系 统 科 学 与 数 学
J. Sys. Sci. & Math. Scis.
25(6) (2005, 12), 700–710

关于交换群上的 Cayley 有向图的正规性*

徐 明 曜　张 勤 海　周 进 鑫

(山西师范大学数学与计算机科学学院， 山西 041004)

摘要 Cayley 有向图 $X=\mathrm{Cay}(G,S)$ 叫做正规的，如果 G 的右正则表示 $R(G)$ 在 X 的全自同构群 $\mathrm{Aut}(X)$ 中正规．我们定出了交换群上的小度数的非正规的 Cayley 有向图，并给出了一个猜想．应用这个结果，给出了 $p^n(n\le 2)$ 个点上的度数不超过 3 的有向对称图的分类，这里 p 是一个奇素数．

关键词 Cayley 有向图，自同构群，正规 Cayley 有向图，对称图．

MR(2000) 主题分类号 05C25, 20B25

1 引 言

对于有限简单图 X, 用 $V(X)$, $E(X)$ 和 $\mathrm{Aut}(X)$ 分别表示它的顶点集合，边集合和全自同构群．设 G 是一个有限群， S 是 G 的不含单位元 1 的子集，我们如下定义群 G 关于子集 S 的 Cayley 有向图 $X=\mathrm{Cay}(G,S)$: $V(X)=G, E(X)=\{(g,sg)|g\in G, s\in S\}$. 特别地，若 $S^{-1}=S$, 则 $X=\mathrm{Cay}(G,S)$ 是无向的．此时我们把一条无向边 $\{u,v\}$ 等同于两条有向边 (u,v) 和 (v,u). Cayley 有向图 $X=\mathrm{Cay}(G,S)$ 叫做 *正规的*, 若 G 的右正则表示 $R(G)$ 是 X 的全自同构群 $\mathrm{Aut}(X)$ 的正规子群 (见 [1]). 设 G 是一个有限群，而 S 和 T 为 G 的不包含单位元 1 的两个非空子集．如果有一个自同构 $\alpha\in\mathrm{Aut}(G)$, 使得 $S^\alpha=T$, 那么称 S 和 T 为等价的，记作 $S\cong T$. 容易证明如果 S 和 T 是等价的，那么 $\mathrm{Cay}(G,S)$ 是正规的当且仅当 $\mathrm{Cay}(G,T)$ 是正规的 (见下文命题 2.6).

称图 X 是对称图，若 X 无孤立点，并且 $\mathrm{Aut}(X)$ 在 X 的弧集上作用传递．设 X 是简单无向图， s 是一个正整数．称 X 中的 $s+1$ 个顶点序列 $v_0v_1\cdots v_s$ 为一个 s- 弧，如果 $(v_i,v_{i+1})\in E(X), 0\le i\le s-1$, 并且对 $s\ge 2$ 有 $v_i\ne v_{i+2}, 0\le i\le s-2$. 称 X 是 s- 弧传递图，如果 $\mathrm{Aut}(X)$ 在 X 的所有 s- 弧上是传递的．称 X 是 s- 传递图，如果 X 是 s- 弧传递但不是 $(s+1)$- 弧传递的．特别地， 0- 传递图为点传递图， 1- 传递图为对称图．

下面我们来定义两个图的笛卡儿积和字典式积．设 X 和 X' 是任意两个有向或无向图，规定 X 和 X' 的笛卡儿积 $X\times X'$ 为具有顶点集合 $V(X)\times V(X')$ 的图，满足 (x,x') 和 (y,y') 相邻当且仅当 $x=y$ 且 $(x',y')\in E(X')$, 或者 $x'=y'$ 且 $(x,y)\in E(X)$.(对任意的 $u,v\in V(X), u$ 和 v 相邻是指 $(u,v)\in E(X)$.) 如果两个图没有相同的非平凡笛卡儿积因子，我们称这两个

* 国家自然科学基金 (10371003,10471085), 山西省自然科学基金 (20051007), 教育部重点项目基金 (02023) 以及山西省留学回国人员基金 ([2004]7) 资助课题．

收稿日期：2003-09-15, 收到修改稿日期：2005-01-18.

图是互素的. 规定 X 和 X' 的字典式积 $X[X']$ 为具有顶点集合 $V(X)\times V(X')$ 的图, 满足 (x,x') 和 (y,y') 相邻当且仅当 $(x,y)\in E(X)$, 或者 $x=y$ 且 $(x',y')\in E(X')$.

正规 Cayley 有向图的概念, 对于 Cayley 有向图的对称性质的研究是有帮助的. 因此, 一个值得研究的问题, 也是比较基本的问题是对于某个或某类指定的有限群, 决定它的或它们的 Cayley 有向图何时是正规的. 关于这个问题, Cayley 无向图的结果已比较丰富, 例如, 在文 [2,3] 中 $2p$ 和 pq 阶群上的非正规的 Cayley 无向图已经全部定出, 这里 p,q 是素数. 又比如, 对于有限交换群上的小度数 Cayley 图, Baik 等在文 [4] 中定出了所有度数不超过 4 的非正规的 Cayley 无向图. 接着, 冯衍全等又做了 5 度的情况 (见 [5]). 并且这些结果在一些分类问题中得到了应用, 可见 [6,7]. 但是关于交换群上 Cayley 有向图的正规性问题目前还无人研究, 本文的目的是对有向图的情况做些初步的讨论. 下面的定理 1.1 是我们的主要结果, 其证明将在第 3 节中给出.

定理 1.1　设 $X=\mathrm{Cay}(G,S)$ 是有限交换群 G 的度数小于或等于 3 的连通 Cayley 有向图, 则除下列情形外, X 都是正规的.

(1) $G=Z_{2n}=\langle a\rangle(n>2)$, $S\cong\{a,a^{n+1}\}$, $X\cong C_n[2K_1]$(C_n 是长为 n 的有向圈);
(2) $G=Z_n\times Z_2=\langle a\rangle\times\langle u\rangle(n>2)$, $S\cong\{a,au\}$, $X\cong C_n[2K_1]$;
(3) $G=Z_4=\langle a\rangle$, $S=G\setminus\{1\}$, $X\cong K_4$;
(4) $G=Z_6=\langle a\rangle$, $S\cong\{a,a^3,a^5\}$, $X\cong K_{3,3}$;
(5) $G=Z_4\times Z_2=\langle a\rangle\times\langle b\rangle$, $S\cong\{a,a^{-1},b\}$, $X\cong Q_3$(Q_3 为 3 维立方体);
(6) $G=Z_{2n}\times Z_m=\langle a\rangle\times\langle c\rangle(n>2,m>1)$, $S\cong\{a,a^{n+1},c\}$, $X\cong C_n[2K_1]\times C_m$;
(7) $G=Z_n\times Z_2\times Z_m=\langle a\rangle\times\langle u\rangle\times\langle c\rangle(n>2,m>1)$, $S\cong\{a,au,c\}$, $X\cong C_n[2K_1]\times C_m$;
(8) $G=Z_{2n}=\langle a\rangle(n>2)$, $S\cong\{a,a^{n+1},a^n\}$;
(9) $G=Z_n\times Z_2=\langle a\rangle\times\langle u\rangle(n>2)$, $S\cong\{a,au,u\}$;
(10) $G=Z_{2k}\times Z_2=\langle a\rangle\times\langle u\rangle(k>2)$, $S\cong\{a,au,a^k\}$;
(11) $G=Z_{2k}\times Z_2=\langle a\rangle\times\langle u\rangle(k>2)$, $S\cong\{a,au,a^ku\}$;
(12) $G=Z_{4n}=\langle a\rangle(n=4k+1,k>0)$, $S\cong\{a,a^{2n+1},a^{n+1}\}$;
(13) $G=Z_{4n}=\langle a\rangle(n=4k+1,k>0)$, $S\cong\{a,a^{2n+1},a^{3n+1}\}$;
(14) $G=Z_{4n}\times Z_2=\langle x\rangle\times\langle y\rangle(n=2k+1,k>0)$, $S\cong\{x,x^{2n+1},x^{n+1}y\}$;
(15) $G=Z_n\times Z_4=\langle a\rangle\times\langle v\rangle(n=4k,k>0)$, $S\cong\{a,av^2,av\}$;
(16) $G=Z_k\times Z_t=\langle x\rangle\times\langle y\rangle$, $S\cong\{x^{k/nh}y,x^{k/nh}yu,x^{k/mh}y^{-1}\}$, $u=(x^{k/nh}y)^{nh/2}$;
(17) $G=Z_k\times Z_t\times Z_2=\langle x\rangle\times\langle y\rangle\times\langle u\rangle$, $S\cong\{x^{k/nh}y,x^{k/nh}yu,x^{k/mh}y^{-1}\}$.

