例的 2π- 周期解的存在性是无法用已有的文献提供的方法来判别的.

参 考 文 献

1 Yoshizawa T. Stability Theory and the Existence of Periodic Solutions and Almost Periodic Solutions. Lectures in Applied Mathematics, Vol.14, Berlin: Springer-Verlag, 1975

2 Burton T. Stability and Periodic Solutions of Ordinary and Functional Differential Equations. New York: Academic Press In., 1985

3 Reissing R Sanson, Conti R. Nonlinear Differential Equation of Higher Order. Noordhoff: International Publishing Lenden, 1974

4 Hale J K. Theory of Functional Differential Equations. New York: Springer-Verlag, 1987

5 Huang Qichang. The Existence of Periodic Solution for the Functional Differential Equations with Infinite Delays, *Chinese Science* (Series A), 1984, 10: 882–889 (in Chinese)

6 Wang Quanyi. Existence, Uniqueness and Stability of Periodic Solution of Integrodifferential Equations With Infinite Delay. *Acta Mathematicae Applicatae Sinica*, 1998, 21: 312–318 (in Chinese)

7 Wang Lian, Wang Muqiu. A Stationary Oscillation of Higher-dimensional Periodic Dissipative System. *Chinese Science*, 1982,7(A): 607–614 (in Chinese)

8 Li Liming. Periodic Solution for a Class of Higher Dimensional Non-autonomous Systems. *Acta Mathematicae Applicatae Sinica*, 1989, 12(3): 272–280 (in Chinese)

9 Wang Quanyi. The Existence, Uniqueness and Stability of Periodic Solutions. *Chinese Annal of Mathematics*, 1994, 15(A): 537–545 (in Chinese)

10 Cao Jinde, Li Yongkun. The Existence and Uniqueness of Periodic Solutions to Higher Dimensional Periodic Systems with Delay. *Acta Mathematicae Sinica*, 1997, 40(2): 280–286 (in Chinese)

11 Wang Ke. Periodic Solution to a Class of Differential Equation with Deviating Arguments. *Acta Mathematicae Sinica*, 1994, 37(3): 409–413 (in Chinese)

12 Chen Fengde, Shi Jinlin. Periodic Solution of Higher Order Nonautonomous Systems. *Acta Mathematicae Sinica*, 1999, 42(2): 271–280 (in Chinese)

13 Chen Fengde. Exponential Dichotomies and Periodic Solution of Periodic System. *Pure Mathematics and Applied Mathematics*, 1999, 15(1): 18–21 (in Chinese)

14 Coppel W A. Dichotomies in Stability Theory. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 629, Berlin: Springer-Verlag, 1978

15 Lin Faxin. Exponential Dichotomies of Linear System. Hefei: Acadamic Press of Anhui University, 1999 (in Chinese)

16 Xia Daoxing et al. Real Function and Functional Analysis. Beijing: People's Education Press, 1978 (in Chinese)

PERIODIC SOLUTIONS OF NONLINEAR INTEGRODIFFERENTIAL EQUATIONS WITH INFINITE DELAY

CHEN FENGDE

(*Department of Mathematics, Fuzhou University, Fuzhou* 350002 &

School of Mathematical Sciences, Peking University, Beijing 100871)

Abstract In this paper, nonlinear integrodifferential equations with infinite delay of the form

$$x'(t) = A\big(t, x(t)\big)x(t) + \int_{-\infty}^{t} C(t,s)x(s)\,\mathrm{d}s + g\big(t, x(t-\tau)\big) + b(t),$$

and

$$x'(t) = f\big(t, x(t)\big) + \int_{-\infty}^{t} C(t,s)x(s)\,\mathrm{d}s + g\big(t, x(t-\tau)\big) + b(t)$$

are considered, where the $n\times n$ matrix function $A(t,x)$ and the n-vectors $f(t,x), g(t,x)$ are continuous in $(t,x)\in R\times R^n$, $C(t,s)\in C(R\times R)$. By combinning the theory of exponential dichotomies of linear system and fixed point theorem, some sufficient condition that guarantee the existence and uniqueness of periodic solution of the system (1) and (2) are obtained. Some new results are obtained.

Key words Infinite delay, periodic solution, existence, uniqueness, exponential dichotomies