文章编号:1002-0411(2005)03-0344-06

奇异摄动系统的二次稳定性和二次可镇定性

蔡晨晓, 邹 云, 徐胜元
(南京理工大学自动化系, 江苏 南京 210094)

摘 要:讨论了连续奇异摄动系统的二次稳定性,利用线性矩阵不等式方法,推导了奇异摄动系统二次稳定性的充分条件,并给出了二次可镇定并可解的充分条件和二次可镇定的状态反馈控制器的一种迭代求法.利用 MATLAB工具箱仿真验证了结果的正确性.并且和同阶次的正常系统算法进行了有效的比较,论证了奇异摄动方法解决 stiff问题的有效性.

关键词:奇异摄动系统;二次稳定;二次可镇定;线性矩阵不等式(LMI)
中图分类号:TP11 文献标识码:A

Quadratic Stability and Quadratic Stabilizability for Singularly Perturbed System

CAI Chen-xiao, ZOU Yun, XU Sheng-yuan
(*Department of Automation, Nanjing University of Science and Technology, Nanjing 210094, China*)

Abstract: Quadratic stability is proposed for singularly perturbed continuous systems. Using the linear matrix inequality, a sufficient condition is derived for quadratic stability and another sufficient condition is given for quadratic stabilizability and solvability of singularly perturbed systems. A feedback controller for quadratic stabilization is designed with an iterative algorithm. An example is worked out to illustrate the effectiveness of the method and the simulation results are given by the MATLAB tool box. The method is effective for stiff questions by comparing with that of regular systems.

Keywords: singularly perturbed system; quadratic stability; quadratic stabilizability; linear matrix inequality (LMI)

1 引言(Introduction)

1985年, Barmish[1]在利用李亚普诺夫函数和 Riccati方程,讨论正常系统的鲁棒稳定性时,首次提出了"二次稳定"的概念,其基本思想是构造一个李亚普诺夫函数 $V(x)$,沿着系统讨论 $\dot{V}(x) \leqslant -\alpha \cdot \|x\|^2$ $(\alpha>0)$的可能性.随后,文献[2]、[3]相继得到了一些重要的结论.1999年, Xu S[4]将"二次稳定性"和"二次可镇定性"的概念推广到广义系统,并在此领域作了大量的工作[5],利用 LMI方法,得到了不确定广义系统广义二次稳定和广义二次可镇定的充要条件;证明了广义二次稳定和鲁棒稳定的关系,设计了不确定广义系统鲁棒镇定的状态反馈控制律.文[6]将二次稳定的概念引入到奇异摄动系统,并证明了与其快慢子系统二次稳定的等价性.但文中所需的条件非常苛刻,而且不易应用.

本文将系统假设为正常系统处理,把二次稳定的条件转化为一个含有小参数的矩阵不等式,通过引入一个特殊分块的正定矩阵把参数在化简过程中消掉,得到了奇异摄动系统二次稳定的充要条件,并得出了奇异摄动系统二次可镇定的充分可解的条件.通过 MATLAB中 LMI工具箱和一种迭代算法,求得了系统二次可镇定的状态反馈控制器.

2 系统描述 (System description)

考虑奇异摄动系统:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (A_{11}+\Delta A_{11}(t))x+(A_{12}+\Delta A_{12}(t))z \\ \varepsilon\dot{z} &= (A_{21}+\Delta A_{21}(t))x+(A_{22}+\Delta A_{22}(t))z \end{aligned} \tag{1}$$

其中 $x\in R^{n_1}$, $z\in R^{n_2}$为系统状态向量; $A_{11}\in R^{n_1\times n_2}$, $A_{12}\in R^{n_1\times n_2}$, $A_{21}\in R^{n_2\times n_1}$, $A_{22}\in R^{n_2\times n_1}$为常系数矩阵.

