

文章编号: 1002-0411(2002)01-051-04

# 一维模糊 PID 控制器的钝性稳定性分析

王守唐 高东杰

(中国科学院自动化研究所综合自动化工程中心 北京 100080)

**摘要:** 本文研究新近提出的模糊 PID 控制器<sup>[1]</sup>的稳定性问题. 由于该模糊 PID 控制器的模糊推理部分具有非线性特性, 因此本文采用钝性定理来分析它的稳定性. 本文给出分析稳定性的方法, 并针对一阶和二阶对象的一般形式, 给出了保证系统稳定的参数范围, 用仿真验证了所得结果. 高阶对象也可以使用圆判据求取相应结果.

**关键词:** 模糊 PID 控制器; 稳定性分析; 钝性定理

中图分类号: TP13

文献标识码: B

## STABILITY ANALYSIS OF FUZZY PID CONTROLLER WITH ONE-INPUT

WANG Shou-tang GAO Dong-jie

(Institute of Automation, Chinese Academy of Science, P. O. Box 2728, Beijing, China 100080)

**Abstract:** Stability of a fuzzy PID controller with one input, which is proposed recently, is studied in this paper. Fuzzy logic inference in the fuzzy PID controller is nonlinear, therefore, Passivity theorem is utilized to analyze its stability. The relations between parameters are given to guarantee stability of the whole system with respect to the first order plant and the second order plant. A simulation example is shown to verify the results. Stability of the higher-order plants can also be analyzed by passivity theorem.

**Keywords:** fuzzy PID controller, stability analysis, passivity theorem

### 1 引言(Introduction)

模糊逻辑控制器的稳定性问题一直是很难解决的问题. 由于模糊推理具有非线性特性, 所以对模糊控制器的稳定性分析一般采用的是非线性稳定性分析方法, 例如圆判据<sup>[2]</sup>、波波夫判据<sup>[3]</sup>、钝性定理<sup>[4]</sup>、小增益定理<sup>[5]</sup>等.

本文研究的对象是[1]中提出的一维模糊 PID 控制器. 该模糊 PID 控制器结构简单, 具有三个规则、至多六个调节参数、只要求一个输入(系统误差). 该模糊 PID 控制器的模糊推理部分是非线性的, 通过调节参数, 非线性部分可以近似为线性, 所以该模糊 PID 控制器可以产生至少不次于线性 PID 控制器的控制效果. 由该模糊 PID 控制器的模糊逻辑部分采用的模糊规则和隶属度函数可以推出模糊非线性的解析形式, 随着参数的变化, 模糊非线性的输入输出关系可以归纳为四种类型的曲线. 这就给稳定性分析带来了方便. 对该模糊 PID 控制器的稳

定性分析可以采用圆判据<sup>[7]</sup>, 但是在调节模糊推理时非线性曲线一直在变化, 要确定非线性上界比较困难.

本文采用钝性定理分析系统稳定性, 优点在于不必考虑模糊非线性变化, 只考虑 PID 部分的参数即可. 给出了分析该控制器稳定的一般方法, 并针对一阶和二阶对象的一般形式, 分析了当采用该模糊 PID 控制器进行控制时的稳定性, 给出了保证系统稳定时参数要满足的条件. 对于高阶系统, 可以采用类似的方法.

### 2 模糊 PID 控制器(The fuzzy PID controller)

本节介绍[1]中提出的新型模糊 PID 控制器, 其结构如图 1 所示.

其中,  $e$  是系统误差,  $\hat{e}$  是规范化后的系统误差,  $\hat{u}_p$  是模糊非线性部分的输出,  $\hat{u}$  是模糊 PID 控制器

的输出,  $u$  是规范化后的输出,  $\hat{k}_p, \hat{k}_D, \hat{k}_I$  分别是比例、微分、积分控制的增益,  $s_e$  和  $s_u$  分别是输入和输出

的规范化因子. (本文讨论中忽略  $s_u$  的限幅).

