文章编号:1002-0411(2003)05-0436-06

多采样率数字控制系统综述

肖 建, 徐志根
(西南交通大学电气工程学院, 四川 成都 610031)

摘 要:本文给出了多采样率数字控制系统的发展和目前研究情况的综述.根据系统中各采样周期之间的关系,多采样率控制系统可以分为输入多采样率控制系统. 输出多采样率控制系统和广义多采样率控制系统等.它们又分别对应于采用广义保持器.广义采样器和周期时变控制器的数字控制系统.文中对这三类系统的特点和近期研究成果进行了系统的介绍与讨论.由于"因果条件", 多采样率控制器具有结构约束.本文综述了几类满足这一结构约束的多采样率控制器的设计方法和各类多采样率控制系统.*

关键词:线性系统;计算机控制系统;多采样率数字控制系统;周期时变系统
中图分类号:TP13 文献标识码:B

SURVEY ON THE RESEARCH OF MULTIRATE DIGITAL CONTROL SYSTEMS

XIAO Jian, XU Zhi-gen
(*School of Electrical Engineering, Southwest Jiaotong University, Chengdu 610031, China*)

Abstract: The present state and the development of the multirate digital control systems are reviewed in this paper. According to the relationships of the different sampling periods of the system, the multirate digital control systems can be catalogued as multirate input controller, multirate output controller and generalized multirate sampled-data control system. They correspond to digital systems with generalized holds, with generalized samplers and with periodic time varying controllers, respectively. The characteristics as well as the recent research results are discussed and outlined. The well-known causality condition, puts the structure constraints on the multirate controllers. The design methods to overcome such constraints and different multirate digital control systems are surveyed.

Keywords: linear system; computer controlled system; multirate digital control system; periodic time varying system

1 引言(Introduction)

在数字控制系统中,计算机的输入和输出信号都是数字信号.而被控对象通常是连续时间系统.数字控制系统实际上是系统内部既有连续时间的模拟信号又有离散时间的数字信号的混合系统.为了便于对这一系统进行分析, 我们通常假定系统各处的采样器和保持器都在同一瞬间同时采样或保持.本文为区别起见,称这样的系统为单采样率数字控制系统.但是,在很多情况下,要求系统各处以相同的采样周期进行采样是不实际的.这时,数字控制系统内各个采样器或保持器是以不同的采样周期进行采样或保持的.我们称这类具有不同采样周期的采样器或保持器的数字控制系统为多采样率数字控制系统.

早期的多采样率控制系统与航空器的控制有关,早在 1957 年,Kranc 等人就开始了对多采样率控制系统的研究[1],基于脉冲传递函数模型,采用 Kranc 算子和采样器分解法等方法,得到了一系列成果.近年来,多采样率控制系统又重新受到人们的广泛关注.这是因为:

1) 随着社会的不断发展,被控对象越来越庞大,越来越复杂.由于信号变化速率相差很大,检测装置的采样周期不同等原因,要求系统各处都采用单一的采样周期是不实际的,甚至是不可能的.在这种情况下,必须采用多采样率数字控制系统.

2) 一般说来,采用较短的采样周期的计算机控制系统可得到较好的控制品质.但这将提高计算机控制系统的造价.许多被控对象各处信号的变化速率可能相差很大,例如温度信号与电信号的变化速率可能要相差几个数量级.为此,最好的方法是在系

* 收稿日期:2002-01-08
基金项目:国家自然科学基金资助项目(69774024)

统各处针对不同变化速率的信号采用不同的采样周期,从而可在花费较小成本前提下,提高系统的控制品质.

3) 多采样率数字控制系统是一个周期时变的控制系统,它能实现许多单采样率数字控制系统所不具备的控制目标,如改善系统的增益裕量,同时稳定,强镇定和分散控制等.

4) 虽然多采样率数字控制系统的结构一般都比单采样率数字控制系统复杂,但是它在某种意义下仍是一个有限维的周期时变系统,可以通过微机实施相应的控制算法.

根据多采样率数字控制系统中各个采样周期之间的关系,可以将多采样率数字控制系统分成输入多采样率数字控制系统、输出多采样率数字控制系统和广义多采样率数字控制系统等三类.

