

文章编号: 1002-0411(2005)02-0232-04

基于稳定性分析的一类欠驱动系统的滑模控制器设计

王伟, 易建强, 赵冬斌, 柳晓菁

(中国科学院自动化研究所复杂系统与智能科学重点实验室, 北京 100080)

摘要:从稳定分析的角度提出了一种欠驱动系统的新型滑模控制方法. 该方法将各个子系统的一个变量进行组合定义成一个中间变量, 然后从这个中间变量出发构造滑模函数, 通过求取总的控制量保证中间变量在有限时间内收敛到平衡点; 进一步利用 LaSalle 不变性原理证明该收敛域内只有一个平衡点且是渐近稳定的. 仿真实验进一步验证了该结论.*

关键词:滑模控制; 欠驱动系统; 桥式吊车; 稳定性

中图分类号: TP273

文献标识码: A

Design of Sliding-mode Controller Based on Stable Analysis for a Class of Underactuated Systems

WANG Wei, YI Jian-qiang, ZHAO Dong-bin, LIU Xiao-jing

(Laboratory of Complex Systems and Intelligence Science, Institute of Automation,
Chinese Academy of Sciences, Beijing 100080, China)

Abstract: A new sliding-mode control (SMC) method based on stable analysis for a class of underactuated systems is presented. In this method, an interim variable is defined by combining one variable of each subsystem. The interim variable is used to construct the sliding-mode function and the total control law can be derived to guarantee the equilibrium point is reachable in finite time. Using LaSalle invariance theorem, it can be proved further that the equilibrium field only includes one equilibrium point and the equilibrium point is asymptotically stable. The simulation results validate the conclusion.

Keywords: sliding-mode control; underactuated system; overhead crane; stability

1 引言 (Introduction)

欠驱动系统是指系统的独立控制变量个数小于系统自由度个数的一类非线性系统, 在节约能量、降低造价、减轻重量、增强系统灵活度等方面都较完全驱动系统优越. 欠驱动系统结构简单, 便于进行整体的动力学分析和试验; 同时由于系统的高度非线性使得欠驱动系统又足够复杂, 便于研究和验证各种算法的有效性.

目前关于各种欠驱动系统模型的控制方法的研究有很多, Zhang^[1]等采用混杂控制方法实现了 Pendubot 的摆起与倒立平衡控制; Hause^[2]等给出了板球系统的非线性控制策略; Corriga^[3]等研究的是一种线性时变的吊车模型, 采用了最优控制策略, 同时针对对象的变参数的特点提出了一种变反馈增益的状态反馈控制法; Yi^[4]等采用模糊控制实现了

平行双倒立摆控制等等.

目前, 国内外各国学者正尝试着采用滑模控制来解决欠驱动系统的控制问题, 已有的各种滑模控制方法大致可以归纳为一种基于聚合式的分层递阶结构的滑模控制器. Lin^[5]等针对欠驱动模型提出了一种双层滑模控制器, 其中第二层滑模平面的系数通过模糊逻辑来调节, 这样虽然提高系统的自适应能力, 但却使得系统的稳定性分析变得复杂. Lu^[6]等针对倒立摆系统同样提出了具有聚合式结构的滑模控制器, 但是对于该控制器的稳定性也只是给了一个定性的说明, 而在理论上并没有给出严密的证明, 并且对于滑动平面上的系统状态的收敛性也没有讨论.

总之, 对于基于聚合式分层递阶结构的滑模控

* 收稿日期: 2004-07-20

基金项目: 国家 973 计划资助项目 (2003CB517106)

制器,目前已有了一定研究成果,但是都存在中间层的稳定性难于严格证明的问题.本文从欠驱动系统的标准模型出发,提出了一种新型滑模控制器设计方法.