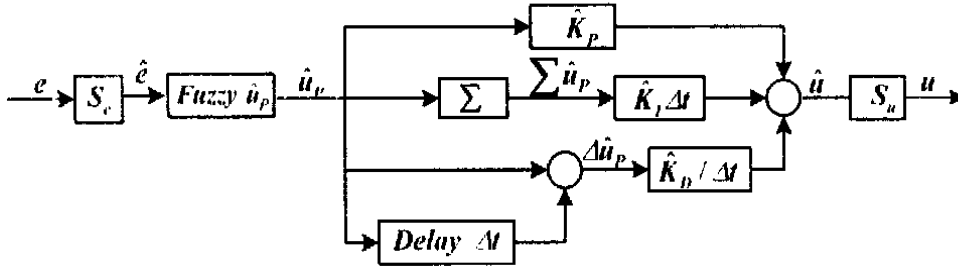


图1 新型模糊PID控制器

Fig.1 The new fuzzy PID controller

该模糊PID控制器模糊推理规则为:

规则1: 如果  $\hat{e} = NB$ , 那么  $\hat{u}_p = NB$ ;

规则2: 如果  $\hat{e} = PB$ , 那么  $\hat{u}_p = PB$ ;

规则3: 如果  $\hat{e} = AZ$ , 那么  $\hat{u}_p = AZ$ .

PB 指“positive big”, NB 指“negative big”, AZ 指“approximate zero”

$\hat{e}$  和  $\hat{u}_p$  的隶属度函数如图2所示, 可以看出:  $\hat{u}_p$  的隶属度随着  $x_1$  和  $x_2$  变化. 其中:  $0 \leq x_1 \leq 1$  和  $-x_1 \leq x_2 \leq 1$  (见[2]).

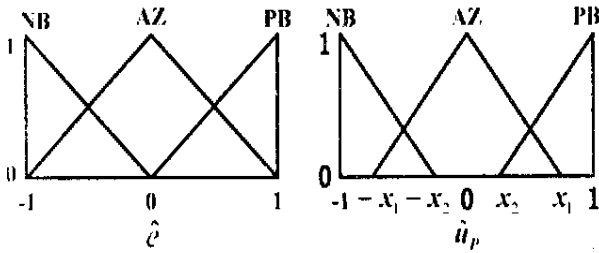


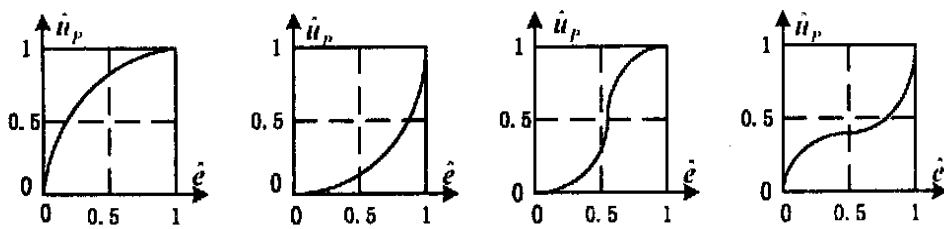
图2  $\hat{e}$  和  $\hat{u}_p$  的隶属度函数

Fig.2 Membership of  $\hat{e}$  and  $\hat{u}_p$

$e$  和  $\hat{e}$  的关系为:

$$\hat{e} = \begin{cases} 1 & s_e \cdot e > 1 \\ s_e \cdot e & |s_e \cdot e| \leq 1 \\ -1 & s_e \cdot e < -1 \end{cases} \quad (1)$$

如文[2]和[5]中所述, 根据  $x_1$  和  $x_2$  的不同, 模糊推理可以产生四种类型的曲线, 即“C”型、“反C”型、“S”型和“反S”型曲线, 如图3所示.



(a) “C”型曲线 (b)“反C”型曲线 (c) “S”型曲线 (d)“反S”型曲线

图3 模糊推理产生的四种类型曲线

Fig.3 Four curves produced by fuzzy reasoning

### 3 钝性定理(The passivity theorem)

本节简要介绍钝性定理, 详细内容请参见[6]和[8].