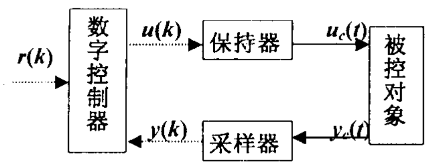

图 1　数字控制系统

Fig.1　Digital control system

2　输入多采样率控制系统 (Multirate input controller)

在图 1 所示系统中, $u_c(t)$ 和 $y_c(t)$ 分别是连续时间被控对象的 m 维输入向量和 p 维输出向量; $u(k)$ 和 $y(k)$ 分别是数字控制器的 m 维输出向量和 p 维输入向量; $r(k)$ 是 p 维的参考输入向量.图中虚线所对应的是离散时间信号,实线则对应着连续时间信号.若被控对象的输出 $y_c(t)$ 的各分量均以相同的采样周期 T_0 进行采样,而其输入 $u_c(t)$ 则是由 $u(k)$ 的各分量通过采用不同的输入采样周期 T_{ui}, $i=1,2,\cdots,m$(通常成立 $T_{ui} \leqslant T_0$) 的保持器得到的,则称这类系统为输入多采样率控制系统 (Multirate Input Controller 简称, MRIC).换句话说,在输入多采样率数字控制系统中,在 T_0 内只对 $y_c(t)$ 采样一次,但数次改变了 $u_c(t)$ 各分量的值.通常假定 T_{ui} 与 T_0 之间成整数倍关系:

$$T_0 = n_{ui} T_{ui}, \qquad i = 1, 2, \cdots, m \tag{1}$$

其中正整数 n_{ui}, $i = 1, 2, \cdots, m$ 称为输入采样重数.显然,这时的系统是以 T_0 为周期的周期时变系统.从另一个角度来看,输入多采样率数字控制系统也可看成是采用传统的以 T_0 为采样周期的单采样率数字控制器,同时采用广义保持器而构成系统.

设连续时间被控对象由以下状态方程描述:

$$P_c: \left|\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A_c x(t) + B_c u_c(t) \\ y_c(t) &= C_c x(t) \end{aligned}\right. \tag{2}$$

定义扩展输入向量

$$U_e(k) = \begin{vmatrix} u_1(kT_0) \\ u_1(kT_0 + T_{u1}) \\ \vdots \\ u_1(kT_0 + (n_{u1} - 1) T_{u1}) \\ \vdots \\ u_m(kT_0) \\ u_m(kT_0 + T_{um}) \\ \vdots \\ u_m(kT_0 + (n_{um} - 1) T_{um}) \end{vmatrix} \tag{3}$$

利用提升 (lifting) 技术,可以得到离散化后被控对象的线性时不变模型:

$$\left|\begin{aligned} x(k+1) &= Ax(k) + B_e U_e(k) \\ y(k) &= Cx(k) + D_e U_e(k) \end{aligned}\right. \tag{4}$$

其中 $y(k) = y_c(kT_0)$.利用这一模型,可以在线性时不变系统的范畴内讨论输入多采样率数字控制系统的分析和设计的问题.

对于数字控制系统来说,被控对象的输入仅仅在采样瞬间变化,而在相邻两个采样瞬间的整个时间区间内,无论被控对象的输出如何变化,其输入的特性仅根据保持器的特性而变化,换句话说,这时整个控制系统处于开环控制状态.输入多采样率数字控制系统通过增加输入采样速率,增加了数字控制器的控制能力,从而可以实现许多单采样率数字控制系统所不具备的控制功能.

在 1978 年 Chammas 等人[2] 就开展了采用广义保持器的数字控制器实现极点配置、最小拍控制的研究,他们的工作可以归纳在输入多采样率数字控制系统这一范畴内.文[3] 指出,如果输入采样重数 $n_{ui} \geqslant \nu_i$, 其中 ν_i 是被控对象 (2) 的一组局部能控性指标集,则式 (4) 中的 B_e 必为行满秩,在此基础上可以很容易地实现极点配置和闭环特征结构配置.文[4] 指出了输入多采样率数字控制系统可能存在控制变量和状态变量的大幅度震荡,和在各采样点之间连续时间的被控对象的动态响应对系统扰动过于敏感等问题, 并讨论了克服这些问题的闭环特征结构配置设计方法.与原被控对象相比,输入多采样率的引入,相当于增加了系统有效输入的个数,给控制

系统的设计增加了冗余度.文[5,6]利用这种冗余度,在实现闭环系统极点配置的同时,增加了闭环系统的鲁棒性.

