

二维谷仓通风方程的有限差分解法

徐泳^① 华云龙

(北京农业大学)

提 要 该文将基于控制容积公式的一种差分格式应用于求解 Brooker 和 Segerlind 所建立的二维谷仓通风非线性方程,并研讨了相应边界条件的处理技巧。通过对求解常阻力参数下的 Brooker 模型仓问题与其他文献的比较证实本格式是可行的,并与四边形等参元有相同精度。该文还提供了用该格式求解利用 Brooker 玉米阻力实验数据和进口压力为 250Pa、500Pa 和 750Pa 三种工况下仓内 6 个典型算点的压力和压力等值线图,与 Brooker 的实验结果和 Miketinac 等人的数值结果压力分布大体一致,其差值小于 3%。

关键词 谷仓 通风 控制容积 有限差分

A Finite Difference Scheme for Solviug 2-Dimentional Airflow Equation of Grain Bins

Xu Yong Hua Yunlong

(Beijing Agricultural Engineering University)

Abstract A finite difference scheme based on control-volume formulation (CVF) is applied to solving the 2-d non-linear airflow equation of grain bin established by Brooker and Segerlind. Some techniques used to manipulate boundary conditions are studied. The scheme is validated by numerically solving Brooker's model with constant resistant parameters, comparison with other research results shows the CVF scheme has the same accuracy as the Q4 element. Pressure values on six special points and contours computed with the scheme under inlet pressure of 250 Pa, 500 Pa and 750 Pa using Brooker's experimental resistant parameters of corn are presented, which are compared with Brooker's experimental results and the numerical results by Miketinac et al, showing a general consistency with a deviation of less than 3%.

Key words Grain bin Airflow Control volume Finite difference

谷仓通风的数值研究日益引起农业工程界的重视,Shedd^[1]于 50 年代通过实验研究了谷床对经过气流的阻力,提出流速和压力梯度间非线性关系的公式。Brooker^[2,3]在此基础上导出了阻力参数不变时谷仓通风的控制方程,并用差分法求解了一个矩形模型仓在不同进口压力下仓内的压力分布,与实验结果进行了比较。Segerlind^[4]进一步导出了

收稿日期:1994-01-10 1995-01-09 修订

① 徐泳,副教授,北京市清华东路 北京农业大学材料力学教研室,100083

二维谷仓通风方程的一般形式,并用有限元法(T6单元)求解了Brooker模型仓问题。其后有人用有限元法解了有关通风问题。^[5~8]这类拟调和方程的有限元解法是成熟的^[9]。

据作者所知,自从 Segerlind 用有限元法求解二维谷仓通风方程后,未见有人再用差分法求解这一方程,而 Brooker 所求解的方程只是方程一般形式的近似。另一方面,有限差分法近年来的发展,例如控制容积公式和贴体坐标的引入使其在传热与流动计算中仍占据重要地位。本文拟从求解 Brooker 模型仓问题入手,逐步研究差分法对谷仓通风及其相关问题的适用性,以期得出相应的结论。

1 控制方程及边界条件

据文献[4],Segerlind 导出的二维谷仓通风基本控制方程为一典型的拟调和方程

$$\frac{\partial}{\partial x}(-G \frac{\partial p}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y}(-G \frac{\partial p}{\partial y}) = 0 \quad (1)$$

式中 p 为压力, G 为散体渗透率由下式确定

$$G = A[(\frac{\partial p}{\partial x})^2 + (\frac{\partial p}{\partial y})^2]^{\frac{B-1}{2}} \quad (2)$$

式中 A, B 是由具体谷物介质流阻力实验确定的阻力参数。

方程(1)和(2)所采用的基本假定是谷床介质应是均匀和各向同性的,这时气流流速垂直于等压面,并沿压力梯度的负向,即速度分量

$$v_x = -G \frac{\partial p}{\partial x}, v_y = -G \frac{\partial p}{\partial y} \quad (3)$$

如果取式(2)中 A 为常数,由(1)可得 Brooker 的通风方程

$$[(\frac{\partial p}{\partial x})^2 + (\frac{\partial p}{\partial y})^2] \cdot (\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2}) - (1-B)[(\frac{\partial p}{\partial x})^2 \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial p}{\partial x} \frac{\partial p}{\partial y} \frac{\partial^2 p}{\partial x \partial y} + (\frac{\partial p}{\partial y})^2 \frac{\partial^2 p}{\partial y^2}] = 0 \quad (4)$$