收稿日期:2004-10-19
基金项目:国家自然科学基金资助项目(60474078, 60304001)

ΔA_{ij}, $i=1,2$, $j=1,2$,为结构摄动,$\varepsilon>0$为奇异摄动参数.令

$$A_0 = A_\varepsilon + \Delta A_\varepsilon(t) = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ \varepsilon^{-1}A_{21} & \varepsilon^{-1}A_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta A_{11}(t) & \Delta A_{12}(t) \\ \varepsilon^{-1}\Delta A_{21}(t) & \varepsilon^{-1}\Delta A_{22}(t) \end{bmatrix} \tag{2}$$

其中不确定性矩阵满足如下匹配条件:

$$\Delta A(t) = \begin{bmatrix} \Delta A_{11}(t) & \Delta A_{12}(t) \\ \Delta A_{21}(t) & \Delta A_{22}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \end{bmatrix} F(t)[E_1 \quad E_2] = DF(t)E \tag{3}$$

其中 $D_1\in R^{n_1\times n_f}$、$D_2\in R^{n_2\times n_f}$、$E_1\in R^{n_f\times n_1}$、$E_2\in R^{n_f\times n_2}$为常数矩阵,不确定矩阵 $F(t)\in R^{n_f\times n}$满足 $F^{\mathrm{T}}(t)\cdot F(t)\leqslant I_{n_f}$.称满足条件(3)的不确定性参数 ΔA_ε 是容许的.

3 二次稳定性(Quadratic stability)

定义 1[6] 如果系统(1)中结构摄动 ΔA_ε 是容许的,且存在矩阵 $P=P^{\mathrm{T}}>0$以及某一个 $\varepsilon^*>0$使得对于所有的 $\varepsilon\in(0,\varepsilon^*]$,均有 $A_0^{\mathrm{T}}P+PA_0<0$,则称系统是二次稳定的.

引理 1[8] 若 X与 Y是给定的适维矩阵,则对任意的 $\varepsilon>0$,有:

$$X^{\mathrm{T}}Y + Y^{\mathrm{T}}X \leqslant \varepsilon X^{\mathrm{T}}X + (1/\varepsilon)Y^{\mathrm{T}}Y$$

文献[6]中用奇异摄动快慢分解的思想得到系统的二次稳定性,需要的条件多而且苛刻.下面直接用矩阵不等式方法得到奇异摄动系统二次稳定的条件,无需假设 $A_{22}+\Delta A_{22}$可逆.

定理 1 若存在正定矩阵 $P_1\in R^{n_1\times n_1}$,正定矩阵 $P_3\in R^{n_2\times n_2}$和矩阵 $P_2\in R^{n_1\times n_2}$及某一个 $\varepsilon^*>0$使得对于所有的 $\varepsilon\in(0,\varepsilon^*]$,满足下面 LMI:

$$\begin{bmatrix} \Xi_1 & \Xi_2 & P_1D_1+P_2D_2 & E_1^{\mathrm{T}} \\ * & P_3A_{22}+A_{22}^{\mathrm{T}}P_3 & P_3D_3 & E_2^{\mathrm{T}} \\ * & * & -I & 0 \\ * & * & 0 & -I \end{bmatrix} < 0 \tag{4}$$

则系统是二次稳定的.其中,"$*$"表示对角位置上矩阵的转置,

$$\Xi_1 = P_1A_{11} + A_{11}^{\mathrm{T}}P_1 + P_2A_{21} + A_{21}^{\mathrm{T}}P_2^{\mathrm{T}}$$
$$\Xi_2 = P_1A_{12} + P_2A_{22} + A_{21}^{\mathrm{T}}P_3$$

证明 要使得系统(1)是二次稳定的,只要存在矩阵 $P=P^{\mathrm{T}}>0$和某一个 $\varepsilon^*>0$使得对于所有 $\varepsilon\in(0,\varepsilon^*]$,$A_0^{\mathrm{T}}P+PA_0<0$成立.即 $(A_\varepsilon+\Delta A_\varepsilon)^{\mathrm{T}}P+P(A_\varepsilon+\Delta A_\varepsilon)<0$,由引理 1和 Schur补引理以及(3)式可得:

$$\begin{bmatrix} A_\varepsilon^{\mathrm{T}}P+PA_\varepsilon & PD_\varepsilon & E^{\mathrm{T}} \\ D_\varepsilon^{\mathrm{T}}P & -I & 0 \\ E & 0 & -I \end{bmatrix} < 0 \tag{5}$$