3 输出多采样率数字控制系统(Multirate output controller)

与输入多采样率数字控制系统相对应,如果在图1所示的系统中,被控对象的输入 $u_c(t)$ 是 $u(k)$ 通过采样周期为 T_0 的保持器而得到的,而被控对象的输出 $y_c(t)$ 的各分量则以不同的采样周期 T_{yi} ($T_{yi} \leqslant T_0$), $i=1,2,\cdots,p$,进行采样;或者说,在周期 T_0 内,$u_c(t)$ 的各分量只改变一次,但是却数次检测被控对象的输出 $y_c(t)$,则称这类系统为输出多采样率控制系统(Multirate Output Controller,简称 MROC).通常我们也假定 T_{yi} 与 T_0 之间满足整数倍关系:

$$T_0 = n_{yi} T_{yi}, \quad i = 1,2,\cdots,p$$

其中正整数 n_{yi} 称为输出采样重数.

对于式(1)所示的连续时间被控对象,定义输出扩展向量:

$$Y_e(k) = \begin{vmatrix} y_1(kT_0) \\ y_1(kT_0 + T_{y1}) \\ \vdots \\ y_1(kT_0 + (n_{y1} - 1)T_{y1}) \\ \vdots \\ y_p(kT_0) \\ y_p(kT_0 + T_{yp}) \\ \vdots \\ y_p(kT_0 + (n_{yp} - 1)T_{yp}) \end{vmatrix} \tag{5}$$

利用提升技术,可以得到离散化后被控对象的线性时不变模型:

$$\begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \\ Y_e(k) = C_E x(k) + D_E u(k) \end{cases} \tag{6}$$

与输入多采样率数字控制系统不同,在输出多采样率数字控制系统中,对控制器存在着"因果约束".即对于因果系统,控制器在($kT_0 + jT$)时刻的输出 $u(kT_0 + jT)$ 只应当与($kT_0 + jT$)时刻及其以前的被控对象的输出 y 的采样值有关.这实际上是对相应控制器的结构约束.例如,若采用静态输出反馈控制器:

$$u(k) = -K_e Y_e(k) \tag{7}$$

则 K_e 必须为分块下三角阵.

输出 $y_c(t)$ 采样频率的增加,有利于控制器获得更多的关于被控对象的信息,使得输出多采样率数字控制系统具有更强大的控制能力.特别是当各 n_{yi} 足够大的时候,采用输出反馈的输出多采样率控制系统可以实现状态反馈控制器的许多功能.

文[7]首先提出了输出多采样率控制系统的概念,它可以看成是输入多采样率控制系统的对偶.指出,只要输出采样重数 $n_{yi} \geqslant \mu_i$,其中 μ_i 是被控对象(2)的一组局部能观测性指标集,则输出多采样率控制系统在利用静态输出反馈实现极点配置和特征结构配置等方面,具有与状态反馈一样的能力.利用输出多采样率控制系统不但可以实现极点配置和特征结构配置,同时控制器本身的动态行为也可以任意指定,从而可以很方便地构成强镇定控制器.文[8]在此基础上讨论了更广泛的一类输出多采样率控制系统.文[9]指出,除非输出多采样率控制系统的输出采样周期 T_{yi} 与帧周期 T_0 之间满足某些不等式,有可能出现很大的控制器增益,从而放大了系统噪声.文[10]将输出多采样率控制系统与通过 LQG 设计的控制系统在噪声扰动下的控制品质进行了比较,指出:当存在随机扰动时,输出多采样率控制系统的控制品质大大低于通过 LQG 设计的最优控制系统.文[11]采用双延时输出控制结构,即不仅利用输出变量 $y_c(t)$ 在采样瞬间的值 $y_c(kT_0)$,还利用 $y_c(t)$ 在采样点之间的值 $y_c(kT_0 + mT_0)$,($0 < m < 1$),来得出控制变量 $u((k+1)T_0)$,它可以看成为一类特殊的输出多采样率控制系统.文中表明,采用双延时输出控制可以消除系统的有限零点,从而在连续时间被控对象或它的离散化模型具有不稳定的零点时,也可以构造渐近逆系统和稳定的未知输入的观测器,并且可以构造具有 LTR 性质的输出反馈控制器.

