第 26 卷 第 9 期
2003 年 9 月

计 算 机 学 报
CHINESE JOURNAL OF COMPUTERS

Vol. 26 No. 9
Sept. 2003

# 两类新的基于 $T/S$ 范数的模糊神经元模型及其应用

徐蔚鸿[1),2)] 叶有培[1)] 杨静宇[1)]

[1)](南京理工大学计算机科学与技术系 南京 210094)

[2)](长沙理工大学计算机与通信工程学院 长沙 410077)

**摘 要** 基于 $T$ 范数和 $S$ 范数提出了 $F1$ 型和 $F2$ 型两类神经元模型,并研究了它们的性质和应用($F1$ 型灵敏性强而鲁棒性弱,而 $F2$ 型神经元灵敏性弱而鲁棒性强);给出了一个基于 $F1$ 型神经元的广义 AND/OR 运算为 $T/S$ 范数簇的充分必要条件;首先提出了弱界三角范数的概念,并发现 $F2$ 型的一个特例模型能实现弱界三角范数.经分析,$F1$ 型更适合用于工业控制系统,而 $F2$ 型更适合用于面向用语言描述知识的医学和人文社会领域的计算机应用系统.该文把一个由特殊的 $F2$ 型神经元组成的神经网络用于模糊推理,发现该推理方法是 Zadeh 的 CRI 法的推广,且能满足假言推理.通过权值的调整,该推理法能满足若干推理原则的要求.

**关键词** 弱界三角范数;弱 $T/S$ 范数簇;模糊神经元;模糊推理

**中图法分类号** TP18

# Two New Neuron Models Based on $T/S$ Norms and Their Applications

XU Wei-Hong[1),2)] YE You-Pei[1)] YANG Jing-Yu[1)]

[1)] (*Department of Computer Science and Technology*, *Nanjing University of Science and Technology*, *Nanjing* 210094)

[2)] (*College of Computer and Communications Engineering*, *Changsha University of Science and Technology*, *Changsha* 410077)

**Abstract** Based on $T$-norm/$S$-norm, $F1$ and $F2$ fuzzy neuron models are proposed for the first time in the paper. Their properties and applications are discussed here. $F1$ model holds good sensitivity and poor robustness. However $F2$ model holds good robustness and poor sensitivity. The paper presents a necessary and sufficient condition of that a generalized AND/OR operator based on $F1$ model is a weak $T$-norm/$S$-norm cluster. The paper set forth the concept of weak bound triangular norm for the first time, further, finds out a particular $F2$ model which can realize weak bound triangular norm. Then the paper points out that $F1$ model is more suitable for industrial control systems and $F2$ model is more suitable for those computer application systems such as fuzzy expert system in the fields of medicine, law and strategic decision et al. Finally, a fuzzy neural network based on a particular $F2$ neuron is applied in fuzzy inference. The new inference method generalizes traditional Zadeh's CRI and satisfies modus ponens and other inference principles when the weights are adjusted in right way.

**Keywords** weak bound triangular-norm; weak $T$-norm/$S$-norm cluster; fuzzy neuron; fuzzy inference

## 1 引 言

三角范数(以下简称三角范)中研究得最多的是 $T$-范数(以下简称 $T$ 范)和 $S$-范数(以下简称 $S$ 范).它在模糊逻辑系统、模糊控制系统和模糊专家系统等中得到广泛应用,至今这方面的理论和应用研究方兴未艾[1~8].由于应用领域的复杂性和客观性,有

收稿日期:2001-12-20;修改稿收到日期:2003-05-29.本课题得到国家自然科学基金(60072034)资助. **徐蔚鸿**,男,1963 年生,博士研究生,副教授,研究方向为智能系统、模式识别和计算机应用等.E-mail: xwhxd @163.com. **叶有培**,男,1945 年生,教授,研究方向为模糊系统、算法设计和分析等. **杨静宇**,男,1941 年生,教授,博士生导师,研究方向为图像处理、模式识别和人工智能等.

时三角范的概念需适当调整.近来,人们提出所谓的弱范概念,它是对三角范的单调性和结合律的限制放宽或加严.在文献[5]的基础上,文献[6]提出 $f$ 范概念并用于刻画模糊命题各子命题之间的关系和整个复合命题的真值计算.文献[1]提出了弱 $T/S$ 范簇概念,依此提出了一个神经元模型.

我们知道计算机有两类重要的应用领域.一类是工业控制,通常由传感器提供一种数据信息,信息的处理要求高实时性和低鲁棒性,后者指当输入发生微小变化时输出也要有变化.另一类是医学和人文社会科学,如法律、质量评估、预测和决策等,通常由领域专家提供一种描述系统性能的语言信息,信息的处理不要求高实时性而要有好的鲁棒性,后者因专家知识及语言信息具有概念的模糊性、事件出现的随机性和知识的不完全性等引起的.

模糊推理是模糊专家系统的关键技术[9],是模糊控制系统的理论基础[10],也是人工智能研究的重要领域,主要用于推理过程中信息的传播或更新计算.Zhadeh 提出的 CRI(Compositional Rule of Inference)算法在模糊智能系统中得到广泛应用.然而,CRI 法存在着某些缺陷,且模糊推理与模糊逻辑未能很好地结合[10~12].近来,文献[10]提出了基于三 I 机制的特征展开模糊推理算法,并得到一定应用[9].基于区间值模糊信息处理是一个重要的研究方向[4,5].

实际中复合模糊命题的子命题之间的逻辑关系比较复杂,所以我们开发模糊专家系统时,目前尚不能用适用于一切情形的公式来表达或计算这种逻辑关系[5,6],但也许我们可以通过带有参数的公式来增加子命题之间的逻辑关系的表达的多样性和逻辑演算的可调性.

