

# 阶梯连续梁(轴)等效三弯矩方程及刚度分析

林成厚 郭华北 李进京 景奉水

(山东农业大学)

**提 要** 采用刚度折算法,将阶梯梁(轴)的弯曲变形转换成等截面梁(轴),并用奇异函数表示等截面梁的挠曲线方程,进而推导出阶梯连续梁(轴)的等效三弯矩方程。由实例分析表明,该方法便于计算机分析计算,具有一定实用价值。

**关键词** 阶梯梁 等截面梁 三弯矩方程 弯曲刚度

## Equivalent Three Bending Moment Equations and Rigidity Analysis of Continuous Ladder Beam

Lin Cheng-hou Guo Hua-bei Li Jin-jing Jing Feng-shui

(Shandong Agricultural University, Taian)

**Abstract** In this paper, with beam rigidity conversion, a ladder beam (or axis) is converted into beam (or axis) of identical cross area, of which the deflection curve equation is presented by singular function. In addition, the three bending moment equations of ladder beam (or axis) are reasoned out. An example is given for the analysis of rigidity conversion of continuous ladder beam. The method presented in the paper is convenient for computer analysis and calculation.

**Key words** Ladder beam Beam of identical cross area Three bending moment equations Flexural rigidity

对于阶梯梁(轴),一般采用数学方法研究截面惯性矩变化规律<sup>[1,2]</sup>,进而分析弯曲变形,而笔者应用刚度折算方法将变惯性矩转换成等惯性矩,然后由奇异函数及外力的形式推导阶梯连续梁(轴)的等效三弯矩方程。

### 1 在右手坐标系下,阶梯简支梁左端面的等效转角

#### 1.1 在复杂载荷作用下,左端面转角

有一阶梯简支梁,如图1(a)所示,建立右手坐标系,梁上第 $i$ 区段的直径为 $Q_i$ (惯性矩为 $I_i$ ),载荷 $P_i, M_i, q_i$ 及其位置 $a_i, b_i, [c_{i1}, c_{i2}]$ 与长度 $l_i$ 均服从图中的编号,并规定 $P_i, q_i$ 向上, $M_i$ 顺时针转向为正。若选用一直径为 $Q_c$ (惯性矩为 $I_c$ )的等截面梁代替之,在 $x$ 处,两者的弯

收稿日期:1996-12-09 1997-04-25修订

林成厚,副教授,泰安市岱宗大街86号 山东农业大学工程技术学院,271018

矩、惯性矩分别为  $M(x), I(x)$  与  $\bar{M}(x), I_c$ , 根据他们弯曲变形相同的条件, 即  $\frac{M(x)}{E I(x)} = \frac{\bar{M}(x)}{E I_c}$ , 不难证明, 作用在等截面梁上的载荷  $\bar{P}_i, \bar{M}_i, \bar{q}_i$  及附加载荷  $\bar{F}_i$  和  $\bar{m}_i$ , 如图1(b), 与阶梯梁上的载荷  $P_i, M_i, q_i$  及在第  $i$  处(即  $\varphi$  与  $\varphi_{i-1}$  区段交界处)的剪力  $Q_i$  和弯矩  $m_i$  之间的关系:

$$\begin{aligned} \bar{P}_i &= P_i \cdot K_i; & \bar{M}_i &= M_i \cdot K_i; \\ \bar{q}_i &= q_i \cdot K_i \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \bar{F}_i &= Q_i(K_{i+1} - K_i); \\ \bar{m}_i &= m_i(K_{i+1} - K_i) \end{aligned} \quad (2)$$