2 滑模控制器设计 (Design of sliding-mode controller)

考虑如下结构形式的单输入多输出非线性耦合系统:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = f(X) + b_1(X)u(t) + d_1(t) \\ \dot{x}_3(t) = x_4(t) \\ \dot{x}_4(t) = \underline{f}(X) + b_2(X)u(t) + d_2(t) \\ y(t) = [x_1(t), x_3(t)]^T \end{cases} \quad (1)$$

这里 $X = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T$ 为系统的状态变量; $f(X)$ 、 $\underline{f}(X)$ 为非线性函数; $b_1(X)$ 、 $b_2(X)$ 为已知的控制项非线性函数; $d_1(t)$ 、 $d_2(t)$ 为有界的外部扰动和系统参数扰动项; $u(t)$ 为系统的控制输入.为方便起见,将 $f(X)$ 、 $b_i(X)$ 、 $d_i(t)$ 简写为 f 、 b_i 、 d_i ($i=1, 2$).这种形式显然是二阶欠驱动控制系统(如 Acrobot、Pendubot、二级倒立摆以及桥式吊车系统等)的一个统一的表示方式.对于系统模型,做如下假设:

A1:假设式(1)所示系统的非线性部分满足下列条件: $f(X) = \underline{f}(X) = 0$, 当且仅当 $X \equiv 0$ 时才成立.

针对式(1)所示欠驱动系统标准模型,按照子系统可以分为两组状态变量 (x_1, x_2) 和 (x_3, x_4) , 定义一个中间变量,其形式为:

$$z = x_1 + \alpha x_3 \quad (2)$$

其中 α 为大于零的常数.

因此可以进一步定义滑模函数为:

$$s = cz + \dot{z} \quad (3)$$

其中 c 为大于零的常数,这样采用一个滑模函数就可以实现对多变量欠驱动系统的描述,从而避免了多层结构中的多个滑模函数的设计.

采用等效控制法求取滑动平面的等效控制量为:

$$u_{eq} = - \frac{(\alpha \underline{f} + f) \cdot [1 - |\operatorname{sgn}(s)|] + \alpha x_4 + cx_2}{\alpha b_2 + b_1} \quad (4)$$

设总的控制量如下式所示:

$$u = u_{eq} + u_{sw} \quad (5)$$

为了求取切换控制量,我们进一步采用了李亚

普诺夫方法来从稳定性的角度进行设计.其中,李亚普诺夫能量函数取为:

$$V = \frac{1}{2} s^2 \quad (6)$$

因此对李亚普诺夫能量函数求导可得:

$$\begin{aligned} \dot{V} &= s \dot{s} = s[c \dot{z} + \ddot{z}] = s(c \dot{x}_1 + ca \dot{x}_3 + \ddot{x}_1 + \alpha \ddot{x}_3) \\ &= s(cx_2 + ca x_4 + f + b_1 u + d_1 \\ &\quad + \alpha \underline{f} + \alpha b_2 u + \alpha d_2) \\ &= s[cx_2 + ca x_4 + f + \alpha \underline{f} + d_1 \\ &\quad + \alpha d_2 + (b_1 + \alpha b_2) u] \end{aligned} \quad (7)$$

为保证系统的稳定性,取切换控制分量为如下形式:

$$u_{sw} = - (\alpha b_2 + b_1)^{-1} \cdot [\eta \cdot \operatorname{sgn}(s) + ks] \quad (8)$$

其中 η 、 k 为大于零的常数.

$$\begin{aligned} \dot{V} &= -\eta |s| - ks^2 + s(d_1 + \alpha d_2) \\ &\leq -\eta |s| - ks^2 + |s| \cdot |d_1 + \alpha d_2| \end{aligned} \quad (9)$$

定义参数 $d_m = \sup_{t \geq 0} |\alpha \cdot d_2(t) + d_1(t)|$, 同时取 $\eta > d_m$ 则有:

$$\begin{aligned} \dot{V} &\leq -\eta |s| + |s| \cdot |\alpha d_2 + d_1| - ks^2 \\ &\leq -|s| (\eta - d_m) - ks^2 \\ &\leq 0 \end{aligned} \quad (10)$$

最后可知系统的总的控制律 u 能够保证滑动平面 s 存在,并且在有限时间 t_s 内收敛到平衡点.

3 滑模控制器的稳定性分析 (Stability analysis of sliding-mode controller)

在进行滑模控制器设计的过程中,采用李亚普诺夫方法求取了系统的总控制量,但是该控制量只能保证滑模平面的收敛,也就是中间变量能够在有限时间收敛到平衡点,这也是滑模控制器设计的常用方法.但是对于中间变量组成中所对应的各子系统的状态变量的稳定性却无法保证,由于只是中间变量收敛到平衡点,因此系统的状态变量收敛只是收敛到了一个收敛域内,即 $\{X | x_1 + \alpha x_3 = 0 \cap \dot{x}_1 + \alpha \cdot \dot{x}_3 = 0\}$, 下面我们将对系统内部的状态变量的稳定性进行进一步分析.

