第 26 卷 第 2 期　　应 用 数 学 学 报　　Vol. 26 No. 2
2003 年 4 月　　ACTA MATHEMATICAE APPLICATAE SINICA　　Apr., 2003

一类拟线性椭圆型方程很弱解的局部正则性

高红亚
(河北大学数学与计算机学院，保定 071002)

王　岷
(河北大学机械与建筑工程学院，保定 071002)

赵洪亮
(河北理工学院数理系，唐山 063000)

摘　要　本文考虑一类拟线性椭圆型方程的很弱解. 使用 Hodge 分解等工具，得到了其局部正则性，推广了 [1] 之结果.

关键词　拟线性椭圆型方程，很弱解，局部正则性， Hodge 分解

1　引言

设 Ω 为 R^N $(N\geq 2)$ 中的有界区域. 考虑下面的拟线性散度型椭圆型方程

$$-\operatorname{div} a(x,u,Du)=-\operatorname{div} F(x). \tag{1}$$

这里 $a(x,u,\xi):\Omega\times R\times R^N\to R^N$ 满足通常的可测性条件 (Carathéodory 条件), 并且对 $1<p<N$ 和任意的 $\xi\in R^N$, 有

(i) $a(x,u,\xi)\cdot\xi\geq\gamma_0|\xi|^p$,

(ii) $\big|a(x,u,\xi)\big|\leq\gamma_1|\xi|^{p-1}+k(x)+\gamma_2|u|^{p-1}$,

其中 γ_i $(i=0,1,2)$ 为正常数， $F(x)\in\big(L^{p'}_{\mathrm{loc}}(\Omega)\big)^N$, $k(x)\in L^{p'}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, $p'=\frac{p}{p-1}$.

定义 1　称 $u\in W^{1,p}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ 为 (1) 的弱解，若对任意在 Ω 具有紧支集的 $\phi\in W^{1,p}(\Omega)$, 有

$$\int_\Omega a(x,u,Du)\cdot D\phi=\int_\Omega F\cdot D\phi. \tag{2}$$

定义 2　称 $u\in W^{1,r}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, $\operatorname{Max}\{1,p-1\}\leq r\leq p$ 为 (1) 的很弱解，若对任意在 Ω 具有紧支集的 $\phi\in W^{1,\frac{r}{r-p+1}}(\Omega)$, 有

$$\int_\Omega a(x,u,Du)\cdot D\phi=\int_\Omega F\cdot D\phi. \tag{3}$$

本文 2000 年 10 月 8 日收到. 2001 年 1 月 28 日收到修改稿.

注 1 上述定义中只要求 $F\in\left(L_{\mathrm{loc}}^{\frac{r}{p-1}}(\Omega)\right)^N$ 即可. 若定义 2 中的 $r=p$, 则与定义 1 一致.

引入下列记号. 若 $t\in R^+$, 则记 $B_t=\{x:|x-x_0|<t\}$. 对 $k>0$, 记 $A_k=\{x\in\Omega:|u(x)|>k\}$, $A_{k,t}=A_k\cap B_t$. 若 $m<N$, 则记 $m^*=1/(1/m-1/N)$.

由于方程 (1) 有深刻的背景，其弱解的许多性质已经被得到 (见 [2–5] 及其参考文献). 最近的一个重要进展是 Giachetti 和 Porzio[1] 得到的方程 (1) 弱解的局部正则性结果. 他们利用方程 (1) 的弱解所满足的一个积分不等式 (见下面的引理 1) 得到了以下定理 (见 [1, 定理 5.1]).

定理 A 设 $u\in W_{\mathrm{loc}}^{1,p}(\Omega)$ 为 (1) 的弱解，函数 $F(x)$ 和 $k(x)$ 分别属于 $\left(L_{loc}^{r_1}(\Omega)\right)^N$ 和 $L_{\mathrm{loc}}^{r_2}(\Omega)$, 并且 r_1,r_2 满足

$$p'<\mathrm{Min}\,\{r_1,r_2\}<\frac{N}{p-1},$$

则 $u\in L_{\mathrm{loc}}^{s}(\Omega)$, $s=\left[(p-1)\mathrm{Min}\,\{r_1,r_2\}\right]^*$.