4 广义多采样率控制系统(General multirate control system)

这是在最广泛意义下的多采样率控制,在该系统中,不但控制器输出向量 $u(k)$ 和输入向量 $y(k)$ 中各分量的采样周期可以不同,并且,$u(k)$ 各分量的采样周期(即输入采样周期) T_{ui}, $i=1,2,\cdots,m$ 和 $y(k)$ 中各分量的采样周期(即输出采样周期) T_{yi}, $i=1,2,\cdots,p$ 之间的关系也可以是任意的.我们通常假定各采样周期之间存在着整数倍的关系,即存在着正整数 n_{ui}, n_{yi} 和采样周期 T,满足:

$$T_{ui} = n_{ui} T, \quad i = 1,2,\cdots,m \tag{8}$$

$$T_{yi} = n_{yi} T, \quad i = 1,2,\cdots,p \tag{9}$$

称 T 为基本采样周期.令 q 为所有的 n_{ui} 和 n_{yi} 的最

小公倍数,则 $T_0 = qT$ 称为帧周期,整个多采样率数字控制系统在以 T_0 为周期下同步.前面两类多采样率数字控制系统 MRIC 和 MROC 可以看成是广义多采样率数字控制系统的特殊情况.

显然,多采样率数字控制系统是一个以 T_0 为周期的周期时变系统.利用式(3)和式(5)定义的输入扩展向量和输出扩展向量,采用提升技术可得被控对象的线性时不变状态空间描述:

$$\begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + B_r U_e(k) \\ Y_e(k) = C_r x(k) + D_r U_e(k) \end{cases} \tag{10}$$

在此基础上,可以利用线性时不变系统理论来分析与设计多采样率数字控制系统.

早在 1959 年,Kalman 和 Bertram[12] 便首次采用状态空间方法来分析多采样率数字控制系统.他们指出,若系统的各不同的采样周期之间成立整数倍关系的话,则可以用线性时不变状态空间模型来描述多采样率控制系统.自从 80 年代以来,多采样率数字控制系统的研究开始了一个新的发展阶段.Araki 等人[13]1986 年提出了多采样率控制系统的状态空间描述,并讨论了系统的传递函数特性和利用 Nyquist 判据判定控制系统的闭环稳定性等.Godbout 等人[14] 进一步完善了闭环多采样率数字控制系统的状态空间模型.由于离散时间状态空间模型只能描述系统在采样瞬间的动态行为,文[15]利用二次不同的提升技术,提出了多采样率数字控制系统的函数空间模型.它同时考虑了系统在采样点上和采样点之间的动态行为,并且具有线性时不变离散系统的形式.

对多采样率控制系统的设计问题的讨论是当前研究的重点.由于"因果约束"的存在,给控制系统设计带来了较大的困难.最直接的方法是在控制器设计过程中,将"因果约束"所要求的固定为零的元素看成是对控制器参数的约束,然后利用有约束的优化方法等设计控制系统.文[16]提出了采用预补偿的方法,即在被控对象线性时不变模型 $G(z) = C_e(sI - A)^{-1}B_e + D_e$ 的前面预置一个预补偿器:$P(z) = \text{block diag}\{z^{-1}I, \cdots, z^{-1}I, I\}$. 得到补偿后的被控对象:$\hat{G}(z) = G(z)\ P(z)$.设 $\hat{C}(z)$ 是根据 $\hat{G}(z)$ 进行综合所得到的控制器,则控制器 $C(z) = P(z) \cdot \hat{G}(z)$ 自动地满足"因果约束".文[17]提出了另一种类似的方法,定义线性算子 S_N 和它的伴随算子 S_N^*:

$$y = S_N u: \quad y(k) = u(Nk), \quad k \geqslant 0 \tag{11}$$

$$y = S_N^* u: \quad y(k) = \begin{cases} u(k/N) & \text{若 } N \text{ 整除 } k \\ 0 & \text{其余} \end{cases} \tag{12}$$

则经过预补偿 P 后的被控对象可以表示为:$\hat{G} = S_N G P S_N^*$,假定 $\hat{C}$ 是根据 $\hat{G}$ 进行综合所得到的控制器,则多采样率数字控制器 $C = PS_N^*\hat{C}S_N$ 自动地满足"因果约束".文[18]利用向量空间中 nest 算子及 nest 代数的嵌套性质,通过分解的方法,保证所得到的控制器自动地满足"因果约束",并将之应用于 H_∞ 多采样率数字控制系统的设计中.