因实验数据中参数 A 和 B 同随压力梯度 $\frac{\partial p}{\partial n}$ 变化,取 A 为常数即等于限定了 B ,故方程(4)实际上是假定谷床阻力与气流速度无关,这显然与 Shedd 的结论不一致,只是一种近似。特别地,Brooker^[2]曾取 $B=1$ 进行计算,这时(4)已退化为 Laplace 方程。

所取边界条件通常为在入口处给定压力 p_0 ,在谷床上表面处取压力 $p=0$ 。仓壁处气流不可通过,故取 $\frac{\partial p}{\partial n}=0$ 。

2 差分格式及边界条件处理

根据 Patankar^[10]所述基于控制容积的差分方法,可将全域划分为一定数量的差分网络,参看图1。图中在实线相交处定义压力,在虚、实线交点定义 G ,为求 G 之值还需利用双线性插值法求得虚、虚线交点处的压力值。

如当前压力求值点为 P ,取阴影部分作为控制容积,由(1)可得内点的差分格式

$$- [G_e \frac{p_e - p_P}{(dx)_e} - G_w \frac{p_P - p_w}{(dx)_w}] \frac{1}{Dx} - [G_n \frac{p_n - p_P}{(dy)_n} - G_s \frac{p_P - p_s}{(dy)_s}] \cdot \frac{1}{Dy} = 0 \quad (5)$$

式中 G_e, G_w, G_n 和 G_s 由分别由 e, w, n 和 s 点的上、下、左、右点的压力决定. 例如对 e 点有

$$\left(\frac{\partial p}{\partial n}\right)_e = \left[\left(\frac{p_e - p_w}{(dx)_e}\right)^2 + \left(\frac{p_e - p_n}{Dy}\right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (6)$$

$$G_e = A \left(\frac{\partial p}{\partial n}\right)_e^{B-1} \quad (7)$$

式中 A, B 值由 $\frac{\partial p}{\partial n}$ 之值依据实验资料给定.

边界条件的处理也可结合图 1 加以说明.

(1) 对于第一类边条件, 即某条边上给定 p_0 (例如图 1 中的 $NE-SE$ 边), 由不需任何处理即可求内点 P 的压力 p_r ;

(2) 对第二类边条件 $\frac{\partial p}{\partial n} = 0$, 对于立壁即 $\frac{\partial p}{\partial x} = 0$ 设 $N-S$ 为左壁边界, 欲求壁上 P 点压力 p_r , 这时对式 (5) 即相当于 $(p_r - p_w) / (dx)_w = 0$, 因 p_w 未知, 采用式 (5) 迭代时可以采取 p_w 不作定义而直接令 $G_w = 0$ 来实现, 这时可理解为 $(dx)_w \rightarrow 0, Dx \rightarrow (dx)_e$ 求 p_r 的控制容积变为 $n-s$ 右边的阴影部分. 对水平壁 $\frac{\partial p}{\partial y} = 0$ 的处理方法与此类似, 不赘述. 对于立壁与水平壁相交处的处理则可将上述两种处理结合使用. 这样就可以采用同一种迭代格式 (5) 求出所有点和边界点上的压力值.

为防止开始迭代时 $\frac{\partial p}{\partial n} = 0$ 导致求 G 时溢出, 可在此时对 $\frac{\partial p}{\partial n}$ 赋一小值 (例如 10^{-6}). 至于初值选取问题, 作者体会是从零初值开始迭代收敛过程较平稳.

3 算例分析

Brooker 所采用的模型仓如图 2 所示. 仓高 $h = 243.84 \text{ cm}$, 宽 $b = 121.92 \text{ cm}$, 进风口位于底部中央故可利用对称性取其左半部计算, 给定边界条件如图示.

为简单起见将全域剖分为 15×60 均分网格 (粗网格) 和 30×120 均分网格 (密网格), 对粗网格 (参看图 3) 取 $p_0 = 250 \text{ Pa}, 500 \text{ Pa}$ 和 750 Pa 三种工况计算, 对密网格仅取 $p_0 = 500 \text{ Pa}$ 计算.