取 $P=\begin{bmatrix} P_1 & \varepsilon P_2 \\ \varepsilon P_2^{\mathrm{T}} & \varepsilon P_3 \end{bmatrix}$,其中 $P_1\in R^{n_1\times n_1}$, $P_3\in R^{n_2\times n_2}$均为正定矩阵,则

$$\begin{bmatrix} A_\varepsilon^{\mathrm{T}}P+PA_\varepsilon & PD_\varepsilon & E^{\mathrm{T}} \\ D_\varepsilon^{\mathrm{T}}P & -I & 0 \\ E & 0 & -I \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} \Xi_1 & \Xi_2 & P_1D_1+P_2D_2 & E_1^{\mathrm{T}} \\ * & P_3A_{22}+A_{22}^{\mathrm{T}}P_3 & P_3D_2 & E_2^{\mathrm{T}} \\ * & * & -I & 0 \\ * & * & 0 & -I \end{bmatrix} + O(\varepsilon) \tag{6}$$

则一定存在一个 $\varepsilon^*>0$,使得对于所有的 $\varepsilon\in(0,\varepsilon^*]$,式(4)和式(6)是等价的.

4 二次可镇定性(Quadratic stabilizability)

考虑具有如下形式的奇异摄动系统:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (A_{11}+\Delta A_{11}(t))x + (A_{12}+\Delta A_{12}(t))z \\ &\quad + (B_1+\Delta B_1(t))u \\ \varepsilon\dot{z} &= (A_{21}+\Delta A_{21}(t))x + (A_{22}+\Delta A_{22}(t))z \\ &\quad + (B_2+\Delta B_2(t))u \end{aligned} \tag{7}$$

其中 $u\in R^r$为系统的输入,$B_1\in R^{n_1\times r}$、$B_2\in R^{n_2\times r}$为常矩阵,其它量如系统(1)中叙述.其中结构摄动满足如下条件:

$$\begin{bmatrix} \Delta A_{11}(t) & \Delta A_{12}(t) & \Delta B_1(t) \\ \Delta A_{21}(t) & \Delta A_{22}(t) & \Delta B_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \end{bmatrix} F(t)[E_1 \quad E_2 \quad Z] \tag{8}$$

其中 $D_1\in R^{n_1\times n_f}$, $D_2\in R^{n_2\times n_f}$, $E_1\in R^{n_f\times n_1}$, $E_2\in R^{n_f\times n_2}$, $Z\in R^{n_f\times r}$为已知矩阵,不确定阵 $F(t)\in R^{n_f\times n}$满足 $F^{\mathrm{T}}(t)F(t)\leqslant I_{n_f}$.

定义 2 若存在状态反馈控制律 $u=[K_1 \quad K_2]\begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix}$,使得不确定系统(7)的闭环系统二次稳定,则称系统(7)是二次可镇定的.

定理 2 如果存在正定矩阵 $P_1\in R^{n_1\times n_1}$,正定矩阵 $P_3\in R^{n_2\times n_2}$,矩阵 $P_2\in R^{n_1\times n_2}$,状态反馈阵 $K_1\in$

$R^{r\times n_1}$, $K_2\in R^{r\times n_2}$和某一个 $\varepsilon^* >0$,使得对于所有的 $\varepsilon \in (0, \varepsilon^*]$,满足下面矩阵不等式:

$$\begin{vmatrix} \Sigma_1 & \Sigma_2 & \Sigma_4 & E_1^{\mathrm T} & K_1^{\mathrm T}Z^{\mathrm T} \\ * & \Sigma_3 & P_3D_2 & E_2^{\mathrm T} & K_2^{\mathrm T}Z^{\mathrm T} \\ * & 0 & -I & 0 & 0 \\ * & * & 0 & -I & 0 \\ * & * & 0 & 0 & -I \end{vmatrix} < 0 \qquad (9)$$

则系统 (7)是二次可镇定的.