文[19]利用非线性规划的方法实现极点配置控制器的设计.文[20]讨论了多采样率控制系统的镇定问题.Meyer[21]给出了多采样率数字控制系统中稳定化控制器的参数化结论.指出:令 S 为满足"因果约束"的 RH_∞ 矩阵的集合,式(10)所示系统传递函数矩阵 G 可以表为:

$$G = ND^{-1} = \hat{D}^{-1}\hat{N} \tag{13}$$

$$\begin{bmatrix} Y & X \\ -\hat{N} & \hat{D} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D & -\hat{X} \\ N & \hat{Y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \tag{14}$$

其中 $N, D, \hat{N}, \hat{D}, X, Y, \hat{X}, \hat{Y}$ 均是集合 S 中的元素.则所有使得多采样率控制系统为闭环稳定且满足"因果约束"的控制器 C 可以参数化为:

$$\begin{aligned} C &= \{(\hat{X} + DQ)(\hat{Y} - NQ)^{-1};\ Q \in S\} \\ &= \{(Y - Q\hat{N})^{-1}(X + Q\hat{D});\ Q \in S\} \end{aligned} \tag{15}$$

文[22]讨论了二次型最优控制问题,将连续时间二次型性能指标根据多采样率的特性离散化,则离散型二次型性能指标中将出现状态和控制变量的交叉项,采用适当的变换,可通过解 Ricatti 方程得到二次型最优控制.

在多采样率控制系统中,通常被控对象是连续的,而数字控制器则是离散的.为讨论这一混合系统的 H_2 和 H_∞ 控制,可以利用连续时间的提升技术,将多采样率控制系统等效为具有无穷维输入和输出空间的离散时间线性时不变系统,从而将问题变成具有"因果约束"的离散时间 H_∞ 控制标准问题.应用前面所提及的处理"因果约束"的方法和 H_∞ 设计方法,可以得到 H_∞ 控制系统.文[23,24]讨论了多采样率控制系统的 H_2 最优控制问题,文[18,25,26]等讨论了多采样率控制系统的 H_∞ 最优控制.文献[27]讨论了多采样率控制系统的 l_1 最优控制.

文[28]讨论了采用广义保持器的参考模型自适应控制,甚至在被控对象具有不稳定的零点且参考输入信号不满足持续激励条件的情况下,该控制系统也可以实现对阶次已知的被控对象模型渐近跟

踪.文[29]给出了具有较慢的参数估计算法情况下的自适应控制,它对应着输入多采样率自适应控制系统.文[30]讨论了状态空间形式的广义预测控制.

多采样率数字控制系统可以看成是一个周期时变的数字控制器与连续时间被控对象构成的闭环系统,因此,它可以实现许多常规单采样控制系统所不具备的控制功能,如改善系统增益裕量,实现分散控制、强稳定、鲁棒控制等.文[27]讨论了输出多采样率控制系统强镇定问题;文[16,17]讨论了利用多采样率控制系统实现具有任意大的增益裕量的镇定问题.文[16,31]等指出在采用传统的单采样率控制系统不能实现同时镇定时,采用多采样率控制系统则有可能实现同时镇定.分散控制是大系统控制中的一种重要的控制方式,文[32]介绍了采用多采样率控制系统实现分散控制的方法.另外,采用多采样率控制系统增加闭环系统的鲁棒性,也一直是讨论的热点之一[5,6,33].文[34]对1993年以前多采样率控制系统的研究及今后的方向作了一个很好的综述.

最后,在关于多采样率控制系统的分析方面,文[35]指出,多采样率控制系统在对于持续有界扰动的最优扰动抑制问题和对于具有非结构式不确定性的被控对象的鲁棒控制问题等方面,与单采样率控制系统相比,不具备优势.文[36]利用频率特性对多采样率控制系统的敏感度、鲁棒性和采样点之间的纹波现象进行了分析.文[37]则分析了多采样率控制系统的稳定性、能控性和能观测性等.文[38]得出了无纹波的最小拍鲁棒跟踪系统的条件及相应控制器的设计.