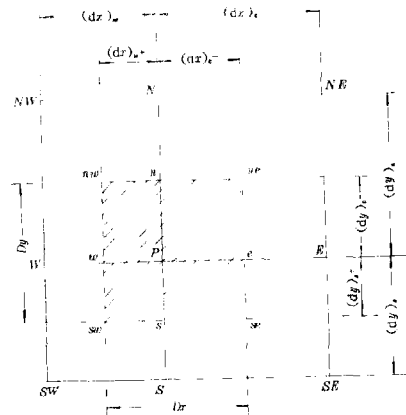


图 1 差分网格的控制容积

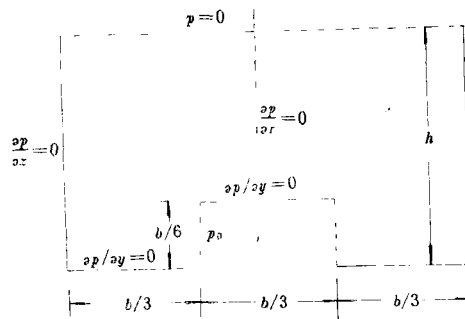


图 2 Brooker 的模型

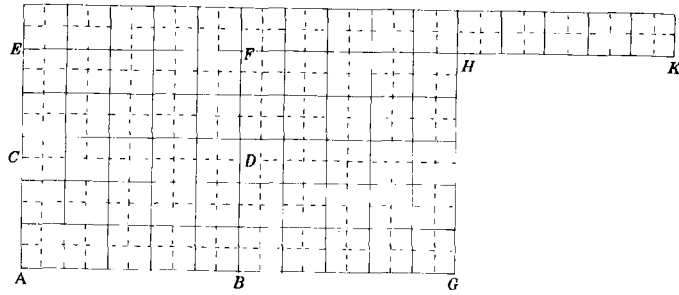


图 3 粗分网格和部分算点位置

本文计算采用了 Brooker^[3]实验所用玉米的阻力参数 A 和 B 的数据。此数据在 [3] 中以对数形式的纵横坐标绘出，而在 Segerlind^[4] 和其他文献中均按 $\frac{\partial p}{\partial n}$ 不同区段时列表给出。作者在采用该表计算时发现迭代残差出现跳动影响收敛的现象，故改用图 4 所示的分段线性插值的折线图形关系，效果较好。

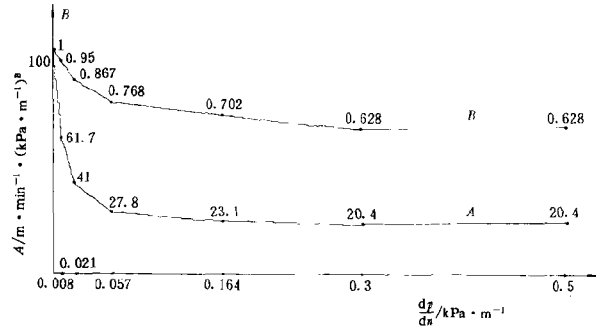


图 4 分段线性阻力参数

表 1 给出了当 A 为常数, $B=0.6$ 和进风口压力 $p_0=500 \text{ Pa}$ 时部分算点 (见图 3 中 $A \sim F$) 上的压力值与各文献相应值比较。需要说明的是此时方程 (1) 退化为方程 (4), 这里只是为了比较。

表 1 不同研究者部分算点上的压力值比较 ($p_0=500 \text{ Pa}, B=0.6$) 单位: Pa

研究者	A	B	C	D	E	F	备注
Brooker (1961)	447.0	457.0	445.0	454.5	437.0	445.0	FDM, 159 个点
Segerlind (1982)	438.3	450.5	436.8	447.5	428.3	435.8	FEM, 32 个 T6 单元
Miketinac (1985)	409.8	424.5	397.5	405.5	364.8	365.0	FEM, 200 个 T6 单元, 奇点 H 附近加密网格
冯云田等 (1992)	425.4	438.8	422.9	434.7	414.2	422.3	FEM, 700 个 Q4 单元
本文粗网格	430.1	442.8	427.7	439.0	419.2	427.3	FDM, 约 860 个控制容积

从表 1 可看出本文粗网格均分时的结果与冯云田等^[8]的结果非常相近, 各点仅差 1% 左右, 说明在网格剖分相当时, 控制容积与四边形 Q4 单元计算精度几乎相同; 还可看出 Brooker^[2]和 Segerlind^[4]的结果均比本文和冯云田结果高些, 差值与网格剖分疏密和单元选取有关, 插值函数阶次高者计算精度明显高于阶次低者。Miketinac^[5]的结果是用 200 个 T6 单元且在奇点 H 附近加密利用大型程序包实现的, 故各点算值较小似可说明加密后较好地反映了进口附近压力梯度大的特点而使离进口处较远处压力值变小, 但文献 [5] 压力数值与

其他文献相比无论绝对数还是相对数均偏差甚大,如在 F 点处 p_F/p_0 值与本文竟差 12.5%, 反映规律也不大相同。

表 2 给出了不同压力工况下根据文献[4]中的表或图 4 确定参数 A 、 B 值时文献[5]和本文在部分算点处的无量纲压力 P 值($P=p/p_0$)。从表中可以看出所反映的压力分布与本文以及表 1 中 Segerlind 及冯云田的结论与本文结果的分布规律都相同,但表 2 中本文结果比文献[5]平均大 2.63%,但二者最大差值也不超过 3%。