## 2 基于 *T/S* 范的模糊神经元模型及其性质

设 $U$ 是论域,$U$ 上的全体模糊集的集合记为 $F(U)$,$X,Y\in F(U)$.我们知道 $T(x,y)$ 范是广义"$\wedge$"运算,$S(x,y)$ 范是广义"$\vee$"运算,其中 $(x,y)\in[0,1]\times[0,1]$.与 $T(x,y)$ 范和 $S(x,y)$ 范相应的 $T(X,Y)$ 和 $S(X,Y)$ 可分别看成是两集合间的广义"$\cap$"运算和广义"$\cup$"运算,仍满足交换律、单调性、边界性和结合律等良好的性质.其中规定 $T(X,Y)(u)=T(X(u),Y(u))$,$S(X,Y)(u)=S(X(u),Y(u))$.本文规定若 $P\in F(U)$,$\forall u\in U$,$P(u)=$ 常数 1,则把 $P$ 简记为 1,其余类似.$(XY)(u)=X(u)\times Y(u)$,$(X+Y)(u)=X(u)+Y(u)$,$\forall u\in U$.$X$ 的补集记为 $\overline{X}$(即 $\overline{X}(u)=1-X(u)$).$T/S$ 范的定义及其众多的实例可见文献[13].

### 2.1 F1 型神经元模型

我们把 $F1$ 数值型神经元所实现的运算的集合记为

$F1=\{f_1(x,y)=aT(x,y)+bS(x,y)+c\mid a,b,c\in R$,$T(x,y)$ 和 $S(x,y)$ 分别为 $T$ 范和 $S$ 范,且对偶$\}$.显然,文献[1]提出的 $f_{1,\wedge,\vee}(x,y)=a(x\wedge y)+b(x\vee y)+c$ 是 $F1$ 数值型神经元的特例(取 $T(x,y)=x\wedge y$,$S(x,y)=x\vee y$),它能统一表达与、或、等价和平均运算.

$F1$ 数值型神经元内部结构如图 1 所示.其中输入 $x$ 和 $y$ 是数值,输出是数值,$T(x,y)$ 和 $S(x,y)$ 对偶,传递函数

$$f(x)=\begin{cases}1, & x>1\\ x, & 0\le x\le 1\\ 0, & x<0\end{cases}.$$

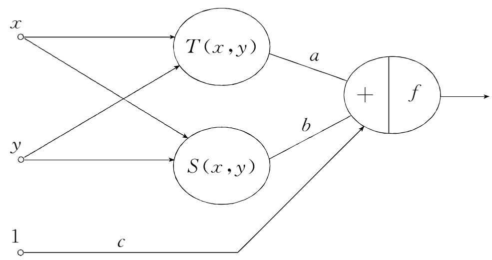


图 1 F1 数值型神经元内部结构

我们把 $F1$ 集合型神经元所实现的运算的集合记为

$F1'=\{f_1(X,Y)=AT(X,Y)+BS(X,Y)+C\mid A,B,C\in F(U)$,$T(X,Y)$ 和 $S(X,Y)$ 分别为 $T$ 范和 $S$ 范,且对偶$\}$.以下重点讨论 $F1'$ 的性质,$F1$ 有与之类似的结论.

$F1'$ 集合型神经元内部结构如图 2 所示.其中输入 $X$ 和 $Y$ 是模糊集,输出是模糊集,且模糊集 $T(X,Y)$ 和 $S(X,Y)$ 对偶,传递函数 $f(X)=X$.

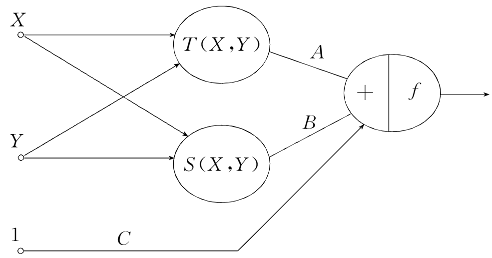


图 2 F1′集合型神经元内部结构

#### 2.1.1 F1 和 F1′对某些运算的封闭性

神经元最终还是要用到神经网络中,研究一个神经元类的集合对某种运算(如"$\vee$")的封闭能力的

一个易被忽视的意义为：若神经网络中有多个同类型的神经元要用该运算（如“$\vee$”）合并各自的结果，则可以用另一个同类型的神经元取代它们，以使神经网络的结构简化，如果取代时不需添加其它的神经元还可能使运算时间减少[14]。

**定理1.** $\forall f_1(X,Y), g_1(X,Y)\in F1', D\in F(U)$，则(1) $Df_1(X,Y), f_1(X,Y)+g_1(X,Y)\in F1'$；(2) $f_1(X,Y)$ 的对偶 $f_1'(X,Y)=\overline{f_1(\overline{X},\overline{Y})}\in F1'$。

证明. 仅证(2) $f_1'(X,Y)=\overline{f_1(\overline{X},\overline{Y})}=1-AT(\overline{X},\overline{Y})-BS(\overline{X},\overline{Y})-C=1+A(S(X,Y)-1)+B(T(X,Y)-1)-C=BT(X,Y)+AS(X,Y)+(1-A-B-C)\in F1'$。　　证毕.

该定理说明，要实现 $f_1(X,Y)$ 的对偶运算，只需交换 $T(X,Y)$ 和 $S(X,Y)$ 的权值，并把 $1-A-B-C$ 替换原来的 $C$ 即可.