在希尔伯特空间  $H$  定义内积:

$$(x, y) = \int_0^\infty x(t)y(t) dt \quad (2)$$

空间中的元的范数可以由内积来定义:

$$\|x\| = \sqrt{(x, x)} \quad (3)$$

$x_T(t)$  指  $x$  的  $T$  截取, 其定义为:

$$x_T(t) = \begin{cases} x(t) & 0 \leq t \leq T \\ 0 & t \geq T \end{cases} \quad (4)$$

$H_e$  是指扩展的希尔伯特空间, 定义为:

$$H_e = \{x \mid \forall T > 0, (x_T, x_T) = \|x_T\|^2 < \infty\} \quad (5)$$

引入记号:

$$(x, y)_T = (x, y_T) = (x_T, y) = (x_T, y_T) \quad (6)$$

定义: 算子  $G: H_e \rightarrow H_e$  称为

(1) 钝的, 如果存在常数  $\beta$ , 使得:

$$(Gx, x)_T \geq \beta, \forall T > 0 \quad (7)$$

(2) 严格钝的, 如果存在常数  $\delta > 0, \beta$ , 使得:

$$(Gx, x) \geq \delta \|x_T\| + \beta, \forall T > 0 \quad (8)$$

对于线性算子  $G$  钝的充分必要条件为:

$$\operatorname{Re}G(jw) \geq 0, \forall w \in R; \quad (9)$$

$G$  严格钝的充分必要条件为:

$$\operatorname{Re}G(jw) \geq \delta, \forall w \in R; \quad (10)$$

其中  $\delta$  是某个正常数

算子  $G$  稳定指满足以下条件:

$$\|Gx\|_T \leq \gamma \|x\|_T + \beta \quad (11)$$

研究图 4 所示的一般控制系统

$$\begin{cases} e_1 = u_1 - G_2 e_2 \\ e_2 = u_2 + G_1 e_1 \end{cases} \quad (12)$$

$G_1, G_2$  是从  $H_e \rightarrow H_e$  的算子. 如果  $G_1$  稳定. 且存在常数  $\delta_1, \delta_2, \beta_1$  和  $\beta_2$ , 使得:

$$(x, G_1 x)_T \geq \delta_1 \|x\|_T^2 + \beta_1 \quad (13)$$

$$(x, G_2 x)_T \geq \delta_2 \|G_2 x\|_T^2 + \beta_2 \quad (14)$$

则系统 BIBO 稳定的充分条件是:  $\delta_1 + \delta_2 > 0$ .

当  $\delta_2 = 0$  时, 定理成立的条件是  $\delta_1 > 0$ , 也就是说  $G_1$  增益有限且严格钝的,  $G_2$  是钝的, 这就是本文稳定性分析的依据.

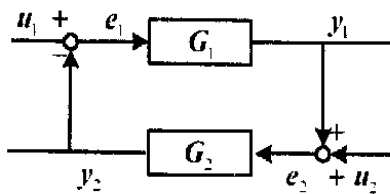


图 4 一般控制系统  
Fig. 4 IO system

#### 4 稳定性分析(Stability analysis)

当用该模糊 PID 控制器控制一个线性对象时, 整个控制系统的线性部分由两部分组成, 即: 控制器的 PID 部分和被控对象传递函数. 非线性部分指模糊推理部分和误差规范化因子  $s_e$ . 先讨论系统的非线性部分上下界

因为:  $\hat{u}_p/e = (\hat{u}_p/\hat{e}) \cdot (\hat{e}/e)$  (15)

所以:  $\sup(\hat{u}_p/e) = \sup(\hat{u}_p/\hat{e}) \cdot \max(\hat{e}/e)$  (16)

$\inf(\hat{u}_p/e) = \inf(\hat{u}_p/\hat{e}) \cdot \min(\hat{e}/e)$  (17)

由(1)式可知:  $\max(\hat{e}/e) = s_e$ , 如果  $e$  是有界的 (这是一般控制系统的基本要求), 总可以得到一个有限值等于  $\min(\hat{e}/e)$ , 如图 5 所示的虚线的斜率.