上面 (16), (17) 中 $k=\frac{mnh}{(m,n)},t=(m,n)$. (16) 式中 m,n,h 满足: m 为任意正整数; $h>1,2\nmid h;2\mid n$, 若 $\frac{n}{2}$ 为奇数时, 则 $n>2$, 若 $\frac{n}{2}$ 为偶数时, 则 $n>4$. (17) 式中 m,n,h 满足 m 为任意正整数, $h>1$, $n>2$.

由定理 1.1 我们立得下面的推论.

推论 1.2 奇数阶有限交换群上的度数小于或等于 3 的 Cayley 有向或无向图均正规.

若把推论 1.2 中的有限交换群变为一般的有限群结论是否仍成立? 据此我们提出下面的猜想.

猜想 1.3 所有奇数阶有限群上的度数小于或等于 3 的 Cayley 有向或无向图均正规.

下面的定理 1.4 是定理 1.1 的一个应用, 它给出了 p,p^2(p 是一个奇素数) 阶度数小于或等于 3 的有向对称图的完全分类, 其证明将在第 4 节中给出.

定理 1.4　设 X 是 p,p^2(p 是一个奇素数) 阶度数小于或等于 3 的有向对称图, 则 X 为下列图之一

(1) $X_1=\mathrm{Cay}(Z_p,\{a,a^m\})$, $m^3\equiv 1(\mathrm{mod}\ p)$, $\mathrm{Aut}(X_1)=Z_p:Z_2$;

(2) $X_2 = \mathrm{Cay}(Z_{p^2}, \{b, b^m\}), m^2 \equiv 1 (\mathrm{mod}\ p^2)$, $\mathrm{Aut}(X_2) = Z_{p^2} : Z_2$;

(3) $X_3 = \mathrm{Cay}(Z_p \times Z_p, \{c, d\})$, $\mathrm{Aut}(X_3) = (Z_p \times Z_p) : Z_2$;

(4) $X_4 = \mathrm{Cay}(Z_p, \{a, a^m, a^{m^2}\}), m^3 \equiv 1 (\mathrm{mod}\ p)$, $\mathrm{Aut}(X_4) = Z_p : Z_3$;

(5) $X_5 = \mathrm{Cay}(Z_{p^2}, \{b, b^m, b^{m^2}\})$, $m^3 \equiv 1 (\mathrm{mod}\ p^2)$, $\mathrm{Aut}(X_5) = Z_{p^2} : Z_3$;

(6) $X_6 = \mathrm{Cay}(Z_p \times Z_p, \{c, d, c^{-1}d^{-1}\}), n^2 + m \equiv 0 (\mathrm{mod}\ p)$, $mn \equiv 1 (\mathrm{mod}\ p)$, $p \nmid (m - n)$, $\mathrm{Aut}(X_6) = (Z_p \times Z_p) : S_3$;

(7) $X_7 = \mathrm{Cay}(Z_p \times Z_p, \{c, d, c^m d^n\})$, $\mathrm{Aut}(X_7) = (Z_p \times Z_p) : Z_3$;

其中， X_6 是 2- 传递的，其余的都是 1- 传递的．（上面 $Z_p = \langle a \rangle, Z_{p^2} = \langle b \rangle$, $Z_p \times Z_p = \langle c \rangle \times \langle d \rangle$. 而 $N : H$ 表示群 N 被群 H 的半直积.）

2 预备知识

在本节，我们给出一些初等结果．假设 $X = \mathrm{Cay}(G, S)$ 是 G 关于其子集 S 的 Cayley 有向图．记 $A = \mathrm{Aut}(X)$, A_1 为 G 的单位元 1 在 A 中的点稳定子群， $\mathrm{Aut}(G, S) = \{\alpha \in \mathrm{Aut}(G) | S^\alpha = S\}$. 下面先来介绍一下 Cayley 有向图的一些性质.

命题 2.1[4] 设 $X = \mathrm{Cay}(G, S)$ 是 G 关于 S 的 Cayley 有向图，则我们有下面的结论

(i) $\mathrm{Aut}(X)$ 含有 G 的右正则表示，因此 X 是点传递的；

(ii) X 连通当且仅当 $G = \langle S \rangle$;

(iii) X 是无向的当且仅当 $S^{-1} = S$.

由上面的命题，我们知道 Cayley 图都是点传递的，但反之则不一定成立． Marušič 在文 [8] 中证明对于特定的阶 $p^n (n \leq 3)$, 这个结论却是成立的，这就是下面的定理.

定理 2.2[8] 设 p 是素数，则 $p^n (n \leq 3)$ 阶点传递图均为 p^n 阶群上的 Cayley 图.

下面的几个命题都是关于 Cayley 图的正规性的.

命题 2.3[1]

(i) $N_A(R(G)) = R(G)\mathrm{Aut}(G, S)$;

(ii) $A = R(G)\mathrm{Aut}(G, S)$ 等价于 $R(G) \lhd A$.

命题 2.4[1] Cayley 有向图 X 正规当且仅当 $A_1 = \mathrm{Aut}(G, S)$.

关于交换群上的 Cayley 图的正规性， Baik 等在文 [4] 中给出了一个充分条件，即下面的定理.

定理 2.5[4] 设 G 是一个有限交换群， S 是其生成子集， $1 \notin S$, 如果 S 满足

$$\forall s, t, u, v \in S, \quad uv = st \neq 1 \Rightarrow \{u, v\} = \{s, t\}. \tag{1'}$$

则 $X = \mathrm{Cay}(G, S)$ 是正规的.

接下来我们再给出两个简单的命题.

命题 2.6[4] 设 G 是一个有限群， S 是 G 的一个生成子集， $1 \notin S$, α 是 G 的一个自同构，则 $\mathrm{Cay}(G, S)$ 正规当且仅当 $\mathrm{Cay}(G, S^\alpha)$ 正规.

定理 2.7[4] 设 $G = G_1 \times G_2$, S 是 G 的生成子集， $1 \notin S$, S_1, S_2 分别为 G_1, G_2 的生成子集， $S = S_1 \cup S_2$, $S_1 \cap S_2 = \emptyset$ 则

(i) $\mathrm{Cay}(G, S) \cong \mathrm{Cay}(G_1, S_1) \times \mathrm{Cay}(G_2, S_2)$;

(ii) 若 $\mathrm{Cay}(G, S)$ 是正规的，则 $\mathrm{Cay}(G_1, S_1)$ 是正规的；

(iii) 若 $\mathrm{Cay}(G_1, S_1), \mathrm{Cay}(G_2, S_2)$ 均正规且互素，则 $\mathrm{Cay}(G, S)$ 是正规的.

3 定理 1.1 的证明

在本节中，我们假设 G 为一个有限交换群， $X = \mathrm{Cay}(G, S)$ 是 G 关于其子集 S 的连通 Cayley 有向图，度数不超过 3. 定理 1.1 的证明，我们分各种可能的情况由一系列引理来完成．通过下面的引理 3.1, 我们先解决了 $|S| = 2$ 的情形．

引理 3.1 设 $S = \{a, b\}$, 则除了定理 1.1 中 (1), (2) 外， X 均正规．

证 如果 $S = S^{-1}$, 显然 X 是正规的．对于 $S \neq S^{-1}$, 若 $a^2 \neq b^2$, 由定理 2.5 知 X 正规．若 $a^2 = b^2$, 则 $G = \langle a, u\rangle$, $u = ab^{-1}$ 是对合．若 $u \in \langle a\rangle$, 则 $G = \langle a\rangle = Z_{2n}$, $S = \{a, a^{n+1}\}$. 若 $u \notin \langle a\rangle$, 则 $G = Z_n \times Z_2 = \langle a\rangle \times \langle u\rangle$, $S = \{a, au\}$. 这两种情况都有 $n > 2$, $X = C_n[2K_1]$, 故 X 是非正规的．这分别为定理 1.1 中的 (1) 和 (2). 证毕．

下面考虑 $|S| = 3$ 的情况．我们恒假定 $S = \{a, b, c\}$, 区分下列三种情况 (I) a^2, b^2, c^2 三元素互不相等； (II) $a^2 = b^2 = c^2$; (III) a^2, b^2, c^2 三元素中只有两个相等，我们不妨设 $a^2 = b^2 \neq c^2$. 下面的引理 3.2 和 3.3 先处理情形 (I) 和 (II).