2.1.2　$f_1(X,Y)\in F1'$ 与 $T/S$ 范的关系

若存在 $T(x,y)$ 范使得 $f_1(X,Y)=T(X,Y)$，就称 $f_1(X,Y)$ 可用 $T$ 范表达. 若存在 $S(x,y)$ 范使得 $f_1(X,Y)=S(X,Y)$，就称 $f_1(X,Y)$ 可用 $S$ 范表达.

**命题1.** (1) $f_1(X,Y)$ 可用 $T$ 范表达 $\Leftrightarrow A=1, B=C=0$，即 $f_1(X,Y)=T(X,Y)$；(2) $f_1(X,Y)$ 可用 $S$ 范表达 $\Leftrightarrow B=1, A=C=0$，即 $f_1(X,Y)=S(X,Y)$. 证略.

该命题说明 $f_1(X,Y)$ 本身一般不能用 $T$ 范和 $S$ 范表达. 若不然，反而没有该模型存在的必要了.

**命题2.** 若 $f_1(X,Y)\in F1'$ 满足结合律(即 $f_1(f_1(X,Y),Z)=f_1(X,f_1(Y,Z))$)，则 $AC+B=B^2+BC$. 证明略.

2.1.3　广义 AND/OR 运算及弱 $T/S$ 范数簇的构造

**定理2.**　设连续的 $T(x,y)$ 范和 $S(x,y)$ 范是对偶的，则

(1)广义“或”运算 $OR_w(x,y)=1\wedge(S(x,y)+wT(x,y)), w\in[0,1]$ 是弱 $S$ 范簇[1]的充分必要条件为 $f_{x,y,z}(1,1)\le g_{x,y,z}(1,1)$，其中

$$f_{x,y,z}(p,q)=OR_p(OR_q(x,y),z),$$
$$g_{x,y,z}(m,n)=OR_m(x,OR_n(y,z)).$$

(2)广义”与”运算 $AND_w(x,y)=0\vee(T(x,y)+wS(x,y)-1)$ 是弱 $T$ 范簇[1]的充分必要条件为 $u_{x,y,z}(1,1)\le v_{x,y,z}(1,1)$，其中

$$u_{x,y,z}(p,q)=AND_p(AND_q(x,y),z),$$
$$v_{x,y,z}(m,n)=AND_m(x,AND_n(y,z)).$$

(3)广义”平均”运算 $AVE_w(x,y)=(1-w)T(x,y)+wS(x,y), w\in[0,1]$ 的值域为 $[T(x,y),S(x,y)]$.

证明.　(1)的证明，先证 $OR_w(x,y)$ 总满足边界性、单调性和交换律.

① 边界性. $OR_w(1,y)=1\wedge(S(1,y)+wT(1,y))=1\wedge(1+wy)=1$.

$$OR_w(0,y)=1\wedge(S(0,y)+wT(0,y))=1\wedge(y+0)=y.$$

②单调性. $\forall x,y,z$，且 $y\le z$，因 $T(x,y), S(x,y)$ 是单调的，故 $OR_w(x,y)=1\wedge(S(x,y)+wT(x,y))\le 1\wedge(S(x,z)+wT(x,z))=OR_w(x,z)$.

③交换律. 显然真.

故 $OR_w(x,y)$ 是弱 $T$ 范簇的充分必要条件为 $OR_w(x,y)$ 满足弱结合律，下证 $OR_w(x,y)$ 满足弱结合律的充分必要条件为 $f_{x,y,z}(1,1)\le g_{x,y,z}(1,1)$.

充分性. 注意到

$f_{x,y,z}(p,q)=OR_p(OR_q(x,y),z)=1\wedge(S(1\wedge(S(x,y)+qT(x,y)),z)+pT(1\wedge(S(x,y)+qT(x,y)),z))$,

$g_{x,y,z}(m,n)=OR_m(x,OR_n(y,z))=1\wedge(S(x,1\wedge(S(y,z)+nT(y,z)))+mT(x,1\wedge(S(y,z)+nT(y,z))))$.

事实上，由数学分析知识知道，两个连续函数的取小、求和、求积及复合运算所得的函数还是连续的. 由于 $S(x,y)+qT(x,y)$ 是关于 $(p,q)$ 的连续函数，而 $S(x,y)$ 又是连续 $S$ 范，故 $S(1\wedge(S(x,y)+qT(x,y)),z)$ 是关于 $(p,q)$ 的连续函数，类似有 $T(1\wedge(S(x,y)+qT(x,y)),z)$ 是关于 $(p,q)$ 的连续函数，故 $f_{x,y,z}(p,q)$ 是关于 $(p,q)$ 在 $[0,1]\times[0,1]$ 上的连续函数. 又因 $T(x,y)$ 和 $S(x,y)$ 是单调增的，故不难知 $f_{x,y,z}(p,q)$ 分别关于 $p$ 和 $q$ 单调递增. 同理 $g_{x,y,z}(m,n)$ 有类似的结论. 故 $f_{x,y,z}(p,q)$ 的值域为 $I_f=[f_{x,y,z}(0,0), f_{x,y,z}(1,1)]$，$g_{x,y,z}(m,n)$ 的值域为 $I_g=[g_{x,y,z}(0,0), g_{x,y,z}(1,1)]$，其中，$f_{x,y,z}(0,0)=1\wedge S(1\wedge S(x,y),z)=S(S(x,y),z)$，$g_{x,y,z}(0,0)=1\wedge S(x,1\wedge S(y,z))=S(x,S(y,z))$.

