

# 二维谷仓通风方程的流函数形式及解法

徐 泳      张 政  
(中国农业大学)      (北京化工大学)

**提 要** 导出了与布鲁克的以压力为基本量的谷仓通风方程(即压力模型)完全等价的、以流函数为基本量的新的流函数模型。新模型的计算域包含谷床进风口前的部分空腔,根据入口流量可算出流场和压力场。由于新模型把压力模型仓壁边界上压力的自然边条件转化成仓壁边界流函数的强迫边条件,使迭代速度大大提高。通过布鲁克模型仓入口压力500 Pa 工况算例比较,表明新模型所得结果和绘出的等压线与压力模型符合很好,而耗用时仅为压力模型的1/15左右。

**关键词** 谷仓 通风 数值模型 流函数

## A Formulation of Two-Dimensional Aeration Model With Stream Function

Xu Yong      Zhang Zheng  
(China Agricultural University, Beijing)      (Beijing University of Chemical Technology)

**Abstract** An approach is carried out for solving two-dimensional aeration in grain bins and an alternative formulation is derived in which stream function is used instead of pressure in the model founded by Brooker and Segerlind. As a result, natural boundary conditions along bin walls in the pressure model is reduced to a 'forced' one which allows to specify stream function values on bin walls. The new model is validated through a numerical example (the case of 500 Pa inlet pressure) which was presented and computed by Brooker using a scheme with control volume formulation. Flow patterns of stream line and plot of isopressure lines are presented. Numerical comparison with the pressure model on pressure values at selected points shows good equivalence. The iteration practice shows the new model can greatly reduce CPU time to about 1/15 of the former model. The formulation is also suitable for use of the finite element method.

**Key words** Grain bin Aeration Numerical model Stream function

### 1 引 言

谷仓通风方程是研究粮食通风和干燥的控制方程。最早由Brooker<sup>[1,2]</sup>根据Shedd<sup>[3]</sup>的气流阻力实验数据提出二维方程,经Segerlind<sup>[4]</sup>改进为通用形式,以后又由Smith<sup>[5]</sup>等推

收稿日期:1996-01-22 1997-04-22 修订

徐 泳,副教授,北京市海淀区清华东路 中国农业大学(东校区)材料力学教研室,100083

广到三维问题, 这些模型都把谷物散体的过流视为各向同性, 后发现因压实作用引起竖向和横向过流阻力不同(非各向同性), 并作了修正<sup>[6,7]</sup>, 也使列式和求解复杂化。但各向同性假定仍常采用, 并且多数情况下尽可能简化为二维问题。

上述通风方程都采用压力作基本量, 称压力模型。国内外已有许多用差分或有限元求解的文献。其边界条件包括在仓壁或对称面等主边界上气流不可通过, 即自然边界条件, 导致数值解算中须反复调整边界和域内的变量值, 使计算量大大增加。本文用流函数作基本量, 从 Segerlind<sup>[4]</sup>通用方程出发, 导出用流函数表达的控制方程与公式(流函数模型), 把主边界上自然边条件转变为强迫边条件。据查国内还没有人用流函数分析过通风方程, 国外虽有人用流函数解过类似问题<sup>[8]</sup>, 但所用压力-速度关系与本文完全不同。

## 2 压力型方程向流函数形式的转换

### 2.1 Brooker- Segerlind 二维压力模型

气流通过谷床时, 表观速度分量为

$$V_x = -G_x \frac{\partial p}{\partial x}, \quad V_y = -G_y \frac{\partial p}{\partial y} \quad (1)$$

式中  $p$ ——压力;  $G_x, G_y$ —— $x, y$  方向渗透率, 介质各向同性时有  $G_x = G_y = G$ 。合速度量值为

$$|\bar{V}| = G |\nabla p| \quad (2)$$

方向同压力梯度方向。渗透率  $G$  的定义为

$$G = A (|\nabla p|)^{B-1} \quad (3)$$

式中阻力参数  $A, B$  由气流阻力试验确定。压力梯度的模

$$|\nabla p| = [(\frac{\partial p}{\partial x})^2 + (\frac{\partial p}{\partial y})^2]^{1/2} \quad (4)$$