引理 3.2 设 $S = \{a, b, c\}, a^2, b^2, c^2$ 三者互不相同，则 X 正规．

由定理 2.5 易得结论，细节略．

引理 3.3 设 $S = \{a, b, c\}$, $a^2 = b^2 = c^2$, 则 X 正规．

证 首先证明 A_1 忠实地作用于 S 上.为此,先来证明这样一个事实,即对任意的 $\alpha \in \mathrm{Aut}(X)$ 及 $V(X)$ 的任意一点 x, 只要 α 稳定 x 且点型稳定 xS, 则 α 就点型稳定 xS^2. 任取 $V(X)$ 中的一点 x, 假设 $\alpha \in A_x$, 且 α 点型稳定 xS, 则对 xS 中每一点 v, α 集型稳定 vS. 于是 $(xaS \cap xbS \cap xcS)^\alpha = xaS \cap xbS \cap xcS$, 即 $(xa^2)^\alpha = xa^2$. 又由 $(xaS \cap xbS)^\alpha = xaS \cap xbS$, 有 $\{xa^2, xab\}^\alpha = \{xa^2, xab\}$. 因为 $(xa^2)^\alpha = xa^2$, 所以 $(xab)^\alpha = xab$. 同理由 $(xaS \cap xcS)^\alpha = xaS \cap xcS$, 以及 $(xa^2)^\alpha = xa^2$, 我们可得 $(xac)^\alpha = xac$. 从而也有 $(xbc)^\alpha = xbc$. 这就证明了我们上面所说的话．这样由 x 的任意性及 X 的连通性，可以归纳地证明对任意的 $\alpha \in A_1$, 且 α 点型稳定 S, 则 α 稳定 $V(X)$ 中的每一点．从而说明 $\alpha = 1$, 即 A_1 忠实地作用于 S 上．下面我们证明 X 是正规的，由命题 2.4, 只须证明 $A_1 \leq \mathrm{Aut}(G)$. 由于 A_1 忠实地作用于 S 上，因此 A_1 同构于 S_3 的一个子群．这样对任意的 $\sigma \in A_1$, 我们可分以下三种情况来证明 $\sigma \in \mathrm{Aut}(G)$.

(i) $o(\sigma) = 1$, 则 $\sigma \in \mathrm{Aut}(G)$.

(ii) $o(\sigma) = 2$, 不妨设 $a^\sigma = b, b^\sigma = a, c^\sigma = c$. 为证明 $\sigma \in \mathrm{Aut}(G)$, 也就是要证明

$$(s_1 s_2 ... s_n)^\sigma = s_1^\sigma s_2^\sigma ... s_n^\sigma, \quad \forall s_1, s_2, ... s_n \in S. \tag{2'}$$

对于任意给定的 $x \in G$, 为证明 (2′) 仅须证明

$$(xs)^\sigma = x^\sigma s^\sigma, \quad \forall s \in S \Rightarrow (xuv)^\sigma = x^\sigma u^\sigma v^\sigma, \quad \forall u, v \in S. \tag{3'}$$

事实上，只要 (3′) 被证明， (2′) 可通过对 n 用归纳法得到证明．

假设对任意的 $s \in S$, $(xs)^\sigma = x^\sigma s^\sigma$. 由 $(xaS \cap xbS \cap xcS)^\sigma = (xaS)^\sigma \cap (xbS)^\sigma \cap (xcS)^\sigma = x^\sigma a^\sigma S \cap x^\sigma b^\sigma S \cap x^\sigma c^\sigma S = x^\sigma bS \cap x^\sigma aS \cap x^\sigma cS$, 有 $(xa^2)^\sigma = x^\sigma b^2 = x^\sigma (a^\sigma)^2$. 同理也有 $(xb^2)^\sigma = x^\sigma (b^\sigma)^2$, $(xc^2)^\sigma = x^\sigma (c^\sigma)^2$ (注意有 $(gS)^\sigma = g^\sigma S$, $\forall g \in G$.). 而由 $(xaS \cap xbS)^\sigma = (xaS)^\sigma \cap (xbS)^\sigma = x^\sigma a^\sigma S \cap x^\sigma b^\sigma S = x^\sigma bS \cap x^\sigma aS$, 即 $\{xa^2, xab\}^\sigma = \{x^\sigma a^2, x^\sigma ab\} = \{x^\sigma b^2, x^\sigma a^\sigma b^\sigma\} = \{x^\sigma (a^\sigma)^2, x^\sigma a^\sigma b^\sigma\}$, 且 $(xa^2)^\sigma = x^\sigma (a^\sigma)^2$, 我们可得 $(xab)^\sigma = x^\sigma a^\sigma b^\sigma$. 同理由 $(xaS \cap xcS)^\sigma = (xaS)^\sigma \cap (xcS)^\sigma = x^\sigma a^\sigma S \cap x^\sigma c^\sigma S = x^\sigma bS \cap x^\sigma cS$, 以及 $(xa^2)^\sigma = x^\sigma (a^\sigma)^2$, 有 $(xac)^\sigma = x^\sigma a^\sigma c^\sigma$. 从而也有 $(xbc)^\sigma = x^\sigma b^\sigma c^\sigma$.

(iii) $o(\sigma)=3$, 无妨令 $a^\sigma=b$, $b^\sigma=c, c^\sigma=a$, 同 (ii) 的讨论我们也仅须证明 $(3')$. 假设对任意的 $s\in S$, $(xs)^\sigma=x^\sigma s^\sigma$. 由 $(xaS\cap xbS\cap xcS)^\sigma=(xaS)^\sigma\cap(xbS)^\sigma\cap(xcS)^\sigma=x^\sigma a^\sigma S\cap x^\sigma b^\sigma S\cap x^\sigma c^\sigma S=x^\sigma bS\cap x^\sigma cS\cap x^\sigma aS$, 有 $(xa^2)^\sigma=x^\sigma b^2=x^\sigma(a^\sigma)^2$. 同理也有 $(xb^2)^\sigma=x^\sigma(b^\sigma)^2$, $(xc^2)^\sigma=x^\sigma(c^\sigma)^2$. 而由 $(xaS\cap xbS)^\sigma=(xaS)^\sigma\cap(xbS)^\sigma=x^\sigma a^\sigma S\cap x^\sigma b^\sigma S=x^\sigma bS\cap x^\sigma cS$, 即 $\{xa^2,xab\}^\sigma=\{x^\sigma a^2,x^\sigma bc\}=\{x^\sigma(a^\sigma)^2,x^\sigma a^\sigma b^\sigma\}$, 且 $(xa^2)^\sigma=x^\sigma(a^\sigma)^2$, 我们可得 $(xab)^\sigma=x^\sigma a^\sigma b^\sigma$. 同理由 $(xaS\cap xcS)^\sigma=(xaS)^\sigma\cap(xcS)^\sigma=x^\sigma a^\sigma S\cap x^\sigma c^\sigma S=x^\sigma bS\cap x^\sigma aS$, 以及 $(xa^2)^\sigma=x^\sigma(a^\sigma)^2$, 有 $(xac)^\sigma=x^\sigma a^\sigma c^\sigma$. 从而也有 $(xbc)^\sigma=x^\sigma b^\sigma c^\sigma$.

故 $A_1\le \mathrm{Aut}(G)$, 因而 X 是正规的. 证毕.