本文将上述结果推广到方程 (1) 的很弱解. 我们利用 Hodge 分解及其估计式，得到了下面的定理.

定理 设 $u\in W_{\mathrm{loc}}^{1,r}(\Omega)$, $\mathrm{Max}\,\{1,p-1\}<r\le p$ 为 (1) 的很弱解，函数 $F(x)$ 和 $k(x)$ 分别属于 $\left(L_{\mathrm{loc}}^{r_1}(\Omega)\right)^N$ 和 $L_{\mathrm{loc}}^{r_2}(\Omega)$, 并且 r_1,r_2 满足

$$\frac{r}{p-1}<\mathrm{Min}\,\{r_1,r_2\}<\frac{N}{p-1},$$

则存在 r_0, $\mathrm{Max}\,\{1,p-1\}<r_0<p$, 当 $r_0<r<p$ 时，有 $u\in L_{\mathrm{loc}}^{s}(\Omega)$, 其中 $s=\left[(p-1)\mathrm{Min}\,\{r_1,r_2\}\right]^*$.

注 2 显然，上述定理中当 $r=p$ 时即为定理 A, 因此为定理 A 的推广.

注 3 在考虑经典弱解情形时, 一般所取的试验函数是 $\phi=\eta u$, $\eta\in C_0^\infty(\Omega)$, 或更复杂的包含 u 的某次幂或截断的试验函数. 其共同的特点是 $\nabla\phi$ 本质上将 ∇u 作为一部分, 于是通常的假设是 $u\in W_{\mathrm{loc}}^{1,p}(\Omega)$. 由于本文考虑的是很弱解 $u\in W_{\mathrm{loc}}^{1,r}(\Omega)$, $\mathrm{Max}\,\{1,p-1\}<r\le p$, 由条件 (ii) 知 $a(x,u,Du)\in L_{\mathrm{loc}}^{\frac{r}{p-1}}(\Omega)$, 若按照通常的取试验函数的方法，得到的 $\nabla\phi$ 不属于其对偶空间 $L_{\mathrm{loc}}^{\frac{r}{r-p+1}}(\Omega)$, 这是一个实质性的困难. 另外，偏微分方程或变分计算中的一个重要的问题是在最小的假设条件之下得到正则性，因此，本文考虑方程 (1) 的很弱解，并利用 Hodge 分解取出了适当的试验函数，克服了证明中的困难.

在定理的证明过程中，我们需要下面的两个引理，它们分别出自 [1, 定理 2.1, 464 页] 和 [2, 引理 3.1, 161 页].

引理 1 设 $u\in W_{\mathrm{loc}}^{1,r}(\Omega)$, $\phi_0\in L_{\mathrm{loc}}^{\delta}(\Omega)$, 其中 $1<r<N$, 并且 δ 满足 $1<\delta<\frac{N}{r}$. 如果对任意的 k 和 $R_0\le\tau<t\le R_1$, 下面的积分估计式成立

$$\int_{A_{k,\tau}}|Du|^r\le c_0\Big[\int_{A_{k,t}}\phi_0+(t-\tau)^{-\alpha}\int_{A_{k,t}}|u|^p\Big].\tag{4}$$

这里 c_0 为只依赖于 N,r,δ,R_0,R_1 和 $|\Omega|$ 的常数，α 为一正的实常数，则 $u\in L_{\mathrm{loc}}^{s}(\Omega)$, 其中 $s=(r\delta)^*$. 而且，对任意 $R_0\le\rho<R\le R_1$, 当 R_1 充分小时，u 满足下面的估计

$$\Big(\int_{B_\rho}|u|^{(r\delta)^*}\Big)^{r/r^*}\le C,$$

这里C为只依赖于$N, r, \delta, \alpha, R_0, R_1, |\Omega|, \|\phi_0\|_{L^\delta(B_R)}, (R-\rho)^{-\beta}$, $\|u\|_{L^{r^*}(B_R)}$, $\beta = \mathrm{Max}\,\{\alpha, r\}$的常数.