其中
$$\Sigma_1 = P_1(A_{11}+B_1K_1)+(A_{11}+B_1K_1)^{\mathrm T}P_1 + P_2(A_{21}+B_2K_1)+(A_{21}+B_2K_1)^{\mathrm T}P_2^{\mathrm T}$$
$$\Sigma_2 = P_1(A_{12}+B_1K_2)+P_2(A_{22}+B_2K_2) + (A_{21}+B_2K_1)^{\mathrm T}P_3$$
$$\Sigma_3 = P_3(A_{22}+B_2K_2)+(A_{22}+B_2K_2)^{\mathrm T}P_3$$
$$\Sigma_4 = \sqrt{2}(P_1D_1+P_2D_2)$$

证明方法与定理 2相仿.

不等式 (9)为非线性矩阵不等式,目前对于非线性矩阵不等式的求解比较困难.下面对于 (9)式进行一些放大处理,尽量将其线性化.根据引理 1,

$$\Sigma_1 \leqslant P_1A_{11}+A_{11}^{\mathrm T}P_1+P_2A_{21}+A_{21}^{\mathrm T}P_2^{\mathrm T}+P_1P_1 + (B_1K_1)^{\mathrm T}(B_1K_1)+P_2P_2^{\mathrm T} + (B_2K_1)^{\mathrm T}(B_2K_1)$$
$$\Sigma_3 \leqslant P_3A_{22}+A_{22}^{\mathrm T}P_3+P_3P_3 + (B_2K_2)^{\mathrm T}(B_2K_2)^{\mathrm T}$$

因此不等式 (9)左侧可以放大为:

$$\begin{vmatrix} \Xi_1 & P_1 & P_2 & K_1^{\mathrm T}B_1^{\mathrm T} & K_1^{\mathrm T}B_2^{\mathrm T} & \Theta_1 & 0 & 0 & \sqrt{2}(P_1D_1+P_2D_2) & E_1^{\mathrm T} & K_1^{\mathrm T}Z^{\mathrm T} \\ * & -I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & P_3D_2 & E_2^{\mathrm T} & K_2^{\mathrm T}Z^{\mathrm T} \\ * & 0 & -I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & 0 & 0 & -I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & 0 & 0 & 0 & -I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & 0 & 0 & 0 & 0 & \Theta_2 & P_3 & K_2^{\mathrm T}B_2^{\mathrm T} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * & -I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * & 0 & -I & 0 & 0 & 0 \\ * & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -I & 0 & 0 \\ * & * & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -I & 0 \\ * & * & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -I \end{vmatrix} < 0 \qquad (10)$$

其中:
$$\Theta_1 = P_1A_{12}+A_{21}^{\mathrm T}P_3+P_2A_{22}+P_1B_1K_2 + P_2B_2K_2+K_1^{\mathrm T}B_2^{\mathrm T}P_3$$
$$\Theta_2 = P_3A_{22}+A_{22}^{\mathrm T}P_3$$

记上面不等式中矩阵为 Ψ.则矩阵不等式 (10)是系统 (7)二次可镇定的充分条件.

注:由于 Θ_1 中后三项,式 (10)依然没有完全线性化.

下面给出一种迭代的算法[7].

取 Ψ的子块:

$$\Phi = \left|\begin{array}{c|cccc|c} \Xi_1 & P_1 & P2 & K_1^{\mathrm T}B_1^{\mathrm T} & K_1^{\mathrm T}B_2^{\mathrm T} & \Theta_1 \\ \hline * & -I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & 0 & -I & 0 & 0 & 0 \\ * & 0 & 0 & -I & 0 & 0 \\ * & 0 & 0 & 0 & -I & 0 \\ \hline * & 0 & 0 & 0 & 0 & -I \end{array}\right|$$

$$= \begin{vmatrix} \Xi_1 & \Theta_3 & \Theta_2 \\ * & -I & 0 \\ * & 0 & -I \end{vmatrix} \qquad (11)$$