下面我们考虑情形 (III), 即 $S=\{a,b,c\}, a^2=b^2\ne c^2$. 最简单的情况是满足 $S=S^{-1}$, 即

引理 3.4 若 $S=S^{-1}$, 则除了定理 1.1 中的 (3)–(5) 外 X 均正规.

证 这时 X 是无向图, 见文 [2].

以下恒设 $S\ne S^{-1}$. 我们区分 $\langle a,b\rangle\cap\langle c\rangle=1$ 和 $\ne 1$ 两种情况. 如果前者发生, 我们有

引理 3.5 如果 $\langle a,b\rangle\cap\langle c\rangle=1$, 则 X 非正规. 此时 X 为定理 1.1 中的 (6) 和 (7).

证 因为 $\langle a,b\rangle\cap\langle c\rangle=1$, 而 $G=\langle S\rangle=\langle a,b,c\rangle$, 所以 $G=\langle a,b\rangle\times\langle c\rangle$. 由定理 2.7(i), 易知 $X=\mathrm{Cay}(\langle a,b\rangle,\{a,b\})\times\mathrm{Cay}(\langle c\rangle,\{c\})=X_1\times X_2$. 因为 $a^2=b^2$, 由引理 3.1 的证明, 可知 X_1 非正规. 再由定理 2.7(ii), 可知 X 非正规. 此时, $G=\langle a,u\rangle\times\langle c\rangle, u=ab^{-1}$ 是对合. 若 $u\in\langle a\rangle$, 则 $G=\langle a\rangle\times\langle c\rangle=Z_{2n}\times Z_m$ $(n>2)$, $S=\{a,a^{n+1},c\}$. 若 $u\notin\langle a\rangle$, 则 $G=\langle a\rangle\times\langle u\rangle\times\langle c\rangle=Z_n\times Z_2\times Z_m(n>2)$, $S=\{a,au,c\}$. 这两种情况都有 $X=C_n[2K_1]\times C_m, m>1$. 这分别为定理 1.1 中的 (6) 和 (7). 证毕.

如果后者发生, 我们又区分 $o(c)=2$ 和 >2 两种情况, 我们先来看第一种情形.

引理 3.6 如果 $\langle a,b\rangle\cap\langle c\rangle\ne 1$, 且 $o(c)=2$, 则除了定理 3. 1 中的 (8)–(11) 外, X 都正规.

证 因为 $\langle a,b\rangle\cap\langle c\rangle\ne 1$, 所以 $c\in\langle a,b\rangle$, 显然 $\langle a,b\rangle=\langle a,u\rangle, u=ab^{-1}, u$ 是对合. 我们分 $u\in\langle a\rangle$ 和 $u\notin\langle a\rangle$ 两种情况来证明本命题.

对于前者我们有 $G=\langle a\rangle=Z_{2n}$, $S=\{a,a^{n+1},a^n\}$. 由假设, 定有 $n>2$. 令 $\sigma=(a,a^{n+1})$, 这里 (a,a^{n+1}) 表示一个对换. 以 a,a^{n+1} 为顶点的边有 $(1,a)$, (a^{n+1},a), (a^n,a), $(1,a^{n+1})$, (a^n,a^{n+1}), (a,a^{n+1}), (a,a^2), (a,a^{n+2}), (a^{n+1},a^2), (a^{n+1},a^{n+2}). 容易验证 σ 仍把这些边变成这些边, 而不动其它的边, 所以 $\sigma\in A_1$. 但若 $\sigma\in\mathrm{Aut}(G)$, 则 $(a^3)^\sigma=a^{n+3}$. 但 $(a^3)^\sigma=a^3$, 这样 $a^{n+3}=a^3$, $a^n=1$, 与 $o(a)=2n$ 矛盾. 这说明 $\sigma\notin\mathrm{Aut}(G)$, 从而说明 X 非正规. 于是得到定理 1.1 中的 (8).

对于后者我们有 $G=\langle a\rangle\times\langle u\rangle$, 此时我们分别考虑 $c=u$ 和 $c\ne u$ 两种情况. 首先我们看 $c=u$ 这种情形. 此时 $S=\{a,au,u\}$, 由假设, 定有 $o(a)\ge 3$. 令置换 $\sigma=(a,au)(a^2,a^2u)$, 以 a,au,a^2,a^2u 为顶点的边有 $(1,a),(1,au),(u,a),(u,au),(a,au),(au,a),(a,a^2),(a,a^2u),(au,a^2u)$, (au,a^2), $(a^2,a^2u),(a^2,a^3)$, $(a^2,a^3u),(a^2u,a^2)$, $(a^2u,a^3),(a^2u,a^3u)$. 容易验证 σ 仍把这些边变成这些边, 而不动其它的边, 所以 $\sigma\in A_1$. 但若 $\sigma\in\mathrm{Aut}(G)$, 则 $(a^2)^\sigma=a^2$. 但 $(a^2)^\sigma=a^2u$, 从而 $u=1$, 矛盾. 这说明 $\sigma\notin\mathrm{Aut}(G)$, 从而说明 X 非正规. 于是得到定理 1.1 中的 (9).

接下来我们来看 $c\ne u$ 这种情形. 此情形如果发生仅当 $o(a)=2k$(k 为整数) 时, $c=a^k$ 或 a^ku. 此时显然 $k>1$. 我们先来看 $c=a^k$, 此时若 $k=2$, 任取 $\sigma\in A_1\cap A_{(S)}$(表示 S 在 A 中的点型稳定子群), 则容易验证 σ 稳定 $V(X)$ 中的每一点, 说明 $\sigma=1$, 即 A_1 忠实地作用在 S 上. 所以 A_1 同构于 S_3 的一个子群. 但对任意的 $\sigma\in A_1$, 若 $(a^2)^\sigma=v, v=a$ 或 au,

则 $(a^2,1)^\sigma=(v,1)$, 但 $(v,1)\notin E(X)$, 矛盾. 所以只能有 $(a^2)^\sigma=a^2$. 所以 A_1 中没有 3 阶元，从而 X 正规. 若 $k>2$, 令置换 $\sigma=(a,au)(a^{k+1},a^{k+1}u)$, 以 $a,au,a^{k+1},a^{k+1}u$ 为顶点的边有 $(u,a),(u,au),(a^{k+1}u,a^{k+2}),(1,au),(a^{k+1},a),(a^{k+1}u,au),(a,a^{k+1}),(au,a^{k+1}u)$, (a,a^2u), (au,a^2u), (au,a^2), $(a,a^2),(a^k,a^{k+1}),(a^k,a^{k+1}u),(a^ku,a^{k+1}),(a^ku,a^{k+1}u),(a^{k+1},a^{k+2}),(1,a)$, $(a^{k+1},a^{k+2}u),(a^{k+1}u,a^{k+2}u)$. 容易验证 σ 仍把这些边变成这些边，而不动其它的边，所以 $\sigma\in A_1$. 但若 $\sigma\in\mathrm{Aut}(G)$, 则 $(a^3)^\sigma=a^3u$. 但 $(a^3)^\sigma=a^3$, 从而 $u=1$, 矛盾. 这说明 $\sigma\notin\mathrm{Aut}(G)$, 从而说明 X 非正规. 此即为定理 1.1 中的 (10).

我们再来看 $c=a^ku$, 此时若 $k=2$, 任取 $\sigma\in A_1\cap A_{(S)}$, 则容易验证 σ 稳定 $V(X)$ 中的每一点，说明 $\sigma=1$, 即 A_1 忠实地作用在 S 上. 所以 A_1 同构于 S_3 的一个子群. 但对任意的 $\sigma\in A_1$, 若 $(a^2u)^\sigma=v,v=a$ 或 au, 则 $(a^2u,1)^\sigma=(v,1)$, 但 $(v,1)\notin E(X)$, 矛盾. 所以只能有 $(a^2)^\sigma=a^2$. 所以 A_1 中没有 3 阶元, 从而 X 正规. 若 $k>2$, 令置换 $\sigma=(a,au)(a^{k+1},a^{k+1}u)$, 以 $a,au,a^{k+1},a^{k+1}u$ 为顶点的边有 $(u,a),(u,au),(1,a),(1,au),(a^{k+1},au),(a^{k+1}u,a)$, $(a,a^{k+1}u)$, (au,a^{k+1}), (au,a^2u), (a,a^2u), (au,a^2), (a^k,a^{k+1}), $(a^k,a^{k+1}u)$, (a^ku,a^{k+1}), $(a^ku,a^{k+1}u)$, (a^{k+1},a^{k+2}), $(a^{k+1}u,a^{k+2})$, $(a^{k+1},a^{k+2}u)$, (a,a^2), $(a^{k+1}u,a^{k+2}u)$. 容易验证 σ 仍把这些边变成这些边，而不动其它的边，所以 $\sigma\in A_1$. 但若 $\sigma\in\mathrm{Aut}(G)$, 则 $(a^3)^\sigma=a^3u$. 但 $(a^3)^\sigma=a^3$, 从而 $u=1$, 矛盾. 这说明 $\sigma\notin\mathrm{Aut}(G)$, 从而说明 X 非正规. 此即为定理 1.1 中的 (11). 证毕.

