

静电喷雾植保机具环状电极 充电电场的模型与计算^{*}

罗惕乾^① 王 泽 杨诗通 高良润
(江苏理工大学)

提 要 静电喷雾植保机具使用多种形式的充电电极,不同形式的电极产生不同的充电电场,直接影响通过电场的雾滴或粒子的荷电量及相应的荷电两相流动,从而直接影响静电植保喷雾机的性能。该文建立了环状电极充电电场的数学模型,及其勒让德函数解。

关键词 植保机械 静电喷雾 充电电场 数学模型

静电微量喷雾是近年来迅速发展和在植物保护中得到广泛应用的高新技术。荷电雾滴命中率显著提高,覆盖均匀,沉降速度快,在作物上附着量大、减少漂移损失和农药对环境的污染。静电喷雾植保机中使用多种形式的充电电极,不同形式的电极产生不同的充电电场,它直接影响通过电场的农药雾滴或微粒的荷电量及相应的荷电气-液或气-固两相流的流动状况,是决定静电喷雾植保机具性能的关键参数之一。本文研究了电极充电过程,建立了环状电极充电电场的数学模型,给出了它的勒让德函数解以及具体计算实例。

1 环状电极电位基本方程

根据电磁学理论,描述静电场的方程组为^[1]:

$$\nabla \cdot \vec{E} = \rho / \epsilon \quad (1)$$

$$\vec{E} = - \nabla V \quad (2)$$

式中 \vec{E} —电场强度; ρ —场域中电荷体密度; ϵ —介电常数; V —电位函数。

式(2)代入式(1)得到用电位函数表示的静电电场的基本方程:

$$\nabla^2 V = \frac{\rho}{\epsilon} \quad (3)$$

如果在所研究的场域中没有电荷的体密度分布,即 $\rho=0$;则式(3)变为拉普拉斯方程:

$$\nabla^2 V = 0 \quad (4)$$

在球坐标系下($0 \leq r < +\infty, 0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq \theta \leq \pi$),拉普拉斯方程可表示为:

收稿日期:1994-02-10

* 国家教委博士专项基金资助项目

① 罗惕乾,博士生,江苏省镇江市 江苏理工大学农业机械工程学院,212013

$$\frac{\partial}{\partial r}(r^2 \frac{\partial V}{\partial r}) + \frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial \theta}(\sin\theta \frac{\partial V}{\partial \theta}) + \frac{1}{\sin^2\theta} \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} = 0 \quad (5)$$

环状电极如图1所示,其半径为 a ,环上的电压为 V_0 ,不在环上产生的电位 V 满足拉普拉斯方程(4)、(5)。由于 V 是轴对称的,故与 φ 无关。此时球坐标系下的拉普拉斯方程为:

$$\frac{\partial}{\partial r}(r^2 \frac{\partial V}{\partial r}) + \frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial \theta}(\sin\theta \cdot \frac{\partial V}{\partial \theta}) = 0 \quad (6)$$

式(6)即为环状电极电位的基本方程。

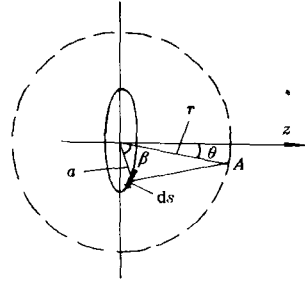


图1 环状电极

Fig. 1 Circular electrode

2 环状电极电位基本方程的勒让德函数解

式(6)分离变量 $V(r, \theta) = R(r)W(\theta)$, 可得欧拉方程和勒让德方程^[2]:

$$r^2 \frac{d^2 R}{dr^2} + 2r \frac{dR}{dr} - n(n+1)R = 0 \quad (7)$$

$$\sin\theta \frac{d}{d\theta}(\sin\theta \frac{dW}{d\theta}) + n(n+1)\sin^2\theta W = 0 \quad (8)$$

方程(7)的周期解 $R(r) = A \cdot r^n + B \cdot r^{-(n+1)}$ 。方程(8)当 n 为整数时,两个线性的独立解之一退化为 n 次多项式,称勒让德多项式,记为 $P_n(\cos\theta)$

$$P_n(\cos\theta) = \sum_{m=0}^n \frac{(-1)^m (2n-2m)!}{2^m m! (n-m)! (n-2m)!} (\cos\theta)^{(n-2m)} \quad (9)$$

则式(1)在 $0 \leq \theta \leq \pi$ 中的有界解为:

$$V(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} (A_n r^n + B_n \frac{1}{r^{n+1}}) P_n(\cos\theta) \quad (10)$$