设
$$\Gamma_1 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & M_1 - R_1^{-1}B_1K_2 \\ 0 & 0 & 0 \\ N_1+P_1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$
$$\Gamma_2 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & M_2 - R_2^{-1}B_2K_2 \\ 0 & 0 & 0 \\ N_2^{\mathrm T}+P_2^{\mathrm T} & 0 & 0 \end{vmatrix}$$
$$\Gamma_3 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & M_3 - R_3^{-1}B_2K_1 \\ 0 & 0 & 0 \\ N_3+P_3 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$
$$\Pi_1 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & R_1 \\ 0 & 0 & 0 \\ R_1 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad \Pi_2 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & R_2 \\ 0 & 0 & 0 \\ R_2 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$
$$\Pi_3 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & R_3 \\ 0 & 0 & 0 \\ R_3 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

其中 $M_1\in R^{n_1\times n_2}$, $N_1\in R^{n_1\times n_1}$, $R_1\in R^{n_1\times n_1}$, $M_2\in R^{n_2\times n_2}$, $N_2\in R^{n_1\times n_2}$, $R_2\in R^{n_2\times n_2}$, $M_3\in R^{n_2\times n_1}$, $N_3\in R^{n_2\times n_2}$, $R_3\in R^{n_2\times n_2}$且 $R_1>0$, $R_2>0$, $R_3>0$为给定

的常数阵,则

$$\Phi + \Gamma_1^{\mathrm{T}}\Pi_1\Gamma_1 + \Gamma_2^{\mathrm{T}}\Pi_2\Gamma_2 + (\Gamma_3^{\mathrm{T}}\Pi_3\Gamma_3)^{\mathrm{T}}$$

$$= \left|\begin{array}{c|cccc|c} \Xi_1 & P_1 & P_2 & K_1^{\mathrm{T}}B_1^{\mathrm{T}} & K_1^{\mathrm{T}}B_2^{\mathrm{T}} & \Theta_4 \\ \hline * & -I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & 0 & -I & 0 & 0 & 0 \\ * & 0 & 0 & -I & 0 & 0 \\ * & 0 & 0 & 0 & -I & 0 \\ \hline * & 0 & 0 & 0 & 0 & -I \end{array}\right|$$

其中:

$$\Theta_4 = P_1A_{12} + A_{21}^{\mathrm{T}}P_3 + P_2A_{22} + N_1^{\mathrm{T}}R_1M_1$$
$$- N_1^{\mathrm{T}}B_1K_2 + P_1R_1M_1 + N_2R_2M_2$$
$$- N_2B_2K_2 + P_2R_2M_2 + M_3^{\mathrm{T}}R_3^{\mathrm{T}}N_3$$
$$- K_1^{\mathrm{T}}B_2^{\mathrm{T}}N_3 + M_3^{\mathrm{T}}R_3^{\mathrm{T}}P_3$$

将 $\Gamma_1^{\mathrm{T}}\Pi_1\Gamma_1$、$\Gamma_2^{\mathrm{T}}\Pi_2\Gamma_2$、$\Gamma_3^{\mathrm{T}}\Pi_3\Gamma_3$ 的维数补成与 Ψ 相同,即令:

$$\Phi_1 = \left|\begin{array}{cc} \Gamma_1^{\mathrm{T}}\Pi_1\Gamma_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{array}\right|$$

$$\Phi_2 = \left|\begin{array}{cc} \Gamma_2^{\mathrm{T}}\Pi_2\Gamma_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{array}\right|$$

$$\Phi_3 = \left|\begin{array}{cc} \Gamma_3^{\mathrm{T}}\Pi_3\Gamma_3 & 0 \\ 0 & 0 \end{array}\right|$$

则考虑:

$$\Psi + \Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 = \left|\begin{array}{ccccccccccc} \Xi_1 & P_1 & P_2 & K_1^{\mathrm{T}}B_1^{\mathrm{T}} & K_1^{\mathrm{T}}B_2^{\mathrm{T}} & \Theta_4 & 0 & 0 & \sqrt{2}(P_1D_1 + P_2D_2) & E_1^{\mathrm{T}} & K_1^{\mathrm{T}}Z^{\mathrm{T}} \\ * & -I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & P_3D_2 & E_2^{\mathrm{T}} & K_2^{\mathrm{T}}Z^{\mathrm{T}} \\ * & 0 & -I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & 0 & 0 & -I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & 0 & 0 & 0 & -I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & 0 & 0 & 0 & 0 & \Theta_2 & P_3 & K_2^{\mathrm{T}}B_2^{\mathrm{T}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * & -I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * & 0 & -I & 0 & 0 & 0 \\ * & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -I & 0 & 0 \\ * & * & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -I & 0 \\ * & * & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -I \end{array}\right| < 0 \qquad (12)$$