接下来我们来看 $o(c)>2$ 这种情形，对这种情形我们又分 $c^2=ab$ 和 $c^2\neq ab$ 两种不同的情况，用下面三个引理来完成证明. 首先，通过引理 3.7 我们解决了 $c^2=ab$ 这种情况.

引理 3.7 如果 $\langle a,b\rangle\cap\langle c\rangle\neq 1$, 且 $o(c)>2$, 又假定 $c^2=ab$, 则除定理 1.1 中的 (12)–(15) 外 X 均正规.

证 因为 $c^2=ab$, 所以 $c^4=a^2b^2=a^4$. 令 $u=ab^{-1},v=a^{-1}c$, 则 $o(u)=2,o(v)=4,v^2=u,G=\langle a,v\rangle$. 按照引理 3.3 的方法我们容易证明， A_1 同构于 S_3 的一个子群. 我们分以下三种情况来证明本命题.

(i) $\langle a\rangle\cap\langle v\rangle=\langle v\rangle$

此时令 $o(a)=4n$, 则 $G=Z_{4n}=\langle a\rangle$, 且 $\langle v\rangle=\langle a^n\rangle$, 从而 $v=a^n$ 或 a^{3n}. 若 $v=a^n$, 则 $b=av^2=a^{2n+1}$, $c=av=a^{n+1}$. 此时，显然 $n=1$ 时， $S^{-1}=S$, 所以我们假设 $n>1$. 为叙述方便，我们如下描述此时的 Cayley 图 X: 把 X 的顶点排成每列有四个顶点的 n 列，其中第 i 列的顶点从上到下分别为 $a^{i-1},a^{n+i-1},a^{2n+i-1},a^{3n+i-1}$. 其边的连法为对任意的第 i 列和第 $i+1$ 列 $(1\le i\le n-1)$, a^{i-1} 与 a^i,a^{n+i},a^{2n+i} 相邻， a^{n+i-1} 与 $a^{n+i},a^{2n+i},a^{3n+i}$ 相邻， a^{2n+i-1} 与 a^i,a^{2n+i},a^{3n+i} 相邻， a^{3n+i-1} 与 a^i,a^{n+i},a^{3n+i} 相邻. 而最后一列与第一列的连法为： a^{n-1} 与 a^n,a^{2n},a^{3n} 相邻， a^{2n-1} 与 $1,a^{2n},a^{3n}$ 相邻， a^{3n-1} 与 $1,a^{3n},a^n$ 相邻， a^{4n-1} 与 $1,a^n,a^{2n}$ 相邻. 可见下图.

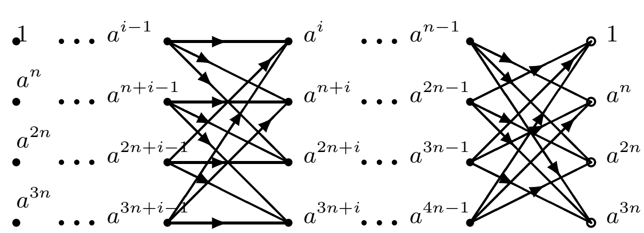

图 1

对任意的 $\sigma\in A_1$, 若 $o(\sigma)=3$, 不妨令 $a^\sigma=a^{2n+1},(a^{2n+1})^\sigma=a^{n+1},(a^{n+1})^\sigma=a$. 下面先来证明一个这样的事实：即 X 的每一列中都仅有一个点在 σ 的作用之下不动，且第 i 列和第 $i+4$ 列的 σ 的不动点在同一行上 $(1\le i\le n-4)$. 容易验证第三列中的点恰为 S^2. 由于 a,a^{n+1},a^{2n+1} 与 a^{2n+2} 都相邻，所以 $(a^{2n+2})^\sigma=a^{2n+2}$, 而与它在同一列的其余顶点都要动．又 a^{3n+1} 与该列除 a^{2n+2} 外的点恰都相邻，从而 $(a^{3n+1})^\sigma=a^{3n+1}$. 一般地对于任意一点 $u\in V(X)$, 若 $u^\sigma=u$, 且 σ 轮换 $uS=\{ua,ua^{2n+1},ua^{n+1}\}$ 中的元素，容易验证该点后的第二列中的点恰为 uS^2. 由于 ua,ua^{n+1},ua^{2n+1} 与 ua^{2n+2} 都相邻，所以 $(ua^{2n+2})^\sigma=ua^{2n+2}$, 而与它在同一列的其余顶点都要动．又 ua^{3n+1} 与该列除 ua^{2n+2} 外的点恰都相邻，从而 $(ua^{3n+1})^\sigma=ua^{3n+1}$. 这样我们便证明了 X 的任一列中都仅有一个 σ 的不动点，这一点恰与前一列中 σ 的不动点不相邻. 从图 1 中可以观察到 X 中每隔三列 σ 的不动点在同一行上. 所以若 $n\neq 4k+1(k>0)$ 时，则最后一列中在 σ 的作用下不动的点，不在第一行. 所以 $1^\sigma\neq 1$, 这与 $\sigma\in A_1$ 矛盾．矛盾说明 A_1 中没有 3 阶元．而 A_1 同构于 S_3 的一个子群，所以 $|A_1|\le 2$, 即 X 正规．若 $n=4k+1(k>0)$ 时，则 $1^\sigma=1$, 所以 $\sigma\in A_1$. 但若 σ 是 G 的自同构，则 $(a^{2n+1})^\sigma=a$. 但 $(a^{2n+1})^\sigma=a^{n+1}$, 即 $a^n=1$, 从而与 $o(a)=4n$ 矛盾．所以 $\sigma\notin \mathrm{Aut}(G)$, 从而说明 X 非正规，此即为定理 1.1 中的 (12).

而如果 $v=a^{3n}$, 则 $b=av^2=a^{2n+1}$, $c=av=a^{3n+1}$. 对于这种情形，用和上面同样的方法可得：当 $n\neq 4k+1(k>0)$ 时， X 是正规的；当 $n=4k+1(k>0)$ 时， X 是非正规的，这就是定理 1.1 中的 (13).