因 $S$ 满足结合律，故 $f_{x,y,z}(0,0)=g_{x,y,z}(0,0)$. 故 $\forall(p,q)\in[0,1]\times[0,1]$，当 $f_{x,y,z}(1,1)\le g_{x,y,z}(1,1)$ 成立时，有 $f_{x,y,z}(p,q)\in I_f\subseteq I_g$，因 $g_{x,y,z}(m,n)$ 是 $[0,1]\times[0,1]$ 上的连续函数，由闭区间上连续函数的介值定理知一定存在 $(m',n')\in[0,1]\times[0,1]$ 使 $f_{x,y,z}(p,q)=g_{x,y,z}(m',n')$，即 $OR_p(OR_q(x,y),z)=OR_{m'}(x,OR_{n'}(y,z))$.

必要性. 当 $OR_w(x,y)$ 满足弱结合律时，依定义对于 $p=1, q=1$，应 $\exists m', n'$ 使

$$f_{x,y,z}(1,1)=g_{x,y,z}(m',n')\le g_{x,y,z}(1,1).$$

(2)的证明与(1)的证明类似，略.

(3)由 $T(x,y)$ 和 $S(x,y)$ 的定义，易知 $T(x,y)$

$\le S(x,y)$成立，所以

$$(1-w)T(x,y)+wS(x,y)\ge (1-w)T(x,y)+wT(x,y)=T(x,y),$$

$$(1-w)T(x,y)+wS(x,y)\le (1-w)S(x,y)+wS(x,y)=S(x,y),$$

又$(1-w)T(x,y)+wS(x,y)$显然为关于$w\in[0,1]$的连续函数，故其值域为$[T(x,y),S(x,y)]$.

证毕.

定理 2 把由 $T(x,y)$和 $S(x,y)$构造的广义 $OR_w(x,y)$(广义 $AND_w(x,y)$)是否为弱 $S$ 范簇(弱 $T$ 范簇)的问题简单地归结为判别仅含 $x,y$ 和 $z$ 的不等式 $f_{x,y,z}(1,1)\le g_{x,y,z}(1,1)$，$(x,y,z)\in[0,1]\times[0,1]\times[0,1]$($u_{x,y,z}(1,1)\le v_{x,y,z}(1,1)$，$(x,y,z)\in[0,1]\times[0,1]\times[0,1]$)是否成立的问题. 定理 2 为我们寻找文献[1]所提出的弱 $T/S$ 范数簇提供了一个带有一定通用性的方法.

**推论 1.** 设连续的 $T(x,y)$和 $S(x,y)$分别是对偶的 $T$ 范和 $S$ 范，且 $T(x,y)+S(x,y)=x+y$，则(1)广义 $OR_w(x,y)$是弱 $S$ 范簇；(2)广义 $AND_w(x,y)$是弱 $T$ 范簇.

证明. 仅证(1). $f_{x,y,z}(1,1)=1\wedge(S(1\wedge(S(x,y)+T(x,y)),z)+T(1\wedge(S(x,y)+T(x,y)),z))=1\wedge((1\wedge(S(x,y)+T(x,y)))+z)=1\wedge(1\wedge(x+y)+z)=1\wedge(x+y+z)$. 同理 $g_{x,y,z}(1,1)=1\wedge(x+y+z)$. 故 $f_{x,y,z}(1,1)=g_{x,y,z}(1,1)$，由定理 2 中(1)知结论成立.

证毕.

**例.** 当 $T(x,y)=xy$，$S(x,y)=x+y-xy$ 时，$OR_w(x,y)=1\wedge(x+y-xy+w(xy))$，$w\in[0,1]$是弱 $S$ 范簇，$AND_w(x,y)=0\vee(xy+w(x+y-xy-1))$是弱 $T$ 范簇. 这是因 $T(x,y)+S(x,y)=x+y$满足推论 1 的条件.

因当 $x<=y$，$f_{1,\wedge,\vee}(x,y)=ax+by+c$，而当 $x>y$，$f_{1,\wedge,\vee}(x,y)=ay+bx+c$，故 $f_{1,\wedge,\vee}(x,y)$的图形本质上是两个平面块粘成的. 它易于硬件实现，但描述能力有限，如它不能表示二次函数 $xy$，$x+y-xy$ 等. 作为 $f_{1,\wedge,\vee}(x,y)$的推广，$F1$ 模型中的 $T$ 和 $S$ 可到众多已知的 $T$ 范和 $S$ 范中去取，所以 $F1$ 型神经元模型的应用范围更广，描述能力更强.

## 2.2　F2 型神经元模型

我们把 $F2$ 数值型神经元所实现的运算的集合记为

$F2=\{f_2(x,y)=(a\wedge T(x,y))\vee(b\wedge S(x,y))\vee c\mid a,b,c\in R$，其中 $T(x,y)$和 $S(x,y)$分别为 $T$ 范和 $S$ 范，且对偶$\}$.

$F2$ 数值型神经元的内部结构如图 3 所示. 其中输入 $x$ 和 $y$ 是数值，$T(x,y)$和 $S(x,y)$对偶，传递函数 $f(x)=\begin{cases}1, & x>1\\ x, & 0\le x\le 1\\ 0, & x<0\end{cases}$.

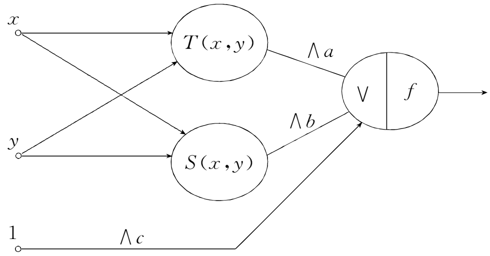


图 3　F2 数值型神经元的内部结构

我们把 $F2$ 集合型神经元所实现的运算的集合记为

$F2'=\{f_2(X,Y)=(A\cap T(X,Y))\cup(B\cap S(X,Y))\cup C\mid A,B,C\in F(U)$，其中 $T(X,Y)$和 $S(X,Y)$分别为 $T$ 范和 $S$ 范，且对偶$\}$.