引理 2 设$f(\tau)$为定义于$0 \le R_0 \le t \le R_1$上的非负有界函数. 若对$R_0 \le \tau < t \le R_1$有 $f(\tau) \le A(t-\tau)^{-\alpha} + B + \theta f(t)$, 其中 A, B, α, θ 为非负常数, $\theta < 1$, 则存在常数$C = C(\alpha, \theta)$, 使得对任意 R, ρ, $R_0 \le \rho < R \le R_1$ 时, 有 $f(\rho) \le C\big[A(R-\rho)^{-\alpha} + B\big]$.

2 定理的证明

为方便起见, 与 $N, p, r, s, R_0, R_1, |\Omega|, \gamma_i$ $(i = 0, 1, 2)$ 有关的常数记为 C, 在不同的场合其值可能不同. 当 $r = p$ 时即为定理 A. 下面考虑 $\mathrm{Max}\,\{1, p-1\} < r < p$ 情形. 设$B_t \subset\subset \Omega$, 并且$0 \le R_0 \le \tau < t \le R_1$为任意固定的常数. 取$\eta \in C_0^\infty(B_t)$为一截断函数, 满足$0 \le \eta \le 1$, 在$B_\tau$上$\eta \equiv 1$, $|D\eta| \le 2(t-\tau)^{-1}$. 设$T_k(u) = \mathrm{Max}\big\{-k, \mathrm{Min}\,\{k, u\}\big\}$, $k > 0$. 引入关于 $\big|D\big(\eta(u - T_k(u))\big)\big|^{r-p} D\big(\eta(u - T_k(u))\big) \in L^{\frac{r}{r-p+1}}(\Omega)$ 的 Hodge 分解 (见 [6]),

$$\big|D\big(\eta(u - T_k(u))\big)\big|^{r-p} D\big(\eta(u - T_k(u))\big) = D\phi + h \tag{5}$$

并有下面的估计

$$\|D\phi\|_{\frac{r}{r-p+1}} \le C\,\big\|D\big(\eta(u - T_k(u))\big)\big\|_r^{r-p+1}, \tag{6}$$

$$\|h\|_{\frac{r}{r-p+1}} \le C(p-r)\big\|D\big(\eta(u - T_k(u))\big)\big\|_r^{r-p+1}. \tag{7}$$

引入 Hodge 分解的一个好处是 (7) 式的右端含有因子 $(p-r)$, 这将对我们的推导起重要作用. 设

$$E(\eta, u) = \big|\eta D\big(u - T_k(u)\big)\big|^{r-p} \eta D\big(u - T_k(u)\big) - \big|D\big(\eta(u - T_k(u))\big)\big|^{r-p} D\big(\eta(u - T_k(u))\big),$$

则由一个基本的关系式 (见 [7, 271 页, (4.1) 式])

$$\big|\,|X|^{-\varepsilon}X - |Y|^{\varepsilon}Y\big| \le \frac{2^\varepsilon(1+\varepsilon)}{1-\varepsilon}|X-Y|^{1-\varepsilon}, \qquad 0 < \varepsilon < 1, \quad X, Y \in R^N \tag{8}$$

得到

$$\big|E(\eta, u)\big| \le \frac{2^{p-r}(p-r+1)}{r-p+1}\big|\big(u - T_k(u)\big)D\eta\big|^{r-p+1}. \tag{9}$$

下面推导中的一个技巧是用 Hodge 分解中的 $D\phi$ 充当定义 2 中的试验函数, 我们有

$$\begin{aligned}
&\int_{B_t} a(x, u, Du) \cdot \big|\eta D\big(u - T_k(u)\big)\big|^{r-p} \eta D\big(u - T_k(u)\big) \\
=&\int_{B_t} a(x, u, Du) \cdot \big|D\big(\eta(u - T_k(u))\big)\big|^{r-p} D\big(\eta(u - T_k(u))\big) \\
&+ \int_{B_t} a(x, u, Du) \cdot E(\eta, u) \\
=&\int_{B_t} F \cdot D\phi + \int_{B_t} a(x, u, Du) \cdot h + \int_{B_t} a(x, u, Du) \cdot E(\eta, u) \\
=&I_1 + I_2 + I_3.
\end{aligned} \tag{10}$$