对于滑模函数而言,由于其满足滑模存在和稳定的条件,因此在有限时间内滑模平面将趋近原点,即下式成立:

$$z(t) = \dot{z}(t) = 0 \quad (t \geq t_s) \quad (11)$$

进一步可以得到如下结果:

$$\dot{z} = 0 \Rightarrow \ddot{z} = 0 \Rightarrow \dot{u}_{eq} = - \frac{\alpha \underline{f} + f}{\alpha b_2 + b_1} \quad (12)$$

由于当滑模平面收敛到原点后,等效控制量 u_{eq} 切换到 u'_{eq} ,它描述的是在 $\dot{z}=0$ 上的运动轨迹,同样通过这个控制量能够保证构成 \dot{z} 的两个状态变量也在有限时间内收敛到平衡点,即:

$$\dot{x}_1(t) = \dot{x}_3(t) = 0 \quad (t \geq t_p) \quad (13)$$

现在讨论 $t \geq t_p \geq t_s$ 时刻系统的稳定性问题.

当 $t \geq t_p \geq t_s$ 时, $u=0$,系统的方程变为:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = f(X) \\ \dot{x}_3(t) = x_4(t) \\ \dot{x}_4(t) = f_2(X) \end{cases} \quad (14)$$

下面对于这个自治系统采用 LaSalle 不变性定理进行进一步分析.首先定义一个紧集 Ω_ω ,其形式为:

$$\begin{aligned} \Omega_\omega &= \{X \mid V(s) \leq \omega, s = cz + \dot{z} \\ &= cx_1 + \alpha x_3 + x_2 + \alpha x_4\} \quad (15) \end{aligned}$$

这里 ω 为一个正常数,通常为 $V(0)$.

进一步定义一个集合 $\Gamma \subset \Omega_\omega$,其形式为:

$$\Gamma = \{X \in \Omega_\omega \mid \dot{V}(X) = 0\} \quad (16)$$

由于 $t \geq t_p$,系统的状态又收敛到更小的一个收敛域内,因此,我们进一步取 Γ 的一个子集 $\Gamma_1 \subset \Gamma$ 为:

$$\begin{aligned} \Gamma_1 &= \Omega_\omega \cap \{z = \dot{z} = \dot{x}_1 = \dot{x}_3 = 0\} \\ &\subset \Omega_\omega \cap \{X \mid \dot{V} = 0\} \quad (17) \end{aligned}$$

定义 Ψ 为 Γ_1 中的最大不变集,根据 LaSalle 不变性原理,可以得到对于从 Ω_ω 中出发的每一个解,当 $t \rightarrow \infty$ 时必然趋于 Ψ .下面我们进一步计算这个最大不变集 Ψ 的范围.当 $t \geq t_p \geq t_s$ 时,由 Γ_1 的范围可以得到:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 = 0 \quad \ddot{x}_1 = 0 &\Rightarrow \begin{cases} f(X) = \dot{x}_2 = \ddot{x}_1 = 0 \\ f_2(X) = \dot{x}_4 = \ddot{x}_3 = 0 \end{cases} \\ \dot{x}_3 = 0 \quad \ddot{x}_3 = 0 &\Rightarrow \begin{cases} f(X) = \dot{x}_2 = \ddot{x}_1 = 0 \\ f_2(X) = \dot{x}_4 = \ddot{x}_3 = 0 \end{cases} \\ &\Rightarrow X = 0 \quad (18) \end{aligned}$$

根据假设条件 A1,可以进一步得到:

$$\begin{aligned} \Psi &= \Omega_\omega \cap \{X \mid \dot{V}(t) = 0, (t \geq t_p)\} \\ &= \{(0, 0, 0, 0)\} \quad (19) \end{aligned}$$

因此, Γ_1 中的最大不变集就是原点.由于假设条件 A1 表明当且仅当 $X=0$ 时,才有 $f(X)=0$,因此,原点是 Γ_1 中的唯一解,根据 LaSalle 渐近稳定性定理可以知道平衡点 $X=0$ 是渐近稳定的.