$F2$ 集合型神经元的内部结构如图 4 所示. 其中输入 $X$ 和 $Y$ 是模糊集，输出是模糊集，且模糊集 $T(X,Y)$和 $S(X,Y)$对偶，传递函数 $f(X)=X$.

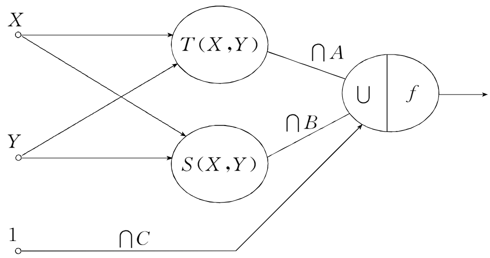


图 4　F2 集合型神经元的内部结构

### 2.2.1　F2 和 F2′对某些运算的封闭性

此处只针对 $F2'$讨论，$F2$ 有类似的结论.

**命题 3.** (1)$f_2(X,Y)\in F2'$可用 $T$ 范表达$\Leftrightarrow f_2(X,Y)=T(X,Y)$；(2)$f_2(X,Y)$可用 $S$ 范表达$\Leftrightarrow f_2(X,Y)=S(X,Y)$. 证明略.

**定理 3.** $\forall E_1,E_2\in F(U)$，$\forall f_2(X,Y)$，$g_2(X,Y)\in F2'$，则

(1)$E_1\cap f_2(X,Y)$，$E_1\cup f_2(X,Y)\in F2'$；

(2)$f_2(X,Y)\cap g_2(X,Y)$，$f_2(X,Y)\cup g_2(X,Y)\in F2'$；

(3)$f_2(X,Y)$的对偶 $f'_2(X,Y)=\overline{f_2(\overline{X},\overline{Y})}\in F2'$.

证明. 仅证(2)和(3).

$f_2(X,Y)\cap g_2(X,Y)=[(A_1\cap T(X,Y))\cup(B_1\cap S(X,Y))\cup C_1]\cap[(A_2\cap T(X,Y))\cup(B_2\cap S(X,Y))\cup C_2]=[((A_1\cap A_2)\cup(A_2\cap B_1)\cup(C_1\cap C_2)\cup(A_1\cap B_2)\cup(A_1\cap C_2))\cap T(X,Y)]\cup[((B_1\cap B_2)\cup(B_2\cap C_1)\cup$

$(C_2\cap B_1))\cap S(X,Y)]\cup[C_1\cap C_2]\in F2'$

$f_2'(X,Y)=\overline{f_2(\overline{X},\overline{Y})}=$

$\overline{[(A\cap T(\overline{X},\overline{Y}))\cup(B\cap S(\overline{X},\overline{Y}))\cup C]}=$

$(\overline{A}\cup\overline{T(\overline{X},\overline{Y})})\cap(\overline{B}\cup\overline{S(\overline{X},\overline{Y})})\cap\overline{C}=(\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{C})\cup(\overline{A}\cap\overline{C}\cap T(X,Y))\cup(\overline{B}\cap\overline{C}\cap S(X,Y))\cup(\overline{C}\cap T(X,Y))=(\overline{C}\cap T(X,Y))\cup(\overline{B}\cap\overline{C}\cap S(X,Y))\cup(\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{C})\in F2'$.　　证毕.

以上整理过程要用到熟知的性质 $T(X,Y)\cap S(X,Y)=T(X,Y)$.

**命题 4.**　$f_{2,W}(X,Y)=T(X,Y)\cup(W\cap S(X,Y))$，$W\in F(U)$，满足 $T(X,Y)\subseteq f_{2,W}(X,Y)\subseteq S(X,Y)$. 证略.

### 2.2.2 $f_{2,\wedge,\vee}(x,y)=[a\wedge(x\wedge y)]\vee[b\wedge(x\vee y)]\vee c$ 的性质

显然 $f_{2,\wedge,\vee}(x,y)$ 是 $F2$ 数值型神经元的特例，下面假定它的权值 $a,b,c\in[0,1]$.

**表 1　$f_{2,\wedge,\vee}(x,y)$ 的权值的变化及所能表达的运算形式**

| $a$ | $b$ | $c$ | 运算形式 |
|---|---|---|---|
| 1 | $w$ | 0 | 平均运算 |
| 1 | 0 | 0 | 与运算 |
| 0 | 1 | 0 | 或运算 |

**定义 1.**　映射 $\Delta:[0,1]\times[0,1]\to[0,1]$ 称为弱界三角范，若满足(1)弱界性. 常数 $p,q\in[0,1]$，使得 $\Delta(0,0)=p$，$\Delta(1,1)=q$；(2)可交换性. $\Delta(x,y)=\Delta(y,x)$；(3)单调性. $\forall x,y,z\in[0,1]$，若 $y\le z$，则 $\Delta(x,y)\le\Delta(x,z)$；(4)结合律. $\Delta(\Delta(x,y),z)=\Delta(x,\Delta(y,z))$.

**定义 2.**　映射 $T:[0,1]\times[0,1]\to[0,1]$ 称为弱界 $T$ 范，若满足(1)弱界性. $T(1,x)\le x$，$T(0,x)=q$，常数 $q\in[0,1]$；(2)可交换性；(3)单调性；(4)结合律. 均类似于定义 1.