下面分别估计上式各项．由于当 $|u|\le k$ 时， $u=T_k(u)$, 于是左边为

$$\begin{aligned}
&\int_{B_t} a(x,u,Du)\cdot\big|\eta D\big(u-T_k(u)\big)\big|^{r-p}\eta D\big(u-T_k(u)\big)\\
=&\int_{A_{k,t}} a(x,u,Du)\cdot\big|\eta D\big(u-T_k(u)\big)\big|^{r-p}\eta D\big(u-T_k(u)\big)\\
\ge&\int_{A_{k,\tau}} a(x,u,Du)\cdot|Du|^{r-p}Du\ge\gamma_0\int_{A_{k,\tau}}|Du|^r,
\end{aligned}\tag{11}$$

而由估计式 (6) 得到

$$\begin{aligned}
|I_1|=&\Big|\int_{B_t}F\cdot D\phi\Big|=\Big|\int_{A_{k,t}}F\cdot D\phi\Big|\le\int_{A_{k,t}}|F|\cdot|D\phi|\le\|F\|_{\frac{r}{p-1}}\|D\phi\|_{\frac{r}{r-p+1}}\\
\le&C\|F\|_{\frac{r}{p-1}}\big\|D\big(\eta(u-T_k(u))\big)\big\|_r^{r-p+1}\\
=&C\Big(\int_{A_{k,t}}|F|^{\frac{r}{p-1}}\Big)^{\frac{p-1}{r}}\Big(\int_{A_{k,t}}\big|D\big(\eta(u-T_k(u))\big)\big|^r\Big)^{\frac{r-p+1}{r}}\\
\le&C\Big(\int_{A_{k,t}}|F|^{\frac{r}{p-1}}\Big)^{\frac{p-1}{r}}\Big(\int_{A_{k,t}}|D\eta|^r\big|u-T_k(u)\big|^r+\int_{A_{k,t}}|\eta|^r|Du|^r\Big)^{\frac{r-p+1}{r}}\\
\le&C\Big(\int_{A_{k,t}}|F|^{\frac{r}{p-1}}\Big)^{\frac{p-1}{r}}\Big[\Big(\int_{A_{k,t}}2^r(t-\tau)^{-r}\big|u-T_k(u)\big|^r\Big)^{\frac{r-p+1}{r}}+\Big(\int_{A_{k,t}}|Du|^r\Big)^{\frac{r-p+1}{r}}\Big].
\end{aligned}$$

由 Young 不等式得到

$$\begin{aligned}
|I_1|\le&C\int_{A_{k,t}}|F|^{\frac{r}{p-1}}+C\int_{A_{k,t}}\frac{|u|}{(t-\tau)^r}+C\varepsilon\int_{A_{k,t}}|Du|^r+C(\varepsilon)\int_{A_{k,t}}|F|^{\frac{r}{p-1}}\\
=&C\varepsilon\int_{A_{k,t}}|Du|^r+C\int_{A_{k,t}}|F|^{\frac{r}{p-1}}+C\int_{A_{k,t}}\frac{|u|^r}{(t-\tau)^r}.
\end{aligned}\tag{12}$$

由 Hodge 分解的估计式 (7) 得到

$$\begin{aligned}
|I_2|=&\Big|\int_{B_t}a(x,u,Du)\cdot h\Big|=\Big|\int_{A_{k,t}}a(x,u,Du)\cdot h\Big|\\
\le&\Big(\int_{A_{k,t}}\big|a(x,u,Du)\big|^{\frac{r}{p-1}}\Big)^{\frac{p-1}{r}}\Big(\int_{A_{k,t}}|h|^{\frac{r}{r-p+1}}\Big)^{\frac{r-p+1}{r}}\\
\le&C(p-r)\Big(\int_{A_{k,t}}\big|\gamma_1|Du|^{p-1}+k(x)+\gamma_2|u|^{p-1}\big|^{\frac{r}{p-1}}\Big)^{\frac{p-1}{r}}\\
&\cdot\Big(\int_{A_{k,t}}\big|D\big(\eta(u-T_k(u))\big)\big|^r\Big)^{\frac{r-p+1}{r}}.
\end{aligned}$$