其支反力为:  $\bar{R}_A = R_A \cdot K_1$ ;

$$\bar{R}_B = R_B \cdot K_j \quad (3)$$

而  $K_i = \frac{E I_c}{E I_i} = \left(\frac{\varphi}{\varphi_i}\right)^4$

$$(i = 1, 2, \dots, j) \quad (4)$$

$K_i$  称为刚度折算系数, 通过以上载荷折算及增添附加载荷, 将阶梯梁图1(a)的弯曲变形转换成等截面梁(图1(b))的方法, 称之为刚度折算法。

若将图1(b)视为自由体, 用外力形式表示其弯矩方程<sup>[3]</sup>:

$$\begin{aligned} \bar{M}(x) &= \bar{R}_A x^1 + \sum_{i=1}^j \bar{P}_i x - a_i^1 + \sum_{i=1}^j \bar{M}_i x - b_i^0 \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^j \bar{q}_i [x - c_{i1}]^2 - [x - c_{i2}]^2 \\ &+ \sum_{i=1}^{j-1} \bar{F}_i x - l_i^1 + \sum_{i=1}^{j-1} \bar{m}_i x - l_i^0 + \bar{R}_B x - l^1 \end{aligned} \quad (5)$$

上式中的奇异函数定义为  $x - a = \begin{cases} (x - a) & x > a \\ 0 & x < a \end{cases}$

其积分规则  $\int (x - a)^n dx = \frac{(x - a)^{n+1}}{n + 1} \quad (n \neq 0)$

由奇异函数定义可知, 对于有限长的简支梁, (5)式中最后一项自然为零, 对余下项积分两次得

$$\begin{aligned} E I_c y &= \frac{1}{6} \bar{R}_A x^3 + \frac{1}{6} \sum_{i=1}^j \bar{P}_i x^3 - a_i^3 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^j \bar{M}_i x^3 - b_i^2 + \frac{1}{24} \sum_{i=1}^j \bar{q}_i [x - c_{i1}]^4 \\ &- [x - c_{i2}]^4 + \frac{1}{6} \sum_{i=1}^{j-1} \bar{F}_i x^3 - l_i^3 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{j-1} \bar{m}_i x^3 - l_i^2 + c_1 x + c_2 \end{aligned} \quad (6)$$

由支承条件知,  $y(0) = y(L_2) = 0$ , 所以  $c_2 = 0$ , 当  $x = L_2$  并代入(6)式, 令

$$\Delta_2 = \bar{R}_A \cdot L^3 + \sum_{i=1}^j \bar{P}_i (L_2 - a_i)^3 + 3 \sum_{i=1}^j \bar{M}_i (L_2 - b_i)^2 + \frac{1}{4} \sum_{i=1}^j \bar{q}_i [(L_2 - c_{i1})^4 - (L_2 - c_{i2})^4]$$

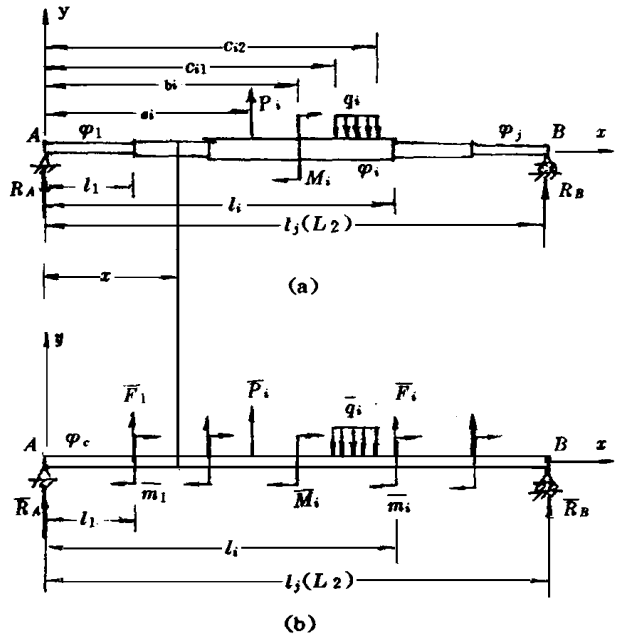


图1 右手坐标系下, 阶梯简支梁及其等效梁

$$+ \sum_{i=1}^{j-1} \bar{F}_i (L_2 - l_i)^3 + 3 \sum_{i=1}^{j-1} \bar{m}_i (L_2 - l_i)^2 \tag{7}$$