(ii) $\langle a\rangle\cap\langle v\rangle=\langle v^2\rangle$

此时若 G 为非循环群，令 $o(a)=4n$, 则 $G\cong Z_{4n}\times Z_2$. 设 $G=\langle x\rangle\times\langle y\rangle=Z_{4n}\times Z_2$, 其中 $x=a$. 因为 $G=\langle a,v\rangle$ 且 $o(v)=4$, 所以 $v=x^ny$ 或 $x^{3n}y$. 若 $v=x^ny$, 则 $b=av^2=x^{2n+1}$, $c=av=x^{n+1}y$, 记 $S_1=\{x,x^{2n+1},x^{n+1}y\}$. 而如果 $v=x^{3n}y$, 那么 $b=av^2=x^{2n+1}$, $c=av=x^{3n+1}y$, 记 $S_2=\{x,x^{2n+1},x^{3n+1}y\}$. 此时，我们令 $\alpha: x\mapsto x,\ y\mapsto x^{2n}y$, 则 α 可以扩展为 G 的一个自同构，并且 $S_1^\alpha=S_2$. 这即说明 S_1 与 S_2 是等价的．因此，我们仅考虑二者之一．不失一般性，这里我们考虑前一种情形．此时，显然 $n=1$ 时， $S^{-1}=S$, 所以我们假设 $n>1$. 用和 (i) 相同的方法我们可以证明，任取 A_1 中的 3 阶元 σ, 不妨令 $x^\sigma=x^{2n+1},(x^{2n+1})^\sigma=x^{n+1}y,(x^{n+1}y)^\sigma=x$. 若 $n\neq 2k+1(k>0)$ 时，则 $1^\sigma\neq 1$, 这与 $\sigma\in A_1$ 矛盾，矛盾说明 A_1 中没有 3 阶元．而 A_1 同构于 S_3 的一个子群，所以 $|A_1|\le 2$. 所以 X 正规．若 $n=2k+1(k>0)$ 时，则 $1^\sigma=1$, 所以 $\sigma\in A_1$. 但若 σ 是 G 的自同构，则 $(x^{2n+1})^\sigma=x$. 但 $(x^{2n+1})^\sigma=x^{n+1}y$, 所以 $x=x^{n+1}y$, 即 $y=1$, 矛盾．所以 $\sigma\notin\mathrm{Aut}(G)$, 所以 X 非正规．此即为定理 1.1 中的 (14).

若 G 为循环群，令 $o(a)=2n$, 则可令 $G=Z_{4n}=\langle x\rangle$, ($n$ 为一个大于 2 的奇数) 使得 $a=x^2$. 这时，我们有 $v=x^n$ 或 x^{2n}. 前者我们有 $S=\{x^2,x^{2n+2},x^{n+2}\}$; 后者我们有 $S=\{x^2,x^{2n+2},x^{3n+2}\}$. 对于这两种情形，我们用同样的方法可以证明：如果 X 是非正规的，那么 n 定为偶数．但已知 n 为奇数，故此时 X 正规．

(iii) $\langle a\rangle\cap\langle v\rangle=1$

此时 $G=Z_n\times Z_4=\langle a\rangle\times\langle v\rangle$, $b=av^2,c=av$, 用和 (i) 相同的方法可以证明，任取 A_1 中的 3 阶元 σ, 不妨令 $a^\sigma=av^2,(av^2)^\sigma=av,(av)^\sigma=a$. 若 $n\neq 4k(k>0)$ 时，则 $1^\sigma\neq 1$, 这与 $\sigma\in A_1$ 矛盾，矛盾说明 A_1 中没有 3 阶元，而 A_1 同构于 S_3 的一个子群，所以 $|A_1|\le 2$. 所以 X 正规．若 $n=4k(k>0)$ 时，则 $1^\sigma=1$, 所以 $\sigma\in A_1$. 但若 σ 是 G 的自同构，则 $a^\sigma=av^2,(av^2)^\sigma=av,(av)^\sigma=a$. 因此 $v^\sigma=(a^{-1}av)^\sigma=a^{-1}v^2a=v^2$, 矛盾．所以 $\sigma\notin\mathrm{Aut}(G)$,

所以 X 非正规. 于是得到定理 1.1 中的 (15). 证毕.

最后, 我们用两个引理来解决 $c^2 \neq ab$ 的情况, 从而结束定理 1.1 的证明. 通过引理 3.8 我们先给出了此时 X 正规的一个充要条件, 然后用引理 3.9 定出了此时的全部非正规的情形.

引理 3.8 如果 $\langle a,b\rangle \cap \langle c\rangle \neq 1$, 且 $o(c) > 2$, 又假定 $c^2 \neq ab$, 则 X 正规当且仅当 a,b,a^2,ab,ab^{-1} 中至少有一个在 $\langle c\rangle$ 中.

证　必要性: 假设结论不成立. 令置换 $\sigma = (a,b)(ac,bc)(ac^2,bc^2)...(ac^{k-1},bc^{k-1})$, 其中 $k = o(c)$. 因为 $ab^{-1} \notin \langle c\rangle$, 所以 σ 是一个非单位元. 下面我们分三步来证明 σ 在 A_1 中, 但不在 $\mathrm{Aut}(G)$ 中. 首先, 因为 $a,b \notin \langle c\rangle$, 显然 $1^\sigma = 1$. 其次, 我们来证明 $\sigma \in A_1$. 对任意的 ac^i, 以其为顶点的边有 $(ac^i,a^2c^i),(ac^i,abc^i),(ac^i,ac^{i+1}),(ac^{i-1},ac^i)$, $(ab^{-1}c^i,ac^i),(c^i,ac^i)$. 容易验证 σ 仍把它们变成 X 的边. 同理以任意的 bc^i 为顶点的边在 σ 的作用下仍变为边; 而那些不以 ac^i,bc^i 为顶点的边, 显然在 σ 的作用下不变, 因而 $\sigma \in A_1$. 再次, 因为 $a^2,ab \notin \langle c\rangle$, 所以 $a^3 \neq ac^i,bc^i$. 从而 $(a^3)^\sigma = a^3$. 若 $\sigma \in \mathrm{Aut}(G)$, 则 $(a^3)^\sigma = (a^\sigma)^3 = b^3$, 故 $a^3 = b^3$, 所以 $a = b$, 矛盾. 故 $\sigma \notin \mathrm{Aut}(G)$. 以上说明 $1 \neq \sigma \in A_1 \setminus \mathrm{Aut}(G)$, 所以 X 非正规, 矛盾于题设.

充分性: 首先, 若 $a \in \langle c\rangle$, 对任意的 $g \in G$, 若 $\sigma \in A_g \cap A_{(gS)}$, 我们来证明 $\sigma \in A_{(gS^2)}$. 易见 gac,gbc,gc^2 在 σ 的作用下均不动, 我们说 ga^2 与 gab 也一定不动. 否则, 若 ga^2 与 gab 在 σ 的作用下互变, 则定有 $ga^2c,gabc$ 在 σ 的作用下互变. 一般地, 对任意的整数 m, 都有 ga^2c^m 与 $gabc^m$ 互变. 事实上这是可以通过对 m 用归纳法得到的. 这样因为 $a \in \langle c\rangle$, 故一定有 c^i 使的 $ac^i = 1$. 从而也可以推出 ga 与 gb 互变, 这就矛盾于我们的假设, 故 $\sigma \in A_{(gS^2)}$. 由 g 的任意性及 X 的连通性可知, A_1 忠实地作用于 S 上, 即 A_1 同构于 S_3 的一个子群. 而因为 $c^2 \neq ab$, 则显然对任意的 $\alpha \in A_1$, 有 $(c^2)^\alpha = c^2$, 从而 $c^\alpha = c$. 所以 A_1 中没有 3 阶元, 从而 $|A_1| \leq 2$, 故此时 X 正规. 其次, 若 $b \in \langle c\rangle$, 用和上面相似的方法我们可以得到 X 正规, 细节从略. 再次, 若 $a^2 \in \langle c\rangle$, 对任意的 $g \in G$, 任取 $\sigma \in A_g \cap A_{(gS)}$, 则显然 gc,gc^2 在 σ 的作用下不动. 对任意的整数 m, 我们假设 $(gc^j)^\sigma = gc^j, j \leq m$. 因为 gc^{m-1},gc^m 不动, 所以若 gac^{m-1},gbc^{m-1} 不动, 则也有 gac^m,gbc^m 不动. 若 gac^{m-1},gbc^{m-1} 互变, 则 gac^m,gbc^m 互变. 无论哪种情况都有 gc^{m+1} 不动. 这说明对任意的整数 m, 都有 $(gc^m)^\sigma = gc^m$. 因为 $a^2 \in \langle c\rangle$, 所以存在 $c^i \in \langle c\rangle$, 使得 $a^2 = c^i$. 从而 $(ga^2)^\sigma = ga^2$. 而显然有 gac,gbc 在 σ 的作用下不动, 从而亦有 $(gab)^\sigma = gab$, 所以 $\sigma \in A_{(gS^2)}$. 这样由 g 的任意性以及 X 的连通性, 有 A_1 忠实地作用于 S 上. 所以 A_1 同构于 S_3 的一个子群. 又因为 $c^2 \neq ab$, 所以对任意的 $\alpha \in A_1$, $(c^2)^\alpha = c^2$, 进而 $c^\alpha = c$, 所以 A_1 中没有 3 阶元, 从而 $|A_1| \leq 2$. 故 X 正规. 对于 $ab \in \langle c\rangle$, 我们用类似的方法可得 X 的正规性. 最后, 若 $ab^{-1} \in \langle c\rangle$, 对任意的 $g \in G$, 任取 $\sigma \in A_g \cap A_{(gS)}$, 若 ga^2 与 gab 在 σ 的作用下互变, 则由前面的分析可知对任意的整数 m, ga^2c^m 与 $gabc^m$ 在 σ 的作用下互变. 而 $ab^{-1} \in \langle c\rangle$. 不妨设 $ab^{-1} = c^{i-j}(i > j)$, 则 $ac^i = bc^j, ac^j = bc^i$, 这即说明 ga^2c^j 与 $gabc^j$ 不动, 矛盾. 故 ga^2,gab 在 σ 的作用下不动, 而显然 gac,gbc 在 σ 的作用下不动, 所以 $\sigma \in A_{(gS^2)}$. 这样由 g 的任意性以及 X 的连通性, 我们有 A_1 忠实地作用于 S 上. 所以 A_1 同构于 S_3 的一个子群. 又因为 $c^2 \neq ab$, 所以对任意的 $\alpha \in A_1$, $(c^2)^\alpha = c^2$, 进而 $c^\alpha = c$, 所以 A_1 中没有 3 阶元, 从而 $|A_1| \leq 2$. 故 X 正规. 证毕.

