

基于偏微分方程的隐式曲面光顺方法

童伟华 陈发来 冯玉瑜

(中国科学技术大学数学系 合肥 230026)

摘 要 提出隐式曲面的光顺问题, 针对该问题, 给出刻画隐式曲面光顺程度的能量模型, 并将能量解释为关于隐函数的泛函, 基于变分原理, 构造出隐函数关于时间的偏微分方程, 通过求解该方程得到隐函数序列, 使得光顺能量逐渐变小, 从而达到光顺隐式曲面的目的. 另外, 针对光顺问题提出的其它约束条件, 如尽可能保持面积不变, 保持原有的形状特征等, 对模型进行修正. 最后, 给出方程的实用解法及实验结果, 并作简单讨论. 实验结果表明该方法通用、灵活、有效, 而且程序易于实现.

关键词 隐式曲面; 光顺; 变分原理; 偏微分方程数值解

中图法分类号 TP391

Fairing of Implicit Surface Via Partial Differential Equations

TONG Wei-Hua CHEN Fa-Lai FENG Yu-Yu

(Department of Mathematics, University of Science and Technology of China, Hefei 230026)

Abstract This paper put forward the fairing issue of implicit surfaces. We introduce several energy models which characterize the smoothness of implicit surfaces, and treat the energy as the functional of implicit surfaces. Based on variational theory, we derive a partial differential equation (PDE) of the implicit function for each energy model. By solving the PDE, we get a series of implicit functions whose fairing energy diminish accordingly, and thus achieve the goal of fairing the implicit surface. Furthermore, in order to satisfy other constrains in surface fairing process, such as preserving surface areas and features, we present some techniques to modify the corresponding energy models. Finally, we present some practical numerical methods to solve the partial differential equations and illustrate some examples to demonstrate the computational results. The experimental results show that our methods are in general flexible, effective and simple to implement.

Keywords implicit surface; fairing; variational theory; numerical solutions of partial differential equations

1 引 言

在计算机图形学、CAD/CAM、CAGD 等众多领域, 自由曲线/曲面的光顺是重要的研究课题之

一. 早在 20 世纪 60~70 年代, 就有众多国内外学者研究造船、汽车与飞机设计中的光顺问题^[1]. 德国著名专家 Hoschek 在其专著^[2]中独辟一章, 专门探讨自由曲线/曲面的光顺问题.

自 20 世纪 90 年代初, 相关工作取得了一定的

收稿日期: 2003-07-04; 修改稿收到日期: 2004-05-21. 本课题得到国家杰出青年基金(60225002)、国家“九七三”重点基础研究发展规划“数学机械化及其自动推理平台”项目(G1998030600)、教育部高校青年教师奖励计划以及教育部博士点基金(20010358003)资助. 童伟华, 男, 1978 年生, 博士研究生, 主要研究方向为计算机图形学、计算机辅助几何设计. E-mail: tongwh@ustc.edu.cn. 陈发来, 男, 1966 年生, 教授, 博士生导师, 主要研究方向为计算机图形学、计算机辅助几何设计. 冯玉瑜, 男, 1940 年生, 教授, 博士生导师, 主要研究方向为多变量逼近论、计算机辅助几何设计.

进展,其中具有代表性的研究工作有: Welch 和 Witkin^[3]提出基于带约束优化模型的张量积 B 样条曲面的光滑方法,进而在文献[4]中将该方法应用到参数化的三角曲面片上; Moreton 和 Sequin^[5]提出基于泛函优化模型的参数 Bézier 曲面片的光滑方法; 1995 年, Taubin^[6]提出基于信号处理思想的光滑新方法,该方法适用网格表示的曲面. 随后 Desbrun^[7]等进一步发展了这一思想,提出不同的计算格式;最近,在文献[8,9]中,他们将各向异性、保持形状特征等思想引入光滑算法中; Jones^[10]等根据鲁棒统计思想提出非迭代、保持特征的网格光滑方法; Fleishman^[11]等则将图像处理中的双向滤波器方法成功引入到网格去噪技术中.

然而上述方法都是针对参数曲面或网格曲面的. 隐式曲面,作为曲面的另一种表示形式,最近受到越来越多的重视和应用,尤其是在散乱点曲面重构技术中^[12~15]. 因此,隐式曲面的光滑问题日趋重要. 据我们所知,关于隐式曲面光滑的问题在国内外的研究中还很少见. 在借鉴国内外同行光滑参数曲面工作的基础上,我们提出基于偏微分方程的隐式曲面光滑方法.