**定义 3.**　映射 $S:[0,1]\times[0,1]\to[0,1]$ 称为弱界 $S$ 范，若满足(1)弱界性. $S(0,x)\le x$，$S(1,x)=q$，常数 $q\in[0,1]$；(2)可交换性；(3)单调性；(4)结合律，均类似于定义 1.

显然，弱界 $T$ 范和弱界 $S$ 范是弱界范.

我们知道复合模糊命题的真值的逻辑演算过程无非就是对各子命题的真值进行一系列的“$\wedge$”和“$\vee$”(或更一般地进行 $T(x,y)$ 和 $S(x,y)$) 等运算的过程，其中数值 $x,y\in[0,1]$ 被解释为两个子命题的真值. 我们也可以把子命题用模糊集合 $X$ 和 $Y$ 表示，这时整个模糊命题就可看成是对 $X$ 和 $Y$ 之间用“$\cap$”和“$\cup$”(或更一般地进行 $T(X,Y)$ 和 $S(X,Y)$) 等运算的结果. 在模糊诊断和分析问题中，复合命题对结论的支持程度依赖于各子命题对结论的支持程度(或彼此相对重要的程度)[6]，在知识(或条件)不完全的情况下，即使子命题的真值为 1，整个复合命题的真值也可能小于 1. 若 $x,y$ 分别表示两子命题的真值，$\Delta(x,y)$ 可表整个复合命题的真值，则弱界三角范能用于刻画此时的复合命题的各子命题之间的弱逻辑关系.

**命题 5.**　$f_{2,\wedge,\vee}(x,y)$ 是弱界三角范.

证明. 为方便记 $f_{2,\wedge,\vee}(x,y)=h(x,y)$，并省去 $\wedge$，如 $x\wedge y$ 记为 $xy$. 弱界性：$h(0,0)=c$，$h(1,1)=a\vee b\vee c$；可交换性和单调性显然；结合律，

$$\begin{aligned}
\text{左}&=h(h(x,y),z)\\
&=ah(x,y)z\vee bh(x,y)\vee bz\vee c\\
&=a[axy\vee bx\vee by\vee c]z\vee\\
&\quad b[axy\vee bx\vee by\vee c]\vee bz\vee c\\
&=axyz\vee abxz\vee abyz\vee acz\vee\\
&\quad abxy\vee bx\vee by\vee bc\vee bz\vee c\\
&=axyz\vee bx\vee by\vee bz\vee c,\\
\text{右}&=h(x,h(y,z))\\
&=axh(y,z)\vee bx\vee bh(y,z)\vee c\\
&=ax[ayz\vee by\vee bz\vee c]\vee bx\vee\\
&\quad b[ayz\vee by\vee bz\vee c]\vee c\\
&=axyz\vee abxy\vee abxz\vee acx\vee bx\vee\\
&\quad abyz\vee by\vee bz\vee bc\vee c\\
&=axyz\vee bx\vee by\vee bz\vee c=\text{右}.
\end{aligned}$$

证毕.

当用 $f_{2,\wedge,\vee}(x,y)$ 模型进行复合模糊命题的逻辑演算时，由于参数 $a,b$ 和 $c$ 的介入，该方法具有可调性和灵活性.

## 2.3 $f_{1,\wedge,\vee}(x,y)$ 模型与 $f_{2,\wedge,\vee}(x,y)$ 模型应用领域的侧重点分析

我们给出 $0\le c\le b\le a\le 1$ 且 $x\le y$ 时，$f_{2,\wedge,\vee}(x,y)$ 的取值图，其它情形可类似给出.

从图 5 可知 $f_{2,\wedge,\vee}(x,y)$ 的图形是由多块边沿为直线段的有限平面块(方程的形式为 $f(x,y)=\alpha x+\beta y+\gamma$) 粘接而成的.

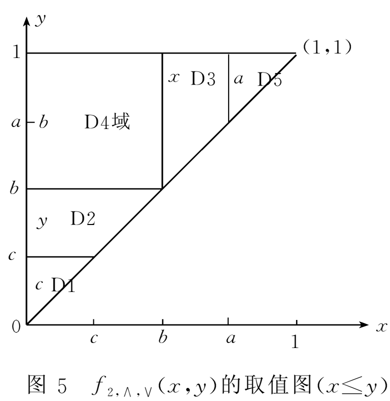


图 5　$f_{2,\wedge,\vee}(x,y)$ 的取值图($x\le y$)

通过观察 $f_{1,\wedge,\vee}(x,y)$[1] 与 $f_{2,\wedge,\vee}(x,y)$ 的图

形,发现后者含有更多的碎块,且还存在有多块水平的台面.而当 $a$ 或 $b$ 不为 0 时,$f_{1,\wedge,\vee}(x,y)$ 的图形最多由两块碎片粘成且不含水平台面,这意味着它没有面积不为 0 的等值域.即只要输入发生微小变化,输出也会极可能发生变化,且 $a$ 和 $b$ 都不为 0 时,输出对 $x$ 和 $y$ 同时敏感.而 $f_{2,\wedge,\vee}(x,y)$ 具有多个面积不为 0 的等值域,如 $D_1,D_4,D_5$.故当 $(x,y)$ 在等值域内游动时,输出不发生变化,同时 $f_{2,\wedge,\vee}(x,y)$ 也有灵敏度较高的区域,如 $D_2,D_3$.这说明 $f_{1,\wedge,\vee}(x,y)$ 更适用于工业控制系统,而 $f_{2,\wedge,\vee}(x,y)$ 更适用于由领域专家用语言描述系统性能和工作方式的计算机应用系统(如模糊专家系统).这些领域主要有医学和人文社会科学及某些灵敏度要求不高的模糊控制系统.例如当用一个模糊集 $A$ 表示"高"时,则应当在 $A$ 的某一很小的"邻域"内的模糊集合 $A'$ 还是表示"高"的含义,因为一般说来,专家的"高"的概念本身就没有很确定的外延.$A$ 的这个"邻域"就是一个"等值域".$f_{1,\wedge,\vee}(x,y)$ 和 $f_{2,\wedge,\vee}(x,y)$ 适用领域也一定程度上分别代表了 F1 型和 F2 型的适用领域.$f_{1,\cap,\cup}(X,Y)$ 的特点类似于 $f_{1,\wedge,\vee}(x,y)$,$f_{2,\cap,\cup}(x,y)$ 的特点类似于 $f_{2,\wedge,\vee}(X,Y)$.