表 2 三种压力工况下按变阻力参数求解的名义压力 P 值

进口压力/Pa	文 献	算点名义压力 $P(p/p_0, \%)$					
		A	B	C	D	E	F
250	Miketinac	83.51	86.50	82.90	85.55	81.02	82.71
	本文细网格	86.08	88.80	85.52	87.96	83.76	85.44
500	Miketinac	82.85	85.85	82.24	84.88	80.37	82.04
	本文细网格	85.74	88.44	85.20	87.62	83.42	85.08
750	Miketinac	82.84	85.84	82.27	84.87	80.41	82.05
	本文细网格	85.33	88.00	84.80	87.19	83.05	84.69

试验比较 Brooker 模型仓实验, Miketinac 和本文数值计算所得的三种进口压力下的压力等值线图。可以看出三者主要区别是 85% 等值线的位置出入较大, 这出现在 A 、 K (见图 3) 两奇点附近的滞流区域, 在其他位置的各等值线则相当接近。

对于上述非线性方程的数值解精度问题, 需要说明如下几点: (1) 评判比较的准则问题。对方程(1)和(4)而言, 当 $B=1$ 时将是线性的 Laplace 方程, 这时正确的结果应当相同或彼此非常接近, 而现有文献[2]、[4]、[5]和[8]却不尽相同, 说明有的结果剖分不够细或处理失当[5], 再进行非线性结果比较信度将受影响; (2) 非线性方程一般无解析解可资比较, 故与实验进行比较是重要方法, 但 Brooker 的实验并未进行测试精度方面的分析, 且历时 25 年并未有更新的结果出现, 另一因素是方程(1)、(4)都假定气流阻力参数是各向同性的, 与实验谷床性质有差异; (3) 本文与[5]的比较尚无法判定哪个结果更准确, 除本文已对 A 、 B 取值进行改进外, 文[5]表中数值出现某些明显疑点和未对网格剖分作具体描述使人难以判断其准确性。在别无文献可作进一步比较情况下作者将表 2 中细网格结果与同情况下粗网格结果比较, 发现同点压力差仅为 1.1% 左右。

4 结 语

1) 本文数值求解实践表明控制容积差分法^[10]完全适于非线性谷仓通风方程解算, 在同等剖分下与 Q4 有限单元精度相当;

2) 有限差分法解算通风方程具有编程简单(采用直网格剖分时程序总长度仅为 260 句)、算题规模大(本文中细网格计算也可在 PC386 微机上只用基本内存情况下运行)等优点, 但通用性不及有限元法;

3) 有必要对 Brooker 模型或适当选择的典型仓体进行新的测试,以获取有足够精度可供与数值方法比较数据结果。数值方法研究应进一步考虑非各向同性问题;

4) 本文所用方法还只能解决简单仓体形状问题。对于有限元可适应的斜边界、曲网格问题,应采用贴体坐标下的差分列式,有待进一步研究。

本研究得到北京化工大学张政教授热诚指导,谨致谢意。

参 考 文 献

- 1 Shedd C K. Some new data on resistance of grains to airflow. *Agri Engng*, 1951,32(9): 493~496
- 2 Brooker D B. Pressure patterns in grain-drying systems established by numerical methods. *Trans of the ASAE*, 1961,4(1):72~74,77
- 3 Brooker D B. Computing air pressure and velocity distribution when air flows through a porous medium and nonlinear velocity—pressure relationships exist. *Trans of the ASAE*, 1969, 12(1) : 118~120
- 4 Segerlind L J. Solving the nonlinear airflow equations. *ASAE paper*, 82—3017
- 5 Miketinac M J, Sokhansanj S. Velocity—pressure distribution in grain bins-Brooker's model. *Int J numer Meth Engng*, 1985, 21(6): 1067~1075
- 6 Champman J E, Morey R V, Cloud H A, Nieber J L. Airflow patterns in flat storage aeration systems. *Trans of the ASAE*, 1989, 32(4): 1368~1376
- 7 毛志怀. 粮仓通风气流分布的有限元解及验证分析. *粮食储藏*,1990,19(5):3~11
- 8 冯云田,华云龙. 粮仓通风问题的数值解法. *北京农业工程大学学报*,1992,12(4):100~108
- 9 Zienkiewicz O C. *The finite element method*. 3rd ed., London: McGraw—Hill, 1977, 423~448
- 10 S. V. 帕坦卡著,张政译. *传热与流体流动的数值计算*. 北京:科学出版社,1989:46~70