得  $c_1 = - \frac{\Delta_2}{6L_2}$  故  $\theta = - \frac{\Delta_2}{6E I_c \cdot L_2}$  (8)

### 1.2 集中力偶作用在两端支座时,左端面转角

若在形如图1(a)所示简支梁的两端支座处,分别作用集中力偶  $M_A$  (顺时针转向)、 $M_B$  (逆时针转向)。同理可用一等截面梁来代替之,则等截面梁的两支座处作用的集中力偶分别为  $\bar{M}_A$ 、 $\bar{M}_B$  及梁上的附加载荷  $\bar{F}_i$  和  $\bar{m}_i$  值分别为

$$\left. \begin{aligned} \bar{M}_A &= M_A \cdot K_1 & \bar{M}_B &= M_B \cdot K_j \\ \bar{F}_i &= - \frac{M_A - M_B}{L_2} (K_{i+1} - K_i); & \bar{m}_i &= (M_A - \frac{M_A - M_B}{L_2} l_i) \cdot (K_{i+1} - K_i) \end{aligned} \right\} \tag{9}$$

及支反力  $\bar{R}_A = - \frac{M_A - M_B}{L_2} K_1$ ;  $\bar{R}_B = \frac{M_A - M_B}{L_2} K_j$  (10)

将(9)、(10)两式代入(6)式中,同理  $c_2 = 0$ , 当  $x = L_2, y(L_2) = 0$ , 即

$$\frac{1}{3} M_A \cdot L_2^2 \cdot [K_1 + \sum_{i=1}^{j-1} (1 - \frac{l_i}{L_2})^3 \cdot (K_{i+1} - K_i)] + \frac{1}{6} M_B \cdot L_2^2 \cdot [(K_1 + \sum_{i=1}^{j-1} (1 - \frac{l_i}{L_2})^3 \cdot (K_{i+1} - K_i) + 3 \sum_{j=1}^{j-1} (1 - \frac{l_i}{L_2})^2 \cdot \frac{l_i}{L_2} \cdot (K_{i+1} - K_i)] + c_1 \cdot L_2 = 0$$

若令  $\left\{ \begin{aligned} \alpha &= \frac{l_i}{L_2} \\ \delta_2 &= K_1 + \sum_{i=1}^{j-1} (1 - \alpha)^3 \cdot (K_{i+1} - K_i) \\ \beta_2 &= \sum_{i=1}^{j-1} (1 - \alpha)^2 \cdot \alpha \cdot (K_{i+1} - K_i) \end{aligned} \right. \tag{11}$

则得  $c_1 = - \frac{1}{3} M_A \cdot L_2 \cdot \delta_2 - \frac{1}{6} M_B \cdot L_2 \cdot (\delta_2 + 3\beta_2)$

故  $\theta = - \frac{1}{6E I_c} [2M_A \cdot L_2 \cdot \delta_2 + M_B \cdot L_2 \cdot (\delta_2 + 3\beta_2)]$  (12)

## 2. 在左手坐标系下,阶梯简支梁右端面的等效转角

### 2.1 在复杂载荷作用下,右端面转角

阶梯简支梁如图2(a)所示,建立左手坐标系,图中的编号类似图1(a)中所规定,但  $M_i$  以逆时针转向为正。同理,与之相应的等截面梁上的载荷  $\bar{P}_i, \bar{M}_i, \bar{q}_i$  及附加载荷  $\bar{F}_i$  和  $\bar{m}_i$  (如图2(b))分别等于

$$\left. \begin{aligned} \bar{P}_i &= P_i \cdot K_i; & \bar{M}_i &= M_i \cdot K_i \\ \bar{q}_i &= q_i \cdot K_i; & \bar{F}_i &= - Q_i \cdot (K_{i+1} - K_i) \\ \bar{m}_i &= m_i \cdot (K_{i+1} - K_i) \end{aligned} \right\} \tag{13}$$