引理 3.9 在引理 3.8 的假定下, 则除了定理 1.1 中的 (16), (17) 外 X 均正规.

证　由引理 3.8 得, 此时 X 非正规, 则当且仅当 $a,b,ab,a^2,ab^{-1} \notin \langle c\rangle$, 我们分以下两种情况来证明

(i) $\langle a,b\rangle=\langle a\rangle$

此时 $G=\langle a,c\rangle$, 假设 $o(a)=nh, o(c)=mh$, (m,n,h 均为整数), $|\langle a\rangle\cap\langle c\rangle|=h>1$. 先来证明这样一个事实，即 m,n,h 满足下面的条件 ($4'$), 与 $a,b,a^2,ab,ab^{-1}\notin\langle c\rangle$ 是等价的.

$$m\text{ 为任意整数, }h>1, 2\nmid h, 2\mid n,\text{若 }\frac{n}{2}\text{为奇数时，则 }n>2;\text{若 }\frac{n}{2}\text{为偶数时，则 }n>4. \quad (4')$$

假设 $\langle a\rangle\cap\langle c\rangle=H$, 且 $a,b,a^2,ab,ab^{-1}\notin H$. 则因为 $ab^{-1}\notin H$, 所以 $2\mid n, 2\nmid h$; 若 $\frac{n}{2}$ 为奇数时, 因为 $a^2\notin H$, 则 H 为 $\langle a^2\rangle$ 的真子群, 所以 $h<\frac{nh}{2}$, 亦即 $n>2$. 若 $\frac{n}{2}$ 为偶数时, 我们说 $a^4\notin H$. 若不然， $H=\langle a^4\rangle$, 从而 $o(a)=4h$. 由此得 $ab=a^{2h+2}$, 而 $(ab)^h=a^{(2h+2)h}=a^{2h(h+1)}=1$, 又因为 $(ab)^2=a^4$, 从而说明 $o(ab)=o(a^4)=h$. 所以 $ab\in H$, 矛盾. 故 $a^4\notin H$, H 为 $\langle a^4\rangle$ 的真子群, 所以 $h<\frac{nh}{4}$, 亦即 $n>4$. 以上的分析说明， m,n,h 满足条件 ($4'$). 假设 m,n,h 满足条件 ($4'$), 则显然 $a\notin\langle c\rangle$. $ab^{-1}\notin\langle c\rangle$, 否则 $2\mid h$. $a^2\notin\langle c\rangle$, 否则 $n\le 2$. $ab\notin\langle c\rangle$, 否则若 $\frac{n}{2}$ 为奇数时， $a^2\in\langle c\rangle$. 若 $\frac{n}{2}$ 为偶数时， $a^4\in\langle c\rangle$, 从而 $n\le 4$. $b\notin\langle c\rangle$, 否则 $b^2=a^2\in\langle c\rangle$, 矛盾.

下面我们来分析群 G 的结构，由有限交换群的分解定理，设 $G=Z_k\times Z_t, t\mid k$. 其中 $k=\frac{smnh}{(m,n)}, t=\frac{(m,n)}{s}$ (s,t 为整数). 由假设, $|\langle a\rangle\cap\langle c\rangle|=h$, 而 $|\langle a^t\rangle\cap\langle c^t\rangle|\le|\langle a\rangle\cap\langle c\rangle|=h$, 此时 $a^t,c^t\in Z_k$, 所以 $|\langle a^t\rangle\cap\langle c^t\rangle|=(o(a^t),o(c^t))=sh$, 所以 $sh\le h$, 故只能有 $s=1, t=(m,n)$. 此时 $G=Z_k\times Z_t=\langle x\rangle\times\langle y\rangle, k=\frac{mnh}{(m,n)}, t=(m,n)$. 我们取 $S_1=\{x^{\frac{k}{nh}}y, x^{\frac{k}{nh}}y(x^{\frac{k}{nh}}y)^{\frac{nh}{2}}, x^{\frac{k}{mh}}y^{-1}\}$, 显然 $G=\langle S_1\rangle$. 令 $\alpha: a\mapsto x^{\frac{k}{nh}}y, c\mapsto x^{\frac{k}{mh}}y^{-1}$, 则 α 可以扩展为 G 的自同构, 且 $S^\alpha=S_1$, 所以 $\mathrm{Cay}(G,S)\cong\mathrm{Cay}(G,S_1)$. 故不失一般性我们取 $a=x^{\frac{k}{nh}}y, b=x^{\frac{k}{nh}}y(x^{\frac{k}{nh}}y)^{\frac{nh}{2}}$, $c=x^{\frac{k}{mh}}y^{-1}$. 这就得到定理 1.1 中的 (16).

(ii) $\langle a,b\rangle=\langle a,u\rangle=\langle a\rangle\times\langle u\rangle, u=ab^{-1}$

此时 $\langle a,b\rangle\cap\langle c\rangle=\langle a\rangle\cap\langle c\rangle, G=\langle a,c\rangle\times\langle u\rangle$, 仍假设 $\langle a\rangle\cap\langle c\rangle=H$, $o(a),o(c)$ 仍同 (i) 的假设. 先来证明如下的事实, 即 $a,b,a^2,ab,ab^{-1}\notin\langle c\rangle$ 当且仅当 $n>2$. 假设 $a,b,a^2,ab,ab^{-1}\notin\langle c\rangle$. 则由 $a^2\notin H$, 知 $|H|<|\langle a^2\rangle|=\frac{nh}{2}$, 所以 $\frac{hn}{2}>h$, 即 $n>2$. 假设 $n>2$, 若 nh 为奇数时，则 $a,b,a^2,ab,ab^{-1}\notin H$. 若 nh 不为奇数时，则显然 $a\notin\langle c\rangle$; $ab^{-1}\notin\langle c\rangle$. 且 $a^2\notin\langle c\rangle$, 否则 $n\le 2$. $ab\notin\langle c\rangle$, 否则, 若 $\frac{nh}{2}$ 为奇数时， $a^2\in\langle c\rangle$. 若 $\frac{nh}{2}$ 为偶数时, 若 $a^4\in\langle c\rangle$, 从而 $n=4$, $ab=a^2u$, 所以 $o(ab)=2h$, 因而 $ab\notin\langle c\rangle$. 若 $a^4\notin\langle c\rangle$, 显然 $ab\notin\langle c\rangle$. $b\notin\langle c\rangle$, 否则 $b^2=a^2\in\langle c\rangle$.