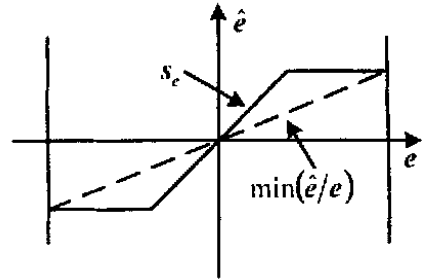


图 5  $\hat{e}/e$  的最大最小值

Fig. 5 Maximum and Minimum of  $\hat{e}/e$

非线性曲线是单调上升的<sup>[1]</sup>, 从图 3 可以看出, 只要非线性曲线在原点的斜率不是 0 和  $\infty$ , 那么就存在有限值  $l_1$  和  $l_2$ , 使得  $l_1 \leq \hat{u}_p/\hat{e} \leq \hat{e} \leq l_2 (0 \leq l_1 < l_2)$ . 而非线性曲线在原点的斜率为:<sup>[1]</sup>

$$NS_0 = \left. \frac{\partial \hat{u}_p}{\partial e} \right|_{\hat{e}=1} = \begin{cases} \frac{1-x_2^2}{2x_1}, & x_1 \leq x_2 \\ \frac{1-x_1^2}{2x_1}, & x_1 > x_2 \end{cases} \quad (18)$$

保证非线性曲线在原点的斜率不是 0 和  $\infty$ , 只需要  $x_1$  不等于 0 和 1,  $x_2$  不等于 1 即可. 因为模糊推理部分和误差规范化因子  $s_e$  都可以找到上界和下界, 所以整个非线性部分就可以找到上界和下界, 即  $k_1 \leq \hat{u}_p/e \leq k_2 (0 \leq k_1 < k_2)$ , 根据(8)、(11)式可以确定系统的非线性部分既是稳定的, 又是严格钝的, 即:

$$\|\hat{u}_p\|_T \leq k_2 \|e\|_T + \beta \quad (19)$$

$$(e, \hat{u}_p)_T \geq k_1 \|e\|_T^2 + \beta_1 \quad (20)$$

其中  $\beta$  可取正数,  $\beta_1$  可取负数. 因此, 在  $x_1 \neq 0, 1, x_2 \neq 1$  的情况下, 只要系统的线性部分是钝的, 就能保证整个系统的稳定性. 即要求

$$\operatorname{Re}L(jw) \geq 0 \quad (21)$$

根据以上分析给出保证一阶和二阶对象 BIBO 稳定的 PID 参数条件:

(A) 一阶对象:  $\frac{b}{s+a} (a > 0)$

系统的线性部分为:

$$L(s) = \frac{S_u b (\hat{K}_D s^2 + \hat{K}_P s + \hat{K}_I)}{s(s+a)} \quad (22)$$

令  $\operatorname{Re}L(jw) \geq 0$ , 可得:

$$S_u b \hat{K}_D w^2 + a v S_u \hat{K}_P - b S_u \hat{K}_I \geq 0 \quad (23)$$

要保证上式成立需要各项系数为大于 0, 因为  $S_u > 0$ , 系统 BIBO 稳定的条件为:

$$b\hat{K}_D \geq 0 \quad \hat{K}_I \leq a\hat{K}_P \quad (24)$$

(B) 二阶对象:  $\frac{b_1s + b_0}{s^2 + a_1s + a_0}$  ( $a_1 \geq 0, a_0 \geq 0$ ),

系统线性部分的传递函数为:

$$L(s) = \frac{S_u(\hat{K}_D s^2 + \hat{K}_P s + \hat{K}_I)(b_1s + b_0)}{s(s^2 + a_1s + a_0)} \quad (25)$$