将(1)代入连续方程可得控制方程

$$\frac{\partial}{\partial x} (-G \frac{\partial p}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y} (-G \frac{\partial p}{\partial y}) = 0 \quad (5)$$

### 2.2 用流函数表达的通风方程

取流函数为基本量, 则表观速度分量为

$$V_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad V_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (6)$$

定义  $k_x = 1/G_x, k_y = 1/G_y$  分别为  $x, y$  方向的阻力系数, 由(1)、(6)可得

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = -k_x \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = k_y \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (7)$$

假定各向同性, 则  $k_x = k_y = k_0$ 。将(7)中二式分别对  $y, x$  求导, 即得控制方程

$$\frac{\partial}{\partial x} (-k \frac{\partial \psi}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y} (-k \frac{\partial \psi}{\partial y}) = 0 \quad (8)$$

由式(6)得合速度的模

$$|\bar{V}| = (V_x^2 + V_y^2)^{1/2} = [(\frac{\partial \psi}{\partial x})^2 + (\frac{\partial \psi}{\partial y})^2]^{1/2} \quad (9)$$

又由(2)、(3)和(7)得

$$k = \alpha (|\bar{V}|)^\beta \quad (10)$$

其中阻力系数

$$\alpha = A^{-\frac{1}{B}}, \quad \beta = \frac{1-B}{B} \quad (11)$$

是气流流速的函数,可由阻力试验确定,也可由已知阻力参数 $A, B$ 用式(11)求出。

### 2.3 边界条件

流函数模型的边界条件与压力模型提法不同,与用流函数解势流问题类似。对于压力模型,流场两侧主边界即仓壁或对称面的气流不可通过条件是用规定压力梯度为零来实现的,而流函数模型则是根据入口断面流速分布或流量直接给定流函数值。显然后者在迭代时无须象前者那样反复改变边界值而耗费大量机时。

现结合本文算例说明边界条件。图1为一矩形仓,气流从底部中央两侧进入谷床,利用对称性取一半计算。为便于比较把压力模型的边界条件表示在图1右半部,而把流函数模型的边界条件表示在左半部。对流函数模型可提出如下边界条件:

- 1) 在谷床一侧的仓壁与相连对称面 $feg$ 上,流函数值为零 $\psi_0 = 0$ ;
- 2) 在谷床另一侧的底板和仓壁 $abc$ 上, $\psi = \psi_0$ 。 $\psi_0$ 可由入口流速算出;
- 3) 谷床出流界面即上表层 $cg$ 处,气流垂直于上表面,流函数梯度为零 $\partial\psi/\partial n = 0$ ;
- 4) 气流入口处情况较复杂。在气流进入谷床的界面 $af$ 处,本应给出流函数分布,但实际上界面外侧压力稳定而流动很不均匀,无法通过测量流速获得流函数分布。为解决这一难题我们设想把计算域从谷床入口界面向谷床前面的空腔延拓,如延长至 $ad$ 面,把谷床和这部分空腔放在一起用统一的控制方程求解。由于空腔流动阻力远小于谷床内阻力,计算时只要取空腔内阻力系数 $k_a$ 相对于谷床内的阻力系数 $k_g$ 足够小,即可反映空腔内的无阻力状态。这时无论在 $ad$ 面上取怎样的流函数分布,只要保持总流量不变,都可获得实际入口面 $af$ 上几乎均匀的压力条件。在本文计算条件下,谷床内 $k_g$ 值量级约为 $10^{-2}$ ,为此取空腔内的阻力系数 $k_a = 10^{-10}$ 来近似理想流体的无阻力状态已够,并为简单起见,取 $ad$ 面上 $\psi$ 为线性分布。

5) 空腔与谷床界面上的阻力系数的突跃可采用 Patankar<sup>[9]</sup>提出的调和平均值的方法来解决,其他相邻控制容积界面上的阻力系数用算术平均值即可。