## 3 $f_{2,\wedge,\vee}(x,y)$ 在模糊推理中的应用

由于单重和多维模糊推理通过一定手段可化为简单情形下的模糊推理,故以下仅说明 $f_{2,\wedge,\vee}(x,y)$ 在简单情形下的模糊推理中的应用.简单情形下的模糊推理:设 $U,V$ 为论域,$|U|=n$,$|V|=m$,而 $F(U)$,$F(V)$ 和 $F(U\times V)$ 分别为 $U,V$ 和 $U\times V$ 上的全体模糊集的集合,已知规则 $A\rightarrow B$ 及其蕴含关系 $R$,其中 $A\in F(U)$,$B\in F(V)$,$R\in F(U\times V)$;问题是当出现 $A'\in F(U)$ 时,如何确定相应的 $B'\in F(V)$?$R$ 有两种方法给出:(1)用 $A,B$ 的数学关系式构造,如 Zadeh,Mamdani,Mizumoto 等给出了很多关系式[13],(2)由领域专家直接给出 $R$ 的每一个元素的数值.

我们把图 6 的神经元记为 $f_2(P_{i1}(v_j),P_{i2}(v_j),P_{i3}(v_j))$ 或 $f_{2i}(v_j)$.

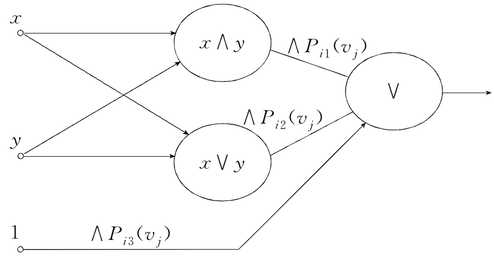


图 6 一个神经元内部结构

基于图 6 的神经元,所构造出的神经网络(图 7)的输出 $B'$ 为

$$B'(v)=\bigvee_{i=1}^{n}\Big\{[P_{i1}(v)\wedge(A'(u_i)\wedge R(A(u_i),B(v)))]\vee[P_{i2}(v)\wedge(A'(u_i)\vee R(A(u_i),B(v)))]\vee P_{i3}(v)\Big\}=\bigvee_{i=1}^{n}[P_{i1}(v)\wedge(A'(u_i)\wedge R(A(u_i),B(v)))]\vee\bigvee_{i=1}^{n}[P_{i2}(v)\wedge(A'(u_i)\vee R(A(u_i),B(v)))]\vee\bigvee_{i=1}^{n}P_{i3}(v).$$

其中,$v\in V$.若令 $P_{i1}(v)=1$,$P_{i2}(v)=0$,$P_{i3}(v)=0$,$i=1,2,\cdots,n$,$v\in V$,则 $B'=A'\circ R(A,B)$,此为有名的 Zadeh 的模糊推理合成法(CRI 法).该神经网络要用到躯体修正法进行训练[12].训练后的该神经网络给出的推理方法总满足假言推理,具有单调性,且得到的推理结果的模糊度一般较其它方法要小.若仅要求推理方法满足假言推理而论,该法无需慎选难以合理确定的 $R$.基于 F2 型神经元的神经网络在模糊推理中的应用的详细讨论可见文献[14]和[15].

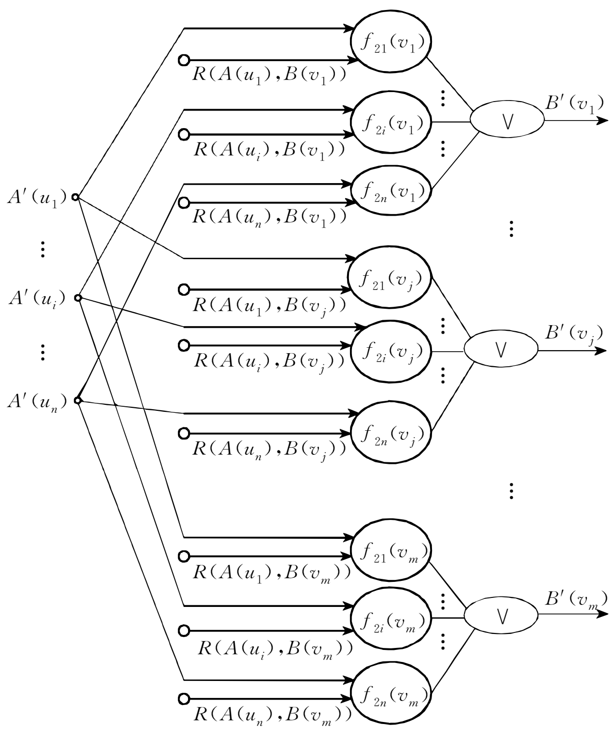


图 7 用于模糊推理的神经网络

## 4 结束语

定理 2 为我们构造和判定文献[1]所提出的弱 $T/S$ 范数簇提供了一个带有一定通用性的方法.一般说来,$f_{1,\wedge,\vee}(x,y)$(或 $f_{1,\cap,\cup}(X,Y)$)神经元更适