下面我们来分析群 G 的结构, 由有限交换群的分解定理, 设 $G=\langle a,c\rangle\times\langle u\rangle=Z_k\times Z_t\times Z_2, t\mid k$. 其中 $k=\frac{smnh}{(m,n)}, t=\frac{(m,n)}{s}$ (s,t 为整数). 由假设， $|\langle a\rangle\cap\langle c\rangle|=h$, 而 $|\langle a^t\rangle\cap\langle c^t\rangle|\le|\langle a\rangle\cap\langle c\rangle|=h$, 此时 $a^t,c^t\in Z_k$, 所以 $|\langle a^t\rangle\cap\langle c^t\rangle|=(o(a^t),o(c^t))=sh$, 所以 $sh\le h$, 故只能有 $s=1, t=(m,n)$. 此时 $G=Z_k\times Z_t\times Z_2=\langle x\rangle\times\langle y\rangle\times\langle u\rangle, k=\frac{mnh}{(m,n)}, t=(m,n)$. 我们取 $S_1=\{x^{\frac{k}{nh}}y, x^{\frac{k}{nh}}yu, x^{\frac{k}{mh}}y^{-1}\}$, 显然 $G=\langle S_1\rangle$. 令 $\beta: a\mapsto x^{\frac{k}{nh}}y, u\mapsto u, c\mapsto x^{\frac{k}{mh}}y^{-1}$, 则 β 可以扩展为 G 的自同构, 且 $S^\beta=S_1$, 所以 $\mathrm{Cay}(G,S)\cong\mathrm{Cay}(G,S_1)$. 故不失一般性我们取 $a=x^{\frac{k}{nh}}y, b=x^{\frac{k}{nh}}yu$, $c=x^{\frac{k}{mh}}y^{-1}$. 这就得到定理 1.1 中的 (17). 证毕.

4 应用

本节证明定理 1.4, 它的证明是通过下面的两个引理来完成.

引理 4.1 设 X 是 $p^n(n\le 2)$(p 是一个奇素数) 个点上的 2 度有向对称图，则 X 为定理 1.4 中的 (1)–(3).

证 设 X 是 p, p^2 阶 2 度有向对称图，由定理 2.2 知 X 为交换群上的 Cayley 有向图，再

由定理 1.1 知 X 亦为正规 Cayley 有向图. 这样我们仅须将 p, p^2 阶交换群上的弧传递 Cayley 有向图定出即可. 我们分以下两种情况来证明.

(i) $G = Z_n = \langle u \rangle \quad (n = p, p^2)$

此时我们有 $X \cong \mathrm{Cay}(G, S)$, $S = \{u, u^m\}$. 因为 X 对称且正规, 我们有 $|A_1| = 2$. 所以存在 $\alpha \in A_1$, 使得 $u^\alpha = u^m, (u^m)^\alpha = u$, 即 $u^{m^2} = u, m^2 \equiv 1 (\mathrm{mod}\ n)$. 故 $X \cong \mathrm{Cay}(G, \{u, u^m\}), m^2 \equiv 1 (\mathrm{mod}\ n)$. 显然令 $\alpha : u \mapsto u^m$, 则 α 可以扩展为 G 的自同构, 且 α 轮换 S 中的元素, 从而说明 X 弧传递. 于是得到了定理 1.4 中的 (1) 和 (2).

(ii) $G = Z_p \times Z_p = \langle c \rangle \times \langle d \rangle$

此时显然有 $X \cong \mathrm{Cay}(G, S), S = \{c, d\}$. 即得到了定理 1.4 中的 (3). 证毕.

引理 4.2 设 X 是 $p^n (n \le 2)$(p 是一个奇素数) 个点上的 3 度有向对称图, 则 X 为定理 1.4 中的 (4)–(7).

证 设 X 是 p, p^2 阶 3 度有向对称图, 由定理 2.2 可知此时 X 为 p 或 p^2 阶群上的 Cayley 有向图. 由定理 1.1 可知 X 为正规的. 若 $G = Z_n = \langle u \rangle, n = p$ 或 p^2. 设 $S = \{u^i, u^j, u^k\}$, 由 X 弧传递且正规, 可知一定存在一个 G 的 3 阶自同构 α, 使得 $(u^i)^\alpha = u^j, (u^j)^\alpha = u^k, (u^k)^\alpha = u^i$. 而 $G = \langle S \rangle$, 所以 $o(u^i) = o(u^j) = o(u^k)$, 所以我们可以假设 $S = \{u, u^m, u^{m^2}\}$. 由 $(u^{m^2})^\alpha = u^{m^3} = u$, 我们可知 $m^3 \equiv 1 (\mathrm{mod}\ n)$. 这便是定理 1.4 中的 (4), (5). 显然 (4), (5) 都是弧传递的. 若 $G = Z_p \times Z_p = \langle c \rangle \times \langle d \rangle$. 我们不妨设 $S = \{c, d, c^m d^n\}$. 由 X 弧传递, 可知一定存在 G 的一个 3 阶自同构 β, 使得 $c^\beta = d, d^\beta = c^m d^n, (c^m d^n)^\beta = c$. 这样, $d^m (c^m d^n)^n = c$, 从而 $d^{n^2+m} = 1, c^{mn} = c$, 所以 $n^2 + m \equiv 0 (\mathrm{mod}\ p), mn \equiv 1 (\mathrm{mod}\ p)$. 用和引理 3.3 相类似的方法, 我们可以证明, 此时 A_1 同构于 S_3 的一个子群. 容易验证当 $m \equiv n (\mathrm{mod}\ p)$ 时, $\alpha : c \mapsto d, d \mapsto c$ 可以扩展为 G 的一个 2 阶自同构, 且 $S^\alpha = S$. 所以 $\mathrm{Aut}(X) = (Z_p \times Z_p) : S_3$. 此为定理中 1.4 中的 (6). 容易证明是 (6) 是弧传递的. 当 $p \nmid (m - n)$ 时, 则不存在 G 的 2 阶自同构 α, 使得 $S^\alpha = S$. 所以 $\mathrm{Aut}(X) = (Z_p \times Z_p) : Z_3$. 此为定理 1.4 中的 (7). 容易证明 (7) 是弧传递的. 证毕.

参 考 文 献

[1] Xu M Y. Automorphism groups and isomorphisms of Cayley digraphs. *Discrete Math.*, 1998, **182**: 309–319.

[2] Du Shaofei, Wang Ruji and Xu Mingyao. On the normality of Cayley digraph of group of order twice a prime. *Australasian Journal of Combinatorics* , 1998, **118**: 227–234.

[3] Lu Zaiping and Xu Mingyao. On the normality of Cayley graphs of order pq. *Australas. J. Combin.*, 2003, **27**: 81–93.

[4] Young-Gheel Baik, Feng Yanquan, Hyo-Seob Sim and Mingyao Xu. On the normality of Cayley graph of abelian groups. *Algebra Colloq.*, 1998, **5**: 297–304.

[5] Young-Gheel Baik, Feng Yanquan and Hyo-Seob Sim. The normality of Cayley graphs of finite abelian groups with valency 5. *Systems Sci. Math. Sci.*, 2000, **13**: 425–431.

[6] 徐明曜. 4 度 1- 正则图的一点注记. 科学通报, 2000, **45**: 2160–2162.

[7] Xu Mingyao and Xu Jing. Arc-transitive Cayley graphs of valency at most four on abelian groups. *Southeast Asian Bull. Math.*, 2001, **25**: 355–363.

[8] Marušič D. Vertex transitive graphs and digraphs of order p^k. *Annals of Discrete Math.*, 1985, **27**: 115–128.

ON THE NORMALITY OF DIRECTED CAYLEY GRAPHS OF ABELIAN GROUPS

Xu Mingyao Zhang Qinhai Zhou Jinxin

(*School of Mathematics and Cumputer Science, Shanxi Teachers University, Shanxi* 041004)

Abstract A direced Cayley graph $X = \mathrm{Cay}(G, S)$ is called normal for G if the right representation $R(G)$ of G is normal in the full automorphism group $\mathrm{Aut}(X)$. In this paper, we determine all non-normal directed Cayley graphs of finite abelian groups with valencies 2 and 3. Using the result, we give a complete classification of connected directed arc-transitive graphs of order p^n $(n \leq 2, p$ an odd prime) with valency at most 3.

Key words Cayley graphs, automorphism groups, normal Cayley digraphs, arc-transitive graphs.