### 2.4 压力场计算

流函数模型可直接求出流函数或速度场,求压力并非必须。若需知道压力分布可通过流函数场转换得到。原理是将(6)和(7)代入全微分公式 $dp = \frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial y} dy$ ,并将微分以增量代替即得压力增量公式

$$\Delta p = -kV_x \Delta x - kV_y \Delta y \quad (12)$$

计算时可首先确定一个零压力点(本文选上表面左端),再由(12)逐点求出。一点的压力值通常可由两个路径求得,本文采用其均值。

## 3 算例

Brooker 计算的模型仓常用来作数值比较的例子,但至今还没有公认的标准解。我们用差分法计算其中入口压力 $P_0 = 500$  Pa 工况。

### 3.1 计算准备

仓体尺寸参看图1,把隔板下面正方形空腔包括在计算域内,并选择11个算点比较压力

数值。为便于比较采用均匀网格, 网格剖分与文献[11]相同为 $30 \times 120$ 个控制容积, 本文把流函数和阻力系数都定义在控制容积中心(按文献[10]的分类属B类网格)。迭代过程中边界控制容积上求值时无需外插, 可把边界看做是宽(或高)为零的控制容积, 域内可利用相邻控制容积中心上的值。迭代收敛后再插值求其他点数值。详情请参看文献 [9]、[10]。

本文根据Brooker<sup>[2]</sup>所用Shedd<sup>[3]</sup>的玉米试验数据所得到的阻力参数A、B, 由式(11)转换得到相应于不同压力区段的流函数模型下的阻力参数 $\alpha$ 和 $\beta$ , 限于篇幅不赘述。

由于从入口压力并不能直接得到流速分布, 我们利用 [11]中同工况压力解的结果, 用式(1)求出谷床上部均匀流速, 从而算得总流量, 进而由对称面上 $\psi_0$ 为零确定外仓壁流函数值。假定空腔进口处流函数按线性分布。在上表面边界 $cg$ 上取 $\partial\psi/\partial n=0$ 。根据作者在文献[11]中的密网格( $30 \times 120$ )计算得到的上部流速 $v_y=7.125\text{m}/\text{min}$ , 取 $\psi_1=4.3434\text{m}^2/\text{min}$ 。需要指出的是根据多次计算, 我们认为文献[2]中提供的上部均匀流速 $v_y=6.02\text{m}/\text{min}$ ( $23.7\text{ft}/\text{min}$ )误差偏大, 可能还未收敛。

### 3.2 结果分析

由计算得到的流函数等值线图见图2, 图中右侧对称面流函数值为零, 向左每线递增 $\Delta\psi=0.2172\text{m}^2/\text{min}$ , 在左边界线上有 $\psi_1=4.3434\text{m}^2/\text{min}$ 。经转换得到的等压线示于图3, 图中上表面 $p=0$ , 向下每线按 $\Delta p=25\text{Pa}$ 递增。表1给出了11个算点的压力数值, 从表1可知入口界面上算点压力最大偏差出现在奇点9处为4.5%, 除少数点外压力偏差均小于1%, 流线图反映的流场也是合理的, 证明了流函数模型的可行性。由于本文提出的流函数模型是在未作任何进一步假定下从公认的压力模型导出的, 所以两种模型完全等价, 无须再进行实验验证, 从原理讲数值计算误差应当更小, 个别算点误差略大可能由于剖分细度不够以及由此引起的压力转换时的误差积累。从计算时间来看, 本例用压力模型迭代16万次以上才基本收敛, 而按流函数模型无论均匀还是非均匀网格只须迭代1万余次即收敛。