用于对灵敏度要求高的控制系统，$f_{2,\wedge,\vee}(x,y)$（或 $f_{2,\cap,\cup}(X,Y)$）更适用于对鲁棒性要求高的面向医学和人文科学领域的用语言描述系统性能的模糊专家系统等计算机应用系统. $f_{1,\wedge,\vee}(x,y)$（或 $f_{1,\cap,\cup}(X,Y)$）和 $f_{2,\wedge,\vee}(x,y)$（或 $f_{2,\cap,\cup}(X,Y)$）的适用领域分别一定程度上代表了 $F1$ 和 $F2$ 型的适用领域. 当 $T(x,y)$ 和 $S(x,y)$ 取得较复杂时，可望提高神经元的性能，可用于软件编程当中. 当 $T(x,y)$ 和 $S(x,y)$ 的内部运算简单时，此构成的神经元还便于硬件形式的实现. 用 $F2$ 型神经元构造出某种神经网络进行满足各种推理原则要求的模糊推理方法是今后本问题的一种研究方向. 弱界三角范、弱界 $T$ 范和弱界 $S$ 范可望在描述复合模糊命题的子命题之间的弱逻辑关系和整个模糊命题的真值计算问题上找到实际应用.

## 参　考　文　献


1 Chen Dan, He Hua-Can, Wang Hui. A new neuron model based on weak $T$-norm cluster. Chinese Journal of Computers, 2001, 24(10): 1115～1120(in Chinese)
(陈　丹，何华灿，王　晖. 一种新的基于弱 $T$ 范簇的神经元模型. 计算机学报，2001，24(10)：1115～1120)

2 Buckley J J, Silar W. A new $t$-norm. Fuzzy Sets and Systems, 1998, 16(1): 283～290

3 Radko Mesiar. A note on moderate growth of $t$-conorms. Fuzzy Sets and Systems, 2001, 122(2): 357～359

4 Stefan Chanas. On the interval approximation of a fuzzy number. Fuzzy Sets and Systems, 2001, 122(1): 353-356

5 Su Chang *et al*. The feeble logic of the compound fuzzy proposition and its algorithm. Chinese Journal of Computers, 200, 23(3): 273～277 (in Chinese)
(苏　畅等. 复合模糊命题的弱逻辑关系及其运算方法. 计算机学报，2000，23(2)：273～277)

6 An Shi-Hu. On the weak norms of the compound fussy proposition. Chinese Journal of Computers, 2001, 24(10): 1071～1076(in Chinese)
(安世虎. 复合模糊命题运算中的弱范数研究. 计算机学报，2001，24(10)：1071～1076)

7 Maciej Wygralak. Fuzzy sets with triangular norms and their cardinality theory. Fuzzy Sets and Systems, 2001, 124(1): 1～24

8 Dug Hun Hong. Some results on the addition of fuzzy intervals. Fuzzy Sets and Systems, 2001, 122(2): 349～352

9 Li Shao-Wen, Xiong Fan-Lun, Huai Xiao-Yong. Fuzzy reasoning model of characteristic expansion based on triple $I$ method and its application in expert systems. Pattern Recognition and Artificial Intelligence, 2001, 14(3): 272～275( in Chinese )
(李绍稳等. 专家系统中的特征展开三 I 模糊推理模型及其应用. 模式识别与人工能，2001，14(3)：272～275)

10 Wang Guo-Jun. Triple-implication algorithm for fuzzy inference. Science in China(Series E), 1999, 29(1): 45～53(in Chinese)
(王国俊. 模糊推理的全蕴含三 I 算法. 中国科学(E 辑)，1999，29(1)：45～53 )

11 Buckley J, Haya shi Y. Can approximate reasoning be consistent? Fuzzy Sets and Systems, 1994, 65(1): 13～18

12 Elkan C. The paradoxical success of fuzzy logic. IEEE Transactions on Expert, 1994, 9(4): 3～8

13 Wang Shi-Tong. Neuro-Fuzzy Systems and Their Applications. Beijing: Beijing University of Aeronautics and Astronautics Press, 1998(in Chinese)
(王士同编著. 神经模糊系统及其应用. 北京：北京航空航天大学出版社，1998)

14 Xu Wei-Hong, Zhao Hai-Tao, Ye You-Pei, Yang Jing-Yu. A new robust neuron model and its application in fuzzy inference. Computer Applications, 2002, 22(10): 38～40(in Chinese)
(徐蔚鸿，赵海涛，叶有培，杨静宇. 一种鲁棒性较强的新神经元模型及其在模糊推理中的应用. 计算机应用，2002，22(10)：38～40)

15 Xu Wei-Hong, Huang Yuan-Yuan, Yang Jing-Yu, Ye You-Pei. A new method of fuzzy inference based on a neural network. Microelectronics & Computer, 2002, 19(10): 7～10(in Chinese)
(徐蔚鸿，黄元元，杨静宇，叶有培. 一种基于神经网络的模糊推理方法. 微电子学与计算机，2002，19(10)：7～10)



**XU Wei-Hong**, born in 1963, Ph. D. candidate, associate professor. His research interests include intelligent systems, pattern recognition, computer application.

**YE You-Pei**, born in 1945, professor. His research interests include fuzzy systems, algorithm design and analysis.

**YANG Jing-Yu**, born in 1941, professor and Ph. D. supervisor. His research interests include image processing, pattern recognition and artificial intelligence.