5 结束语(Conclusion)

本文综述了不同类型的多采样率数字控制系统的特点、发展历史和研究现状.特别是对多采样率数字控制系统设计和如何处理由于"因果条件"而带来的结构约束作了较为完整的阐述.如何采用更好的方法设计出满足"因果约束"的控制器以及如何增强多采样率数字控制系统的鲁棒性和克服采样点之间的纹波现象等仍然是当前的研究热点.

从多采样率控制系统研究的发展来看,多采样率控制系统是计算机控制发展过程到达了一个新的阶段对其理论的深入发展的要求.反过来,相信通过对采样率数字控制系统的研究,必能进一步推动计算机控制系统的实践,构造出功能更强、更符合实际系统要求的计算机控制系统.

参 考 文 献(References)

[1] Kranc G M. Input-output analysis of multirate feedback system [J]. IRE Trans. Automat. Contr., 1975, **3**(1): 21~28.

[2] Chammas A B, Leondes C T. Pole assignment by piecewise constant output feedback [J]. Int. J. Control, 1979, **29**(1): 31~38.

[3] Araki M, Hagiwara T. Pole assignment by multi-rate sampled-data output feedback [J]. Int. J. Control, 1986, **44**(6): 1661~1673.

[4] Patton R J, Liu G P, Patel P. Sensitivity properties of multirate feedback control system based on eigen-structure assignment [J]. IEEE Trans. Automat. Contr., 1995, **40**(2): 337~342.

[5] Berger C S, Peduto D. Robust digital control using multirate sampling [J]. Int. J. Control, 1997, **67**(5): 813~824.

[6] 肖 建,郭垂规.输入多采样率数字控制系统的鲁棒性极点配置[J].西南交通大学学报,1999,**34**(40): 379~383.

[7] Hagiwara T, Araki M. Design of a stable state feedback controller based on the multirate sampling of plant output [J]. IEEE Trans. Automat. Contr., 1988, **33**(9): 812~819.

[8] Hagiwara T, Fujimura T, Araki M. Generalized multirate output controllers [J]. Int. J. Control, 1990, **52**(3): 579~612.

[9] Er M J, Anderson B D O. Practical issue in multirate output controllers [J]. Int. J. Control, 1990, **53**(5): 1005~1020.

[10] Er M J, Anderson B D O. Performance study of multi-rate output controllers under noise disturbance [J]. Int. J. Control, 1992, **56**(3): 531~545.

[11] Mital J, Chida Y, Kaku Y, *et al*. Two-delay robust digital control and its applications —avoiding the problem on unstable limiting zeros [J]. IEEE Trans. Automat. Contr., 1990, **35**(8): 961~970.

[12] Kalman R E, Bertram J E. A unified approach to the theory of sampling system [J]. J. Franklin Inst., 1959, **267**(3): 405~436.

[13] Araki M, Yamamoto K. Multivariable multirate sampled-data systems: state-space description, transfer characteristics and Nyquist criterion [J]. IEEE Trans. Automat. Contr., 1986, **31**(1): 145~154.

[14] Godbout L F, Jordan D, Apostolakis I S. Closed-loop model for general multirate digital control system [J]. IEEE Proc. Pt. D, 1990, **137**(5): 329~336

[15] 肖 建.多采样率数字控制系统的函数空间模型[J].控制理论与应用,2000,**17**(2): 296~299.

[16] Khargonekar P P, Poolla K, Tannenbaum A. Robust control of linear time-invariant plants using periodic compensation [J]. IEEE Trans. Automat. Contr., 1985, **30**(11): 1088~1096.

[17] Francis B A, Georgiou T T. Stability theory for linear time-invariant plants with periodic digital controllers [J]. IEEE Trans. Automat. Contr, 1988, **33**(9): 820~832.

[18] Chen T W, Qiu L. H_∞ design of general multirate sampled-data control systems [J]. Automatica., 1994, **30**(9): 1139~1152.

[19] Godbout L F, Jordan D, Striefler' M E. Pole placement algorithm for multirate sampled linear system [J]. Automatica, 1994, **30**(4): 723~727.