本文第 2 节提出刻画曲面光滑程度的能量模型及构造相应的偏微分方程;第 3 节依据约束条件,譬如保持曲面面积、保持曲面形状特征等,对偏微分方程进行修正;第 4 节结合模型方程,给出实用、有效的数值解法;第 5 节展示实验结果,分析光滑效果与算法复杂度.

2 光滑能量模型

与参数曲面不同,隐式曲面通过隐函数表示. 给定隐函数 $f: \Omega \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, 其中 \mathbb{R} 表示实数集, 则称 $S = f^{-1}(0) = \{p \in \Omega: f(p) = 0\}$ 为隐式曲面. 隐函数 f 有时也称为嵌入函数(embedding function), 同一隐式曲面可以通过不同的嵌入函数表示.

曲面 S 既然是通过隐函数 f 表示, 因而隐函数直接决定曲面的性质, 故可以对隐函数定义光滑能量, 来反映曲面的光滑程度, 光滑隐函数的目标就是使光滑能量减少. 通过光滑隐函数 f , 就能很好地光滑曲面 S .

具体的, 我们采用如下方法: 定义光滑能量 $E[f(p; t)]$, 并将它视为关于 f 的泛函, 利用变分原理, 构造出隐函数 $f(p; t)$ 关于时间 t 的偏微分方程, 使得该方程的解 $f(p; t)$ 满足 $E[f(p; t)]$ 逐渐减少, 从而达

到光滑曲面 $S(t)$ 的目的. 通过求解偏微分方程, 可以得到任一时刻的隐函数 $f(p; t)$ 及对应的隐式曲面 $S(t)$.

2.1 基于隐函数定义的能量

下面我们给出光滑能量的几种定义方式以及相应的偏微分方程.

(1) 薄膜能量

$$E[f] = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \|\nabla f\|^2 dx dy dz \quad (1)$$

对 $E[f]$ 关于 f 做一阶变分得

$$\frac{\delta E[f]}{\delta f} = -(f_{xx} + f_{yy} + f_{zz}) = -\Delta f$$

由此可构造如下 f 关于时间 t 的偏微分方程:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial t} = -K \frac{\delta E[f]}{\delta f} = K \Delta f \\ f|_{t=0} = f_0 \end{cases} \quad (2)$$

其中 $K > 0$ 为常数.

(2) 总变差能量

$$E[f] = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \|\nabla f\| dx dy dz \quad (3)$$

对 $E[f]$ 关于 f 作一阶变分得

$$\begin{aligned} \frac{\delta E[f]}{\delta f} &= \frac{2f_x f_y f_{xy} + 2f_x f_z f_{xz} + 2f_y f_z f_{yz} - f_x^2(f_{yy} + f_{zz}) + f_y^2(f_{xx} + f_{zz}) + f_z^2(f_{xx} + f_{yy})}{(f_x^2 + f_y^2 + f_z^2)^{3/2}} - \\ &= -\nabla \cdot \left(\frac{\nabla f}{\|\nabla f\|} \right) = -(\kappa_1 + \kappa_2), \end{aligned}$$

其中 κ_1, κ_2 是曲面的两个主曲率.

由此可构造如下 f 关于时间 t 的偏微分方程:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial t} = -K \frac{\delta E[f]}{\delta f} = K \nabla \cdot \left(\frac{\nabla f}{\|\nabla f\|} \right) \\ f|_{t=0} = f_0 \end{cases} \quad (4)$$

其中 $K > 0$ 为常数.

(3) 薄板能量

$$\begin{aligned} E[f] &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \right)^2 + \right. \\ &\quad \left. 2 \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} \right)^2 \right] dx dy dz \end{aligned} \quad (5)$$

对 $E[f]$ 关于 f 作一阶变分得

$$\begin{aligned} \frac{\delta E[f]}{\delta f} &= -(f_{xxxx} + f_{yyyy} + f_{zzzz} + 2f_{xxyy} + 2f_{xxzz} + 2f_{yyzz}) \\ &= -\Delta^2 f. \end{aligned}$$

由此可构造如下 f 关于时间 t 的偏微分方程:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial t} = -K \frac{\delta E[f]}{\delta f} = K \Delta^2 f \\ f|_{t=0} = f_0 \end{cases} \quad (6)$$

其中 $K > 0$ 为常数.