利用 Young 不等式有

$$\begin{aligned}
|I_2|\le&C(p-r)\Big\{C\int_{A_{k,t}}\big[\gamma_1|Du|^{p-1}+k(x)+\gamma_2|u|^{p-1}\big]^{\frac{r}{p-1}}+C\int_{A_{k,t}}\big|D\big(\eta(u-T_k(u))\big)\big|^r\Big\}\\
\le&C(p-r)\Big\{C\int_{A_{k,t}}\gamma_1^{\frac{r}{p-1}}|Du|^r+\big|k(x)\big|^{\frac{r}{p-1}}+\gamma_2^{\frac{r}{p-1}}|u|^r
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+C\int_{A_{k,t}}|D\eta|^r\big|u-T_k(u)\big|^r+C\int_{A_{k,t}}|Du|^r\Big\}\\
\le& C(p-r)\int_{A_{k,t}}|Du|^r+C\int_{A_{k,t}}\big|k(x)\big|^{\frac{r}{p-1}}\\
&+C(R_1-R_0)^r\int_{A_{k,t}}\frac{|u|^r}{(R_1-R_0)^r}+C\int_{A_{k,t}}\frac{|u-T_k(u)|^r}{(t-\tau)^r}\\
\le& C(p-r)\int_{A_{k,t}}|Du|^r+C\int_{A_{k,t}}\big|k(x)\big|^{\frac{r}{p-1}}+C\int_{A_{k,t}}\frac{|u|^r}{(t-\tau)^r}.
\end{aligned}\tag{13}
$$

最后估计 $|I_3|$. 由 (9) 式得

$$
\begin{aligned}
|I_3|=&\Big|\int_{B_t}a(x,u,Du)\cdot E(\eta,u)\Big|=\Big|\int_{A_{k,t}}a(x,u,Du)\cdot E(\eta,u)\Big|\\
\le&\frac{2^{p-r}(p-r+1)}{r-p+1}\int_{A_{k,t}}\big[\gamma_1|Du|^{p-1}+k(x)+\gamma_2|u|^{p-1}\big]\,\big|u-T_k(u)\big|^{r-p+1}|D\eta|^{r-p+1}\\
\le& C\Big(\int_{A_{k,t}}\big[\gamma_1|Du|^{p-1}+k(x)+\gamma_2|u|^{p-1}\big]^{\frac{r}{p-1}}\Big)^{\frac{p-1}{r}}\Big(\int_{A_{k,t}}\big|u-T_k(u)\big|^r|D\eta|^r\Big)^{\frac{r-p+1}{r}}.
\end{aligned}
$$

由 Young 不等式得到

$$
\begin{aligned}
|I_3|\le& C\varepsilon\int_{A_{k,t}}|Du|^r+C\int_{A_{k,t}}\big|k(x)\big|^{\frac{r}{p-1}}\\
&+C(R_1-R_0)^r\int_{A_{k,t}}\frac{|u|^r}{(R_1-R_0)^r}+C(\varepsilon)\int_{A_{k,t}}\frac{|u|^r}{(t-\tau)^r}\\
\le& C\varepsilon\int_{A_{k,t}}|Du|^r+C\int_{A_{k,t}}\big|k(x)\big|^{\frac{r}{p-1}}+C\int_{A_{k,t}}\frac{|u|^r}{(t-\tau)^r}.
\end{aligned}\tag{14}
$$

联系 (10)–(14) 得到

$$
\begin{aligned}
\int_{A_{k,\tau}}|Du|^r\le& C\big(\varepsilon+(p-r)\big)\int_{A_{k,t}}|Du|^r+C\int_{A_{k,t}}\big|F(x)\big|^{\frac{r}{p-1}}\\
&+C\int_{A_{k,t}}\big|k(x)\big|^{\frac{r}{p-1}}+C\int_{A_{k,t}}\frac{|u|^r}{(t-\tau)^r}.
\end{aligned}\tag{15}
$$