支反力  $\bar{R}_A = R_A \cdot K_1$ ;  $\bar{R}_B = R_B \cdot K_j$ ; (14)

其中  $K_i = E I_c / E I_i = (\varphi_i / \varphi_i)^4$  ( $i = 1, 2, \dots, j$ ) (15)

与前同理,按照公式(6)、(7),可得  $c_1 = - \frac{\Delta_1}{6L_1}$ , 故

$$\theta = - \frac{\Delta_1}{6E I_c \cdot L_1} \tag{16}$$

### 2.2 集中力偶作用在两端支座时,右端面转角

形如图2(a)阶梯简支梁, 在A、B两支座分别作用 $M_A$  (逆时针转向)、 $M_B$  (顺时针转向)。

同理, 当  $x = L_1, y(L_1) = 0$ , 若令

$$\begin{cases} \alpha_i = \frac{L_i}{L_1} \\ \delta_i = K_1 + \prod_{i=1}^{j-1} (1 - \alpha_i)^3 \cdot (K_{i+1} - K_i) \\ \beta_i = \prod_{i=1}^{j-1} (1 - \alpha_i)^2 \cdot \alpha_i \cdot (K_{i+1} - K_i) \end{cases} \quad (17)$$

按前述方程可得  $c_1 = -\frac{1}{3}M_A \cdot L_1 \cdot \delta_1 - \frac{1}{6}M_B \cdot L_1 \cdot (\delta_1 + 3\beta_1)$

故  $\theta = -\frac{1}{6E I_c} [2M_A \cdot L_1 \cdot \delta_1 + M_B \cdot L_1 \cdot (\delta_1 + 3\beta_1)] \quad (18)$

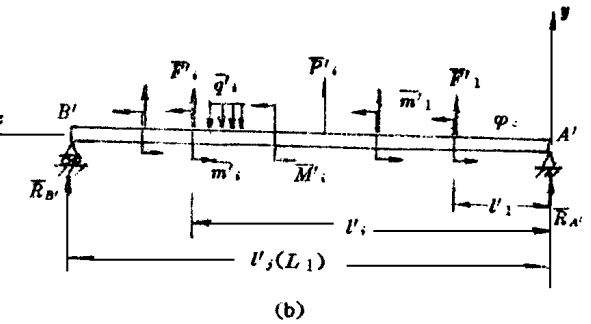
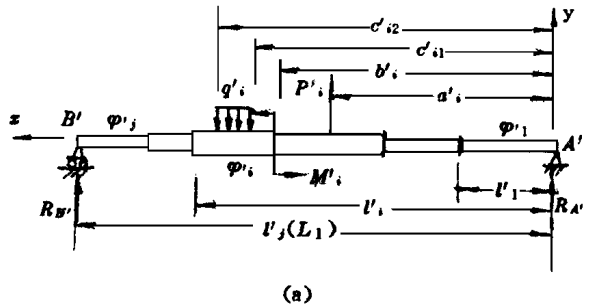


图2 左手坐标系下, 阶梯简支梁及其等效梁

### 3 阶梯连续梁的等效三弯矩方程

有一阶梯连续梁, 选取中间第  $n$  支座的相邻左右两跨为例, 沿支座横截面假想地切开, 装上中间铰链, 代之以相应的约束力偶  $M_{n-1}, M_n, M_{n+1}$ , 使之成为左右两跨简支梁, 如图3所示。分别研究左右两跨简支梁在载荷与约束力偶作用下, 第  $n$  支座两侧面的转角  $\theta_n$  和  $\theta_n$  值。