值得说明的是,这里讨论系统平衡点的渐近稳定性问题是有条件的,即 $t \geq t_p \geq t_s$ 时段的平衡点的稳定性问题,对于 $0 \leq t \leq t_p$ 这一有限时间内系统状

态的收敛问题,通过滑模方法给予解决,因为利用李亚普诺夫稳定定理求得的变结构控制量能够保证滑模函数在有限时间存在和收敛,并能够把系统状态控制到一个紧集 $\{X \mid z = \dot{z} = \dot{x}_1 = \dot{x}_3 = 0\}$ 内,采用 LaSalle 不变性定理可以进一步证明此时系统的平衡点是渐近稳定的.

4 仿真分析 (Simulation analysis)

桥式吊车系统(见图 1)是一种典型的二阶欠驱动系统,通过一个电机来控制台车移动并且在移动的过程中实现抗摆控制.按照文献 [7] 所示的方法可以得到该欠驱动系统的模型,通过转化可以将该模型变成式 (1) 所示的形式,其中 (1) 式中的 f, b_1, f_2, b_2 如下所示:

$$f = -\frac{mL\dot{\theta}^2 \sin\theta + mgs\sin\theta \cos\theta}{M + m\sin^2\theta} \quad (20)$$

$$b_1 = -\frac{1}{M + m\sin^2\theta}$$

$$f_2 = -\frac{(m + M)gs\sin\theta + mL\dot{\theta}^2 \sin\theta \cos\theta}{(M + m\sin^2\theta)L} \quad (21)$$

$$b_2 = -\frac{\cos\theta}{(M + m\sin^2\theta)L}$$

这里 M 表示台车的质量; m 表示负载的质量; x 表示台车的水平位移; θ 表示绳子的摆角; L 为绳长.

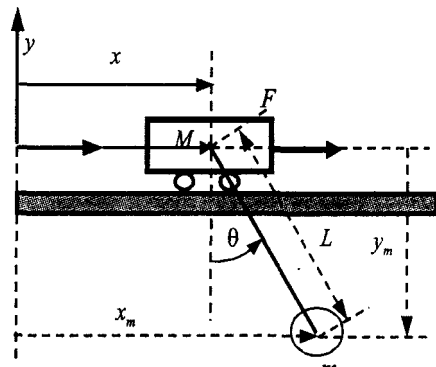


图 1 桥式吊车系统

Fig. 1 Overhead crane system

可以发现 f, f_2 与台车的水平位移 x 和水平速度 \dot{x} 无关,通过验证可以知道当且仅当 $X = (x, \dot{x}, 0, 0)$ 时有 $f = f_2 = 0$,由于此时 $z = \dot{z} = 0$,所以可以得到 $\dot{x}_1 = \dot{x}_3 = 0$,因此满足假设条件 A1.

吊车系统的各个参数分别取为: $M = 1 \text{ kg}, m = 0.8 \text{ kg}, L = 0.305 \text{ m}$.对于滑模控制器,其参数分别为: $c = 0.8, \alpha = 0.1, \eta = 4, k = 0.1$.

图 2、3 为 $x^d = 2 \text{ m}$ 情况下吊车系统水平位移和

速度以及摆角和角速度的输出曲线,从图中可以看出台车能够在较快的时间到达给定位置,并且在到达期望值之前实现了抗摆控制.图4给出了中间变量和滑模函数的收敛曲线,可以看出滑模函数和中间变量都能收敛到零,其结果验证了该基于稳定性设计的滑模控制器的有效性以及前面所进行的稳定性分析的正确性.