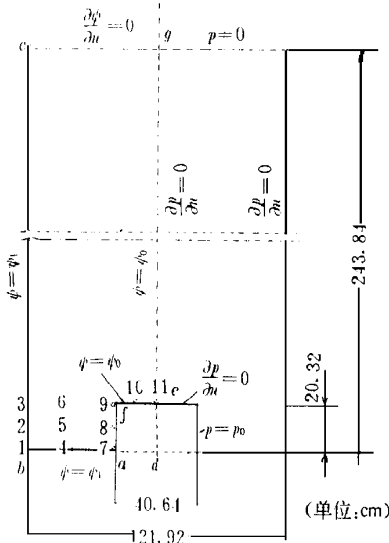


图1 模型仓几何形状

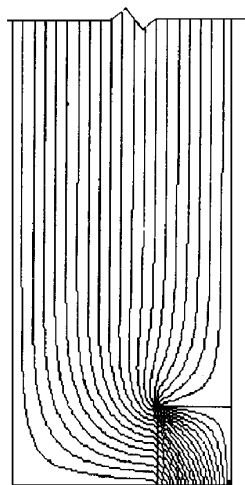


图2 数值预测的流线图

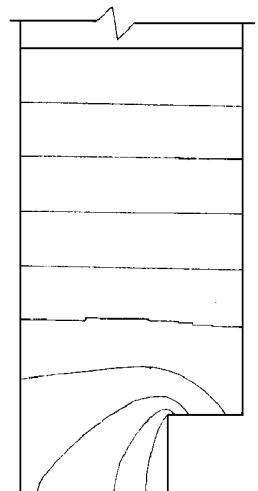


图3 数值预测的等压线图

表1 两种模型算点压力值的比较

算点	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
压力解	424.5	421.7	412.5	438.7	434.3	421.2	500.0	500.0	500.0	402.2	395.9
流函数解	424.3	421.5	412.4	437.7	433.2	420.3	499.3	498.1	477.5	412.3	398.7
相对误差/%	0.05	0.05	0.02	0.23	0.25	0.20	0.14	0.38	4.50	2.51	0.71

## 4 结 语

1) 从压力形式通风方程导出的流函数模型, 与原模型完全等价。对于气流不可通过边界占优的粮仓通风问题, 本文模型的收敛速度大大高于前者;

2) 本文模型可直接得到流场, 对通风、干燥分析都很方便; 但从实验角度看, 在谷床中测压比测速更方便可靠。因此, 用本文的公式从流函数再转求压力对实验验证仍然必要;

3) 计算实践表明, 在给定总风量下算得的空腔内压力值相差极小, 说明气流是垂直进入谷床界面的, 所以空腔入口流函数分布方式不影响谷床的气流流场;

4) 本文所述流函数法原则上也适用于有限元法, 但均不适用于三维计算。

## 参 考 文 献

- 1 Brooker D B. Pressure patterns in grain-drying systems established by numerical methods. *Trans of the A S A E*, 1961, 4(1): 72~ 74, 77
- 2 Brooker D B. Computing air pressure and velocity distribution when air flows through a porous medium and nonlinear velocity-pressure relationships exist. *Trans of the A S A E*, 1969, 12(1): 118 ~ 120
- 3 Shedd C K. Some new data on resistance of grains to air flow. *Agri Engng*, 1951, 32(9): 493~ 496
- 4 Segerlind L J. Solving the nonlinear airflow equations. *A S A E paper*, 82- 3107
- 5 Smith E A. Three dimensional analysis of air velocity and pressure in bays of grain and hay. *J A-gric Engng Res*, 1982, 27(2): 101~ 107
- 6 Jayas D S, Muir W E. Airflow-pressure drop data for modeling fluid flow in anisotropic bulks. *Trans of the A S A E*, 1991, 34(1): 251~ 254
- 7 Smith E A, Jayas D S, Muir W E et al. Simulation of grain drying in bin with partially perforated floors, Part I: Iso-traverse Lines. *Trans of the A S A E*, 1992, 35(3): 909~ 915
- 8 Lai F S. Three dimensional flow of air through nonuniform grain beds. *Trans of the A S A E*, 1980, 23(3): 729~ 734
- 9 S. V. 帕坦卡著. 传热与流体流动的数值计算. 张政译. 北京: 科学出版社, 1984. 49~ 82
- 10 陶文铨著. 数值传热学. 西安: 西安交通大学出版社, 1988. 12~ 15
- 11 徐 泳, 华云龙. 二维谷仓通风方程的有限差分法. *农业工程学报*, 1995, 11(1): 156~ 161