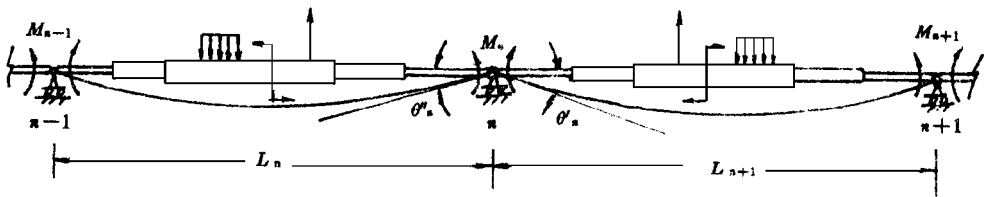


图3 第  $n$  支座的左右两跨简支梁

首先研究右跨, 建立右手坐标系, 并用直径  $\varphi$  的等截面梁代替之, 形如图1, 其左端面的转角  $\theta_n$ , 分别等于在载荷与支座处集中力偶单独作用下, 左端面的等效转角的叠加。所以, 他们分别利用公式(8)、(12), 将公式中的有关字符作适当变换, 叠加的结果为

$$\theta_n = -\frac{\Delta_{n+1}}{6E I_c L_{n+1}} - \frac{1}{6E I_c} [2M_n \cdot L_{n+1} \cdot \delta_{n+1} + M_{n+1} \cdot L_{n+1} \cdot (\delta_{n+1} + 3\beta_{n+1})] \quad (19)$$

其次研究左跨, 建立左手坐标系, 形如图2, 同理, 其右端面的转角  $\theta_n$  为

$$\theta_n = -\frac{\Delta_n}{6E I_c L_n} - \frac{1}{6E I_c} [2M_n \cdot L_n \cdot \delta_n + M_{n-1} \cdot L_n \cdot (\delta_n + 3\beta_n)] \quad (20)$$

最后根据变形协调条件:  $\theta_n = -\theta_n$ , 整理得

$$M_{n-1} L_n (\delta_n + 3\beta_n) + 2M_n (\delta_n L_n + \delta_{n+1} L_{n+1}) + M_{n+1} L_{n+1} (\delta_{n+1} + 3\beta_{n+1}) = -\frac{\Delta_n}{L_n} - \frac{\Delta_{n+1}}{L_{n+1}} \quad (21)$$

式(21)称为阶梯连续梁的等效三弯矩方程。式中  $\Delta_{n+1}$ 、 $\delta_{n+1}$ 、 $\beta_{n+1}$  及  $\Delta_n$ 、 $\delta_n$ 、 $\beta_n$  均可用上  
述各式计算。

### 4 应用实例

某螺旋幕屏压力机的主轴,几何形状、尺寸大小、载荷及支承情况如图4所示。设材料的  
弹性模量  $E = 200 \text{ GPa}$ , 允许变形  $[f] = \frac{l}{10\,000} \sim \frac{5l}{10\,000}$ , 试校核其刚度。