先取 Max $\{1,p-1\}<r_0<p$ 满足 $C(p-r_0)=1$, 则当 $r_0<r<p$ 时，有 $0<C(p-r)=\theta_1<1$. 再取 ε 充分小，满足 $0<\varepsilon<\frac{1}{C}(1-\theta_1)$, 此时有 $0<\theta=C\big(\varepsilon+(p-r)\big)<1$, 于是从 (15) 式得到

$$
\int_{A_{k,\tau}}|Du|^r\le\theta\int_{A_{k,t}}|Du|^r+C\int_{A_{k,t}}\Big(\big|k(x)\big|^{\frac{r}{p-1}}+\big|F(x)\big|^{\frac{r}{p-1}}\Big)+C\int_{A_{k,t}}\frac{|u|^r}{(t-\tau)^r}.\tag{16}
$$

设 ρ 与 R 任意确定， $R_0\le\rho<R\le R_1$. 这样，从上述不等式得到对任意 t,τ, 使得 $\rho\le\tau<t\le R$ 成立时，有

$$
\int_{A_{k,\tau}}|Du|^r\le\theta\int_{A_{k,t}}|Du|^r+\frac{C}{(t-\tau)^r}\int_{A_{k,R}}|u|^r+C\int_{A_{k,R}}\Big(|k(x)|^{\frac{r}{p-1}}+|F(x)|^{\frac{r}{p-1}}\Big).
$$

应用引理 2 得

$$\int_{A_{k,\rho}} |Du|^r \leq \frac{C}{(R-\rho)^r} \int_{A_{k,R}} |u|^r + C \int_{A_{k,R}} \left(\left|k(x)\right|^{\frac{r}{p-1}} + \left|F(x)\right|^{\frac{r}{p-1}}\right),$$

于是 u 满足不等式 (3), 其中 $\phi_0 = \left|F(x)\right|^{\frac{r}{p-1}} + \left|k(x)\right|^{\frac{r}{p-1}}$, $\alpha = r$. 由引理 1 便得定理之结果.

致谢 本文工作的完成得益于方爱农教授曾经给予的指导，在此致谢．同时感谢审稿专家的宝贵建议.

参　考　文　献

1 Giachetti D, Porzio M M. Local Regularity Results for Minima of Functionals of the Calculus of Variation. *Nonlinear Analysis, TMA*, 2000, 39: 463–482

2 Giaquinta M. Multiple Integrals in the Calculus of Variations and Nonlinear Elliptic Systems. New Jersy: Princeton University Press, 1983

3 Ladyzhenskaya O, Ural'teseva N. Linear and Quasilinear Elliptic Equations. Math. in Science and Engineering 46. New York: Academic Press, 1968

4 Heinonen J, Kilpelainen T, Martio O. Nonlinear Potential Theory of Second Order Degenerate Elliptic Partial Differential Equations. London: Oxford University Press, 1993

5 Li Gongbao, Martio O. Stability of Solutions of Varying Degenerate Elliptic Equations. *Indiana Univ. Math. J.*, 1998, 47(3): 873–891

6 Iwaniec T, Sbordone C. Weak Minima of Variational Integrals. *J. Reine. Angew. Math.*, 1994, 454: 143–161

7 Iwaniec T, Migliaccio L, Nania L, Sbordone C. Integrability and Removability Results for Quasiregular Mappings in High Dimension. *Math. Scand*, 1994, 75: 263–279

8 Meyers N G, Elcrat A. Some Results on Regularity for Solutions of Nonlinear Elliptic Systems and Quasi-regular Functions. *Duke Math. J.*, 1975, 42: 121–136

LOCAL REGULARITY RESULT OF VERY WEAK SOLUTIONS FOR A CLASS OF QUASILINEAR ELLIPTIC EQUATION

GAO Hongya

(*College of Mathematics and Computer Science, Hebei University, Baoding* 071002)

WANG Min

(*College of Mechanization and Architecture, Hebei University, Baoding* 071002)

ZHAO Hongliang

(*Department of Mathematics and Physics, Hebei University of Science and Technology, Tangshan* 063000)

Abstract This paper considers the very weak solutions of a class of quasilinear elliptic equation. The local regularity result is obtained by using the method of Hodge decomposition.

Key words Quasilinear elliptic equation, very weak solution, local regularity, Hodge decomposition