根据实际问题,环状电极的充电电场有物理意义,则有:当 $r < a$ 时,要求 $r \rightarrow 0$ 时有界,故 $B_n = 0$,所以

$$V_{r < a} = \sum_{n=0}^{\infty} A_n r^n P_n(\cos\theta) \quad (11)$$

当 $r > a$ 时,要求 $r \rightarrow \infty$ 时有界,故 $A_n = 0$,所以:

$$V_{r > a} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{1}{r^{n+1}} P_n(\cos\theta) \quad (12)$$

式(11)和(12)给出了环状电极不在环上的空间电位分布。根据环状电极结构,求 A_n 与 B_n 的表达式。 z 轴上(即 $r=z, \theta=0$ 时)的电位,可以通过微元电荷在轴上的电位沿着圆环曲线积分得到,即

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_s \frac{\lambda ds}{\sqrt{z^2 + a^2}} \quad (13)$$

式中 λ —电荷线密度; ds —微元弧长。

将 $ds = a \cdot d\beta$ 变量代换,由式(13)积分得:

$$V = \frac{\lambda}{2\varepsilon} \left[1 + \left(\frac{z}{a} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} \quad (14)$$

式(14)展开后得:

$$V_{z < a} = \frac{\lambda}{2\varepsilon} \sum_{l=0}^{\infty} \left[\begin{matrix} -\frac{1}{2} \\ l \end{matrix} \right] \left(\frac{z}{a} \right)^{2l} \quad (15)$$

$$V_{z > a} = \frac{\lambda a}{2\varepsilon z} \sum_{l=0}^{\infty} \left[\begin{matrix} -\frac{1}{2} \\ l \end{matrix} \right] \left(\frac{a}{z} \right)^{2l} \quad (16)$$

令式(11)中的 $\theta=0$, 那么 $r=z$, 则:

$$V_{z < a}(z, 0) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n z^n P_n(1)$$

上式应与式(15)相同, 即:

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n z^n P_n(1) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\lambda}{2\varepsilon} \left[\begin{matrix} -\frac{1}{2} \\ l \end{matrix} \right] \left(\frac{z}{a} \right)^{2l}$$

则

$$A_{2l} = \frac{\lambda}{2\varepsilon} \left[\begin{matrix} -\frac{1}{2} \\ l \end{matrix} \right] \frac{1}{a^{2l}}, \quad A_{2l+1} = 0$$

代入式(11)得:

$$V_{r < a}(r, \theta) = \frac{\lambda}{2\varepsilon} \sum_{l=0}^{\infty} \left[\begin{matrix} -\frac{1}{2} \\ l \end{matrix} \right] \left(\frac{r}{a} \right)^{2l} P_{2l}(\cos\theta) \quad (17)$$

同理, 令式(12)中 $\theta=0, r=z$, 则

$$V_{z > a}(z, 0) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{1}{z^{n+1}} P_n(1)$$

上式应与式(16)相同, 即

$$\sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{1}{z^{n+1}} P_n(1) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\lambda a}{2\varepsilon z} \left[\begin{matrix} -\frac{1}{2} \\ l \end{matrix} \right] \left(\frac{a}{z} \right)^{2l}$$

则

$$B_{2l} = \frac{\lambda}{2\varepsilon} \left[\begin{matrix} -\frac{1}{2} \\ l \end{matrix} \right] a^{2l+1}, \quad B_{2l+1} = 0$$

代入式(12)得

$$V_{r > a}(r, \theta) = \frac{\lambda}{2\varepsilon} \sum_{l=0}^{\infty} \left[\begin{matrix} -\frac{1}{2} \\ l \end{matrix} \right] \left(\frac{a}{r} \right)^{2l+1} P_{2l}(\cos\theta) \quad (18)$$

式(17)和(18)即为环状电极电位方程的勒让德函数解, 由此二式可计算出环状电极的电位。

3 环状电极电位的计算

将式(17)和式(18)展开得:

$$V_{r<a}(r, \theta) = \frac{\lambda}{2\epsilon} \left[P_0(\cos\theta) - \frac{1}{2} \left(\frac{r}{a}\right)^2 P_2(\cos\theta) + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \left(\frac{r}{a}\right)^4 P_4(\cos\theta) - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \left(\frac{r}{a}\right)^6 P_6(\cos\theta) + \dots \right] \quad (19)$$

$$V_{r>a}(r, \theta) = \frac{\lambda}{2\epsilon} \left[\frac{a}{r} P_0(\cos\theta) - \frac{1}{2} \left(\frac{a}{r}\right)^3 P_2(\cos\theta) + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \left(\frac{a}{r}\right)^4 P_4(\cos\theta) - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \left(\frac{a}{r}\right)^7 P_6(\cos\theta) + \dots \right] \quad (20)$$