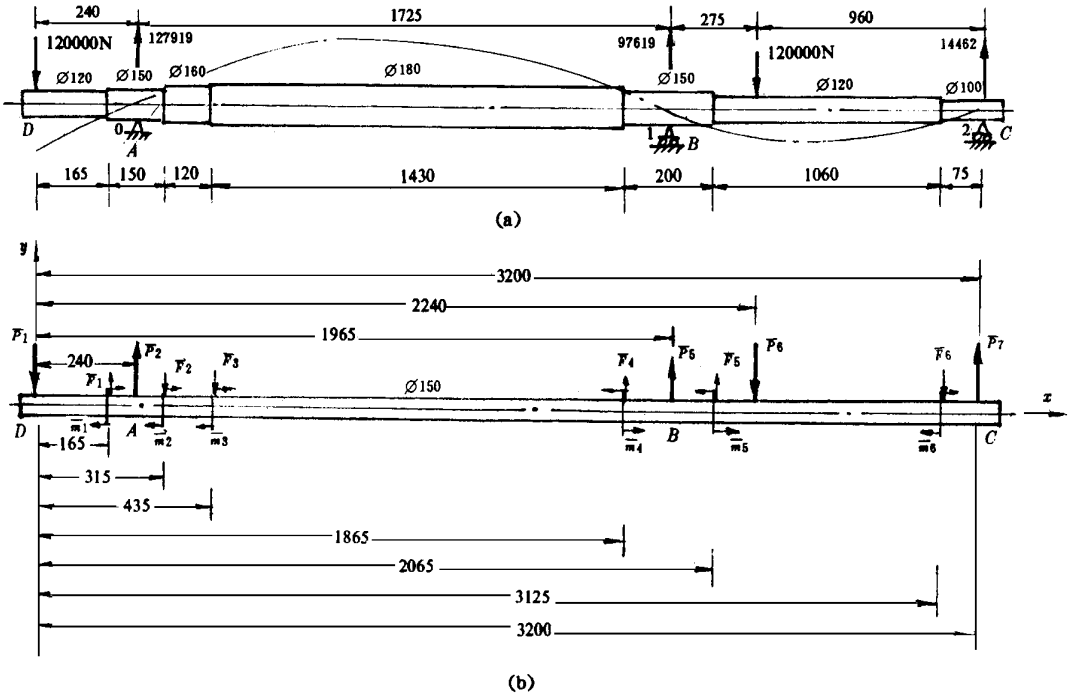


图4 螺旋幕屏压力机的主轴及其等效梁

#### 4.1 支座及跨度编号

编号如图4(a), 根据符号规则, 这时  $n = 1, M_{n-1} = M_0 = -2.88 \times 10^7 \text{ N}\cdot\text{mm}, M_n = M_1 = M_B, M_{n+1} = M_2 = 0, L_1 = L_{AB} = 1725 \text{ mm}, L_2 = L_{BC} = 1235 \text{ mm}, \varphi_i = 150, 180, 160, 150 \text{ mm}$ 。

#### 4.2 确定跨度 $L_1$ 简支梁 $AB$ 的几何量

以  $B$  为原点, 建立左手坐标系,  $i = 1, 2, 3, 4; \varphi_i = 150, 180, 160, 150; K_i = 1, 0.4823, 0.7725, 1; l_i = 100, 1530, 1650, 1725; \alpha_i = 0.0580, 0.8870, 0.9566, 1$ 。

利用以上数据与式(17)计算:

$$\delta_n = \delta_1 = K_1 + \sum_{i=1}^3 (1 - \alpha_i)^3 \cdot (K_{i+1} - K_i) = 0.5677$$

$$\beta_n = \beta_1 = \sum_{i=1}^3 (1 - \alpha_i)^2 \cdot \alpha_i \cdot (K_{i+1} - K_i) = -0.0229$$

$$\Delta_n = \Delta_1 = 0$$

#### 4.3 确定跨度 $L_2$ 简支梁 $BC$ 的几何量与物理量



以  $B$  为原点, 建立右手坐标系。  $i=1, 2, 3$ ;  $Q_i=150, 120, 100$ ;  $K_i=1, 2.4414, 5.0625$ ;  $\bar{P}_i=0, -2.9297 \times 10^5, 0$ ;  $a_i=0, 275, 0$ ;  $\bar{F}_i=1.3445 \times 10^5, -7.0038 \times 10^4$ ;  $\bar{m}_i=1.3445 \times 10^7, 5.2529 \times 10^6$ ;  $l_i=100, 1160, 1235$ ;  $\alpha=0.0810, 0.9393, 1$ ;  $\bar{R}_1=93297$ 。用以上数据及式(11)、(7)计算得

$$\delta_{n+1} = \delta_2 = K_1 + \sum_{i=1}^2 (1 - \alpha)^3 \cdot (K_{i+1} - K_i) = 2.1193$$

$$\beta_{n+1} = \beta_2 = \sum_{i=1}^2 (1 - \alpha)^2 \cdot \alpha \cdot (K_{i+1} - K_i) = 0.1077$$

$$\Delta_{n+1} = \Delta_2 = \bar{R}_1 \cdot L^3 + \sum_{i=1}^3 \bar{P}_i (L_2 - a_i)^3 + \sum_{i=1}^2 \bar{F}_i (L_2 - l_i)^3 + 3 \sum_{i=1}^2 \bar{m}_i (L_2 - l_i)^2 = 1.6511 \times 10^{14}$$