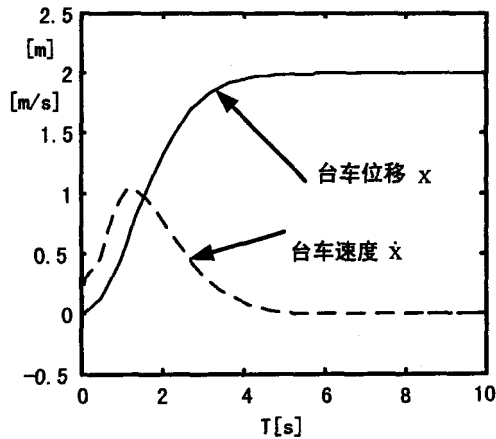


图2 台车子系统输出状态

Fig. 2 Output states of the trolley subsystem

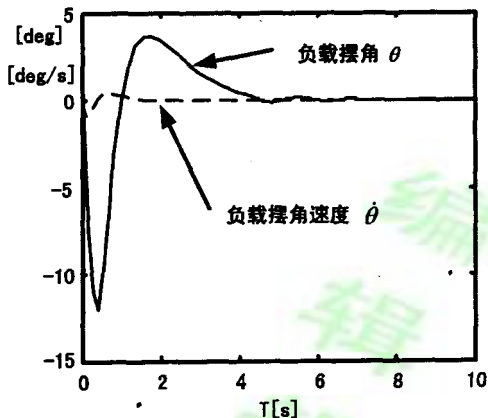


图3 载荷子系统输出状态

Fig. 3 Output states of the load subsystem

5 结论 (Conclusion)

本文针对一类具有重力项的欠驱动系统非线性模型,从稳定性的角度提出了一种滑模控制方法,该方法可以实现单输入多输出非线性系统的有效控制.仿真结果进一步验证了这种稳定滑模控制方法的有效性以及理论分析的正确性,因此该方法对于满足一定假设条件的欠驱动被控对象的控制是可行的.

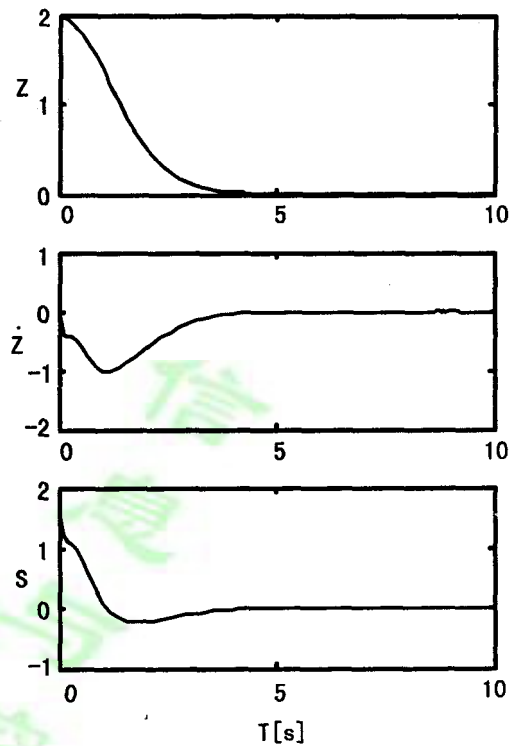


图4 中间变量及滑动平面收敛曲线

Fig. 4 Convergence curves of interim variable and sliding plane

参考文献 (References)

- [1] Zhang M, *et al.* Hybrid control of the pendubot [J]. IEEE/ASME Transactions on Mechatronics, 2002, 7(1): 79~86.
- [2] Hauser J, *et al.* Nonlinear control via approximate input-output linearization: the ball and beam example [J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 1992, 37(3): 392~398.
- [3] Corrigan G, Giua A, Usai G. An implicit gain-scheduling controller for cranes [J]. IEEE Transactions on Control Systems Technology, 1998, 6(1): 15~20.
- [4] Yi J, Yubazaki N, Hirota K. A new fuzzy controller for stabilization of parallel-type double inverted pendulum system [J]. Fuzzy Sets and Systems, 2002, 126(1): 105~119.
- [5] Lin C M, Hsu C F. Decoupled fuzzy sliding-mode control of a nonlinear aeroelastic structure [A]. Proceedings of the 2002 IEEE International Conference on Fuzzy Systems [C]. Piscataway, NJ, USA: IEEE, 2002. 662~667.
- [6] Lo J, *et al.* Decoupled fuzzy sliding-mode control [J]. IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 1998, 6(3): 426~435.
- [7] 王伟, 易建强, 赵冬斌, 等. 基于滑模方法的桥式吊车系统的抗摆控制 [J]. 控制与决策, 2004, 19(9): 1013~1016.

作者简介

王伟(1977-),男,博士研究生.研究领域为欠驱动系统,滑模控制和智能控制等.

易建强(1963-),男,研究员,博士生导师.研究领域为智能控制,机器人,机电一体化等.