如果 M_1、N_1、M_2、N_2、M_3、N_3 均被固定,则(12)式是一个关于 P_1、P_2、P_3、K_1、K_2 的 LMI.若

$$M_1 - R_1^{-1}B_1K_2 = 0,\ N_1 + P_1 = 0$$

$$M_2 - R_2^{-1}B_2K_2 = 0,\ N_2^{\mathrm{T}} + P_2^{\mathrm{T}} = 0$$

$$M_3 - R_3^{-1}B_2K_1 = 0, N_3 + P_3 = 0$$

则式(12)和式(10)是等价的.

下面给出迭代算法的步骤:

Step1　给定正定矩阵 R_1、R_2、R_3 及矩阵 $M_1^{(1)}$、$M_2^{(1)}$、$M_3^{(1)}$、$N_1^{(1)}$、$N_2^{(1)}$、$N_3^{(1)}$;

Step2　用 MATLAB工具箱解 LMI(12),得到 $P_i^{(1)}$、$K_j^{(1)}$ $(i=1,2,3;\ j=1,2)$;

Step3　迭代计算

$$M_1^{(k+1)} = R_1^{-1}B_1K_2^{(k)}, N_1^{(k+1)} = -P_1^{(k)}$$
$$M_2^{(k+1)} = R_2^{-1}B_2K_2^{(k)}, N_2^{(k+1)} = -(P_2^{(k)})^{\mathrm{T}} \qquad (13)$$
$$M_3^{(k+1)} = R_3^{-1}B_2K_1^{(k)}, N_3^{(k+1)} = -P_3^{(k)}$$

Step4　若 Step3得到的解是收敛的,即

$$\| P_i^{(k)} - P_i^{(k+1)} \|_2 \to 0 \qquad (i = 1,2,3)$$

则停止计算,得到状态反馈阵 $K_1^{(k)}$、$K_2^{(k)}$.若 Step3得到的解发散,则重新选择 R_1、R_2、R_3 及 $M_1^{(1)}$、$M_2^{(1)}$、$M_3^{(1)}$、$N_1^{(1)}$、$N_2^{(1)}$、$N_3^{(1)}$,重复 Step2.

5　算例仿真 (Example and simulation)

考虑一个四阶奇异摄动系统

$$\left|\begin{array}{c} \dot{x} \\ \varepsilon\dot{z} \end{array}\right| = (A + \Delta A)\left|\begin{array}{c} x \\ z \end{array}\right| + (B + \Delta B)u$$

其中系数矩阵 $A = \left|\begin{array}{cccc} -0.366 & 0.027 & 0.188 & -0.4555 \\ 0.0482 & -1.01 & 0.24 & -0.4 \\ 1 & 0 & -4 & 0 \\ -4.07 & 0 & 0 & -4 \end{array}\right|$,

$B = [3\quad 0.5\ -1\ -1]^{\mathrm{T}}$, ΔA、ΔB满足式(8), $D_1 = [-0.1\ -0.1]^{\mathrm{T}}$, $D_2 = [0.1\ 0.1]^{\mathrm{T}}$, $E_1 = [0.1\ 0.5]$, $E_2 = [0.5\ 0.5]$, $Z = -0.5$, $F(t) = \sin t$;摄动参数

$\varepsilon = 0.5$,初始条件为:$\begin{bmatrix} x_0 \\ z_0 \end{bmatrix} = [0.8\ \ -1\ \ 0.5\ \ -1]^T$.