由式(9)得:

$$\left. \begin{aligned} P_0(\cos\theta) &= 1 \\ P_2(\cos\theta) &= \frac{1}{2}(3\cos^2\theta - 1) \\ P_4(\cos\theta) &= \frac{1}{8}(35\cos^4\theta - 30\cos^2\theta + 3) \\ \dots \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

将式(21)及具体参数(如环状电极的半径 a 为 30mm、充电电压 V_0 为 20kV、 $\frac{\lambda}{2\epsilon}$ 为 16.23kV)代入式(19)和(20),取前3项近似计算,得到环状电极以外各空间点($r \neq a$)的电位值。计算结果列入表1。给定环上的电位 V_0 及 θ 值,绘出 r 方向电位变化曲线如图2所示。给定环上的电位 V_0 及某一 r 值,绘出电位随 θ 变化的变化曲线如图3所示

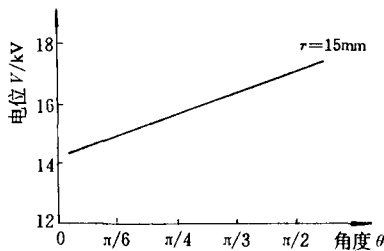


图2 $V-r$ 变化曲线

Fig. 2 Potential V vs radius r

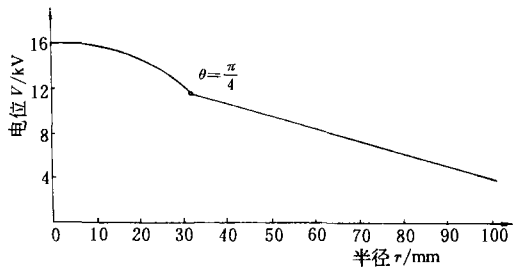


图3 $V-\theta$ 变化曲线

Fig. 3 Potential V vs angle θ

根据计算结果及绘出的曲线图可知,此电极产生的空间电位在 r 为常量时随 θ 增加而增加;而在 θ 为常量($\theta < \frac{\pi}{3}$)时,随 r 增加而降低。此电极对静电雾滴及粒子充电作用的主要范围在 $r < 100\text{mm}$ 的区域,在 $r > 500\text{mm}$ 的区域,几乎不再起作用。

表1 V 计算结果
Tab. 1 Calculated results of potentials kV

θ	r/mm											
	5	10	15	20	25	35	45	50	60	100	200	500
0	16.00	15.41	14.58	13.83	13.53	11.61	9.22	8.46	7.29	4.66	2.41	0.97
$\pi/6$	16.09	15.67	14.97	14.00	12.77	10.78	9.34	8.65	7.49	4.73	2.41	0.97
$\pi/4$	16.17	15.97	15.57	14.84	13.63	11.49	9.89	9.11	7.78	4.80	2.42	0.97
$\pi/3$	16.26	16.32	16.37	16.33	16.09	13.73	10.88	9.82	8.19	4.89	2.44	0.97
$\pi/2$	16.34	16.71	16.89	18.48	20.15	17.52	12.32	10.79	8.69	4.98	2.45	0.98

4 结 论

静电喷雾充电电极产生的充电电场直接影响静电喷雾植保机具的性能。充电电场与电极形式及其几何参数、场域中电荷体密度、农药雾滴或粒子物性(介电常数)有关。电极对粒子或雾滴充电作用的主要范围在靠近电极很小的区域,设计静电喷雾机具时必须计算出所用电极的作用范围,并选择合理的雾流速度,以保证足够的充电时间。本文建立的环状电极充电电场的数学模型可用于采用该类型电极静电喷雾机具的设计计算,对其它类型充电电极的设计计算具有参考价值。

参 考 文 献

- 1 方正明,李培芳. 工程电磁学. 浙江大学出版社,1989. 5
- 2 南京工学院数学教研组. 数学物理方程与特殊函数. 北京:人民教育出版社,1978. 11
- 3 解广润. 高压静电场. 上海:上海科学技术出版社,1987. 5
- 4 S Edward Law. Electrostatic pesticide spraying: concepts and practice. IEEE 1983, IA 19(2):160~168
- 5 G S Peter Castle, Ion I Inculet. Space charge effects in orchard spraying. IEEE 1983, IA 19(3):476~480

Numerical Model of Electrostatic Field in Electrostatic Charged Spray

Luo Tiqian Wang Ze Yang Shitong Gao Liangrun

(Jiangsu Science and Technology University)

Abstract

Several kinds of electrode shape are used in electrostatic charged spray. They directly affect particle charging and the relevant two phase flow behavior. Numerical model of the electrostatic field of a circular electrode is established. Its Legendre function solution and calculated results are obtained.

Key words Plant protection Electrostatic spray Electrocharging field Numerical model