#### 4.4 建立跨度 $L_1$ 和 $L_2$ 的等效三弯矩方程并求解

将以上所计算出的数据代入(21)式, 解得:  $M_1 = M_B = -1.5139 \times 10^7 \text{ N} \cdot \text{mm}$

#### 4.5 确定阶梯连续梁各支反力

由静力平衡条件, 算得:  $R_A = 127919 \text{ N}$ ,  $R_B = 97619 \text{ N}$ ,  $R_C = 14462 \text{ N}$ , 见图4(a)所示。

#### 4.6 建立阶梯连续梁的等效挠曲线方程, 并进行刚度分析

如图4(b), 建立右手坐标系, 仿效公式(6), 建立如下方程

$$E I_c y = \frac{1}{6} \sum_{i=1}^7 \bar{P}_i x - a_i^3 + \frac{1}{6} \sum_{i=1}^6 \bar{F}_i x - l_i^3 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^6 \bar{m}_i x - l_i^2 + c_1 x + c_2 \quad (22)$$

上式中:  $\bar{P}_i$  含有支反力。根据图4所示阶梯梁的几何形状及其外力, 由刚度折算法确定等截面梁上的外力, 再由公式(22)及  $y(x_A) = y(x_B) = 0$ , 联立解得

$$c_1 = 1.7894 \times 10^{10}, \quad c_2 = -3.7119 \times 10^{12}$$

$$\text{则, } E I_c y = \frac{1}{6} \sum_{i=1}^7 \bar{P}_i x - a_i^3 + \frac{1}{6} \sum_{i=1}^6 \bar{F}_i x - l_i^3 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^6 \bar{m}_i x - l_i^2 + 1.7894 \times 10^{10} \cdot x - 3.7119 \times 10^{12} \quad (23)$$

$$\text{式中 } E = 200 \times 10^3 \text{ N/mm}^2, \quad I_c = \frac{\pi}{64} \times 150^4 \text{ mm}^4$$

(23)式称为该阶梯连续梁的等效挠曲线方程。以此为数学模型, 借助微机, 计算梁上诸点的挠度值并绘制挠曲线(图4(a))结果表明, 当  $x = 1060 \text{ mm}$ ,  $y_{\max} = 0.8172 \text{ mm}$  而  $[f] = 0.1725 \sim 0.8625 \text{ mm}$ , 故该压力机主轴具有足够的刚度, 符合设计要求。

## 5 结 论

阶梯连续梁(轴)等效三弯矩方程是在等截面连续梁的基础上推导出来, 因此在形式上与等截面连续梁的三弯矩方程相似<sup>[4]</sup>, 便于记忆, 比文献[5]提供的方程易计算, 方程的几何与物理量, 即  $\Delta_{n+1}$ ,  $\delta_{n+1}$ ,  $\beta_{n+1}$  及  $\Delta_n$ ,  $\delta_n$ ,  $\beta_n$ , 可使用计算器或微机运算, 完全符合工程要求。

### 参 考 文 献

- 1 马启民 阶梯轴弯曲变形的拉氏解法 力学与实践, 1987(1): 23~ 24
- 2 李建成 计算变截面梁变形的通用方程 力学与实践, 1988(1): 37~ 39
- 3 [美]W A 纳什著 材料力学的理论与问题 杨春生译. 北京: 国防工业出版社, 1985. 292~ 307
- 4 刘鸿文主编. 材料力学(第二版下册). 北京: 高等教育出版社, 1989. 74~ 78
- 5 王学理. 连续跨越多个支座的阶梯梁(轴)的三弯矩方程. 力学与实践, 1985(4): 26~ 28