令  $\text{Re}L(j\omega) \geq 0$ , 可得:

$$\begin{aligned} & b_1\hat{K}_D S_u \omega^4 + ((a_1 b_1 - b_0)\hat{K}_P + \\ & (a_0 b_1 + a_1 b_0)\hat{K}_D - b_1\hat{K}_I) S_u \omega^2 + \\ & ((a_0 b_1 - a_1 b_0)\hat{K}_I + a_0 b_0 \hat{K}_P) S_u \geq 0 \quad (26) \end{aligned}$$

令  $\omega^4, \omega^2$  的系数以及常数项都大于 0, 可以保证(26)式成立, 由此得出下式:

$$\begin{aligned} & b_1\hat{K}_D \geq 0 \\ & (a_0 b_1 - a_1 b_0)\hat{K}_D \leq (a_1 b_1 - b_0)\hat{K}_P - b_1\hat{K}_I \\ & (a_1 b_0 - a_0 b_1)\hat{K}_I \leq a_0 b_0 \hat{K}_P \quad (27) \end{aligned}$$

同样, 高阶对象也可以采用上述方法获得保证系统稳定的参数条件, 限于篇幅, 本文不再讨论。

## 5 仿真(Simulation)

研究当用该模糊 PID 控制器控制对象  $1/(s+1)(2s+1)$  的稳定性问题. 根据式(27)可以得出 PID 参数要满足的条件:  $3\hat{K}_I \leq \hat{K}_P, 3\hat{K}_D \geq 2\hat{K}_P$ . 在满足以上条件的情况下, 不断改变参数, 整个系统总是稳定的, 说明所得到的结论是正确的。

## 6 总结(Conclusions)

本文针对一阶和二阶对象的一般形式, 采用钝性定理, 分析了使用一维模糊 PID 控制器进行控制时保证系统稳定的参数范围. 该方法的优点是不必考虑系统非线性变化, 只考虑 PID 控制器的参数。

所得出的结论可以帮助系统调节参数, 这对该模糊 PID 控制器的实用化有重要意义. 高阶对象同样可以采用钝性定理来获取相应的参数条件。

## 参考文献(References)

- 1 B G Hu, G K I Mann, R G Gosine. New Methods for Analytical and Optimal Design of Fuzzy PID Controller. IEEE Transaction on Fuzzy System., 1999, 7: 521~ 539
- 2 K S Ray, D D Majumder. Application of Circle Criterion for Stability Analysis of Linear SISO and MIMO Systems Associated with Fuzzy Logic Controller. IEEE Transaction on Systems, Man and Cybernetics, 1984, 14: 345~ 349
- 3 E Furutani, M Sacki, M A raki. Shifted Popov Criterion and Stability Analysis of Fuzzy control System", Proceeding of the 31st Conference on Decision and Control, pp. 2790- 2795, Tucson, Arizona, Dec 1992
- 4 K C Sio, C K Lee. Stability of Fuzzy PID Controller. IEEE Transaction on Systems, Man and Cybernetics—Part A: System and Human, 1998, 28(4): 490~ 495
- 5 H A Malki, H Li, Guanrong Chen. New Design and Stability Analysis of Fuzzy Proportional-Derivative Control System. IEEE Transaction on Fuzzy System, 1994, 2: 245~ 254
- 6 C A Desoer, M Vidyasager Feedback System: Input-Output Properties, New York: Academic, 1975
- 7 王守唐, 高东杰, 胡包钢. 一维模糊 PID 控制器的圆判据稳定性分析. 中国控制会议, 2000, 631~ 635
- 8 高为炳. 非线性控制系统导论. 北京: 科学出版社, 1988

## 作者简介

王守唐(1972- ), 男, 博士生. 研究领域为模糊控制与模糊建模、智能控制理论与应用等。

高东杰(1943- ), 男, 研究员, 博士生导师. 研究领域为系统辨识、过程控制、智能控制、鲁棒控制等。