用 MATLAB中 LMI工具箱,计算 (12)、(13)式,给定 $R = I_{2\times 2}$, M、N初值为:

$$M^{(1)} = \begin{bmatrix} -0.5 & 0.2 \\ 2 & 0.5 \end{bmatrix},\quad N^{(1)} = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.1 \\ 0.1 & 0.1 \end{bmatrix}$$

迭代循环 $k = 10$次,得到矩阵:

$$P_1 = \begin{bmatrix} 0.3888 & -0.6549 \\ -0.6549 & 1.0572 \end{bmatrix}$$

$$P_2 = \begin{bmatrix} -0.1456 & 0.0933 \\ 0.0263 & 0.0035 \end{bmatrix}$$

$$P_3 = \begin{bmatrix} 0.4923 & 0.0235 \\ 0.0235 & 0.0692 \end{bmatrix}$$

$$K_1 = [-0.0167\ \ -0.0001]$$

$$K_2 = [-0.1108\ \ 0.0403]$$

求得反馈阵 $[K_1\ \ K_2]$并得到系统的闭环状态响应曲线如下:

图 1 闭环奇异摄动系统状态分量 x_1 响应曲线

Fig. 1 First component x_1 state response of singularly perturbed closed-loop system

对于上面例题如果直接将 ε看作常数按照正则系统处理,所得的仿真结果如图 5、图 6.

$\varepsilon = 1$和 $\varepsilon = 0.5$时的状态响应曲线分别如图 5、6所示.当 ε再变小,由于系统的奇异性, MATLAB就不能再画出图形了.因此已经不能在 $\varepsilon = 0.05$时比较奇异摄动系统和相应的正则系统的状态响应.

图 2 闭环奇异摄动系统状态分量 x_2 响应曲线

Fig. 2 First component x_2 state response of singularly perturbed closed-loop system

图 3 闭环奇异摄动系统状态分量 x_3 响应曲线

Fig. 3 First component x_3 state response of singularly perturbed closed-loop system

图 4 闭环奇异摄动系统状态分量 x_4 响应曲线

Fig. 4 First component x_4 state response of singularly perturbed closed-loop system

图 5 ε=1时,闭环正则系统状态响应曲线

Fig. 5 State response of regularly closed-loop system when ε=1

图 6 ε=0.5时,闭环正则系统状态响应曲线

Fig. 6 State response of regularly closed-loop system when ε=0.5

6 结论 (Conclusion)

本文应用矩阵不等式方法,通过引入一个特殊正定矩阵的分块,讨论了奇异摄动系统的二次稳定性和二次可镇定性问题,得到了奇异摄动系统二次可镇定的充分条件.通过一种迭代的算法求得状态反馈控制器.仿真算例验证了结论的正确性,并且和正则系统处理方法相比较,得出奇异摄动方法处理stiff问题大大优越于一般方法.

参 考 文 献 (References)

[1] Bamish B R. Necessary and sufficient conditions for quadratic stability of an uncertain system [J]. Journal of Optimal Theory and Application, 1985, 46(4):399~408.

[2] Petersen I R, Hollot C V. A Riccati equation approach to the stabilization of uncertain linear systems [J]. Automatica, 1986, 22(4):397~411.

[3] Khargonekar P P, Petersen I R, Zhou K. Robust stabilization of uncertain linear systems: quadratic stabilizability and H_∞ control theory [J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 1990, 35(3):356~361.

[4] Xu S, Yang C. Stabilization of discrete-time singular systems: a matrix inequalities approach [J]. Automatica, 1999, 35(9):1613~1617.

[5] 徐胜元. 广义不确定系统的鲁棒控制 [D]. 南京:南京理工大学, 1999.

[6] 蔡晨晓, 邹云. 奇异摄动系统的二次稳定 [J]. 南京理工大学学报, 2004, 28(3):337~340.

[7] Fujimori A. Optimization of static output feedback using substitutive LMI formulation [J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2004, 49(6):995~999.

[8] Lin C L, Chen B S. Qn the design of stabilizing controllers for singularly perturbed systems [J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 1992, 37(11):1828~1834.

作者简介

蔡晨晓 (1975 -),女,博士.研究领域为奇异摄动系统等.

邹 云 (1962 -),男,博士,教授.研究领域为奇异系统,2D系统稳定性等.

徐胜元 (1968 -),男,博士,教授.研究领域为鲁棒控制,神经网络控制等.