[20] Colaneri P, Scattolimi R, Schiavoni V. Stabilization of multirate

sampled-data linear systems [J] . Automatica , 1990 ,**26**(2) :377 ~ 380 .

[21] Meyer D G. A parameterization of stabilizing controllers for multirate sampled-data systems [J] . IEEE Trans . Automat . Contr . , 1990 ,**35** (2) :233 ~ 237

[22] Apostolakis I , Jordan D. A time invariant approach to multirate optimal regulator design [J] . Int . J. Control , 1991 ,**53**(6) :1233 ~ 1254 .

[23] Voulgaris P G, Dahleh M A, Valavani L S . H_∞ and H_2 optimal controllers for periodic and multirate systems [J] . Automatica , 1994 , **30** (1) :251 ~ 263 .

[24] Qiu L, Tan K. Direct state space solution of multirate sample-data H2 optimal control [J] . Automatica , 1998 , **34**(7) : 1431 ~ 1437 .

[25] Voulgaris P G, Bamieh B. Optimal H_∞ control of hybrid multirate systems [A] . Proc 31st Conf, Decision and Control [C] . Tuscon USA:IEEE Press , 1992 .457 ~ 462 .

[26] Qiu L, Chen T. Multirate sampled-data systems : all H_∞ suboptimal controllers and the minimum entropy controller [J] . Automatica , 1999 , **44**(3) :537 ~ 550 .

[27] Dahleh M A, Voulgaris P G, Valavni L S . Optimal and robust controllers for periodic and multirate systems [J] . IEEE Trans . Automat . Contr . , 1992 , **37**(1) : 90 ~ 99 .

[28] Ortega R, Kreisselmeier G. Discrete-time model reference adaptive control for continuous-time systems using generalized sampled-data hold functions [J] . IEEE Trans . Automat . Contr . , 1990 , **35**(3) : 334 ~ 341 .

[29] Zhang C, Middleton R H, Evans R J. An algorithm for multirate sampling adaptive control [J] . IEEE Trans . Automat . Contr . ,1989 , **34**(7) :792 ~ 795 .

[30] Ling K V, Lim K W. A state space GPC with extensions to multirate control . Automatica , 1996 , **32**(7) : 1067 ~1071 .

[31] Kabamba P T, Yang C. Simultaneous controller design for linear time-invariant systems[J] . IEEE Trans . Automat . Contr . , 1991 ,**36** (1) :106 ~111 .

[32] Sezer M E, Siljak D D. Decentralized multirate control [J] . IEEE Trans . Automat . Contr . , 1990 , **35**(1) : 60 ~ 65 .

[33] Yan W Y, Bitmead R R. On applications of generalized sampled-data hold functions to robust enhancement [A] . Proc 12nd IFAC Conf [C] . Sydney Australia :Institution of Engineers , 1993 . 275 ~ 278 .

[34] Araki M. Recent development in digital control theory [A] . Proc 12nd IFAC Conf [C] . Sydney Australia : Institution of Engineers , 1993 .251 ~ 260 .

[35] Shamma J S, Dahleh M A. Time-varying versus time-invariant compensation for rejection of persistent bounded disturbances and robust stabilization[J] . IEEE Trans . Automat . Contr . , 1991 ,**36**(7) : 838 ~ 846

[36] Feuer A, Goodwin G C. Generalized sample hold functions-frequency domain analysis of robustness , sensitivity and intersample difficulties [J] . IEEE Trans . Automat . Contr . , 1995 ,**39**(9) : 1042 ~ 1047 .

[37] Hu B, Michel A N. Some qualitative properties of multirate digital control systems[J] . IEEE Trans . Automat . Contr . , 1999 , **44**(6) : 765 ~ 770 .

[38] Grasselli O M, Jetto L, Longhi S . Ripple-free dead-beat tracking for multirate sampled-data systems[J] . Int . J. Control , 1995 ,65(6) : 1437 ~1455.

作者简介

肖　建(1950 -) ,男 ,博士 ,西南交通大学教授 ,博士生导师 .研究领域为计算机控制系统 、鲁棒控制 ,电传动控制系统等 .

徐志根(1962 -) ,男 ,硕士 ,西南交通大学副教授 .研究领域为计算机控制系统 、智能控制等 .