2.2 基于隐式曲面定义的能量

上述能量都是基于隐函数 f 定义的, 光顺能量也可直接基于 S 定义:

$$E[S] = \frac{1}{2} \int_S (\kappa_1^2 + \kappa_2^2) ds \quad (7)$$

其中 κ_1, κ_2 为曲面的两个主曲率, 该能量称为总曲率能量.

根据变分原理, 采用类似的方法, 可构造上述能量对应的偏微分方程, 但该方程很复杂而且非线性, 不易求解.

如何选取合适的几何量, 使之既能准确刻画曲面的光顺程度, 又可导出较为简单的偏微分方程, 仍是一个需要进一步研究的问题.

上面我们给出了一些光顺能量的定义方法, 实际应用中, 根据不同的需要可选取不同的光顺能量, 构造出相应的偏微分方程, 进而求解.

3 偏微分方程的修正

在实际使用过程中, 对第 2 节中导出的偏微分方程, 可进行必要的修正, 以满足其它一些约束条件, 譬如尽可能保持曲面的面积不变, 保持曲面原有的形状特征等, 这些是近年来曲面光顺问题的重要研究内容.

3.1 保持曲面面积

观察方程(2), 这是一个典型的热传导方程. 随着时间 t 的推移, 光顺能量不断减少, 曲面变得光滑, 但 $f(t)$ 所确定隐式曲面 $S(t)$ 会产生明显的收缩现象. 事实上, 根据偏微分方程理论, 方程(2)的理论解为

$$\begin{aligned} f(\mathbf{p}; t) &= f(x, y, z; t) \\ &= \int_{\Omega} J(x - x', y - y', z - z'; t) \cdot \\ &\quad f_0(x', y', z') dx' dy' dz' = J * f_0, \end{aligned}$$

$$\text{其中 } J(x, y, z; t) = (4\pi t)^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{x^2 + y^2 + z^2}{4t}}.$$

因此, 使用方程(2)等效于高斯卷积滤波, 图像处理中经常使用的一种技术, 能有效地去除噪声, 但会产生收缩效应和模糊图像形状特征, 参见文献[16].

进一步, 曲面 $S(t)$ 的面积可通过如下泛函定义:

$$\begin{aligned} A[f] &= A[f(\mathbf{p}; t)] = \int_{F^{-1}(0)} ds \\ &= \int_{\Omega} \delta(f) \|\nabla f\| dx dy dz, \end{aligned}$$

$$\text{其中 } \delta(x) = \begin{cases} \infty, & x=0 \\ 0, & x \neq 0 \end{cases}$$

对 $A[f]$ 关于 f 做一阶变分:

$$\frac{\delta A[f]}{\delta f} = -\delta(f) \nabla \cdot \left(\frac{\nabla f}{\|\nabla f\|} \right).$$

从而当隐函数满足方程(2)时有

$$\frac{\partial A[f]}{\partial t} = - \int_{\Omega} K \Delta f \cdot \delta(f) \nabla \cdot \left(\frac{\nabla f}{\|\nabla f\|} \right) dx dy dz,$$

因此可得

$$\begin{aligned} &A[f(\mathbf{p}; t_2)] - A[f(\mathbf{p}; t_1)] \\ &= -K \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega} \Delta f \delta(f) \nabla \cdot \left(\frac{\nabla f}{\|\nabla f\|} \right) dx dy dz dt, \end{aligned}$$

该公式给出了面积收缩效应的定量估计.

对于某些应用可能不希望发生这种现象, 为此, 我们可以修正方程(2)来削弱这种效应. 受 Taubin's $\lambda|\mu$ 算法^[6] 的启示, 我们在光顺过程中引入修正步, 削弱收缩效应. 具体地说, 在光顺过程中交替使用下面两个偏微分方程:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial t} = K_{\lambda} \Delta f \\ \frac{\partial f}{\partial t} = K_{\mu} \Delta f \end{cases} \quad (8)$$

其中, $K_{\lambda} > 0, K_{\mu} < 0$ 且满足一定的关系(详见第 4.1 节). 使用 $K_{\lambda} > 0$ 计算的步骤可称为光顺步, 可解释为热传导过程(或扩散过程), 而使用 $K_{\mu} < 0$ 计算的步骤可称为修正步, 可理解为逆向的热传导过程(或扩散过程), 使用该技术能很好地削弱收缩效应, 即很好地保持曲面面积. 在第 4.1 节中, 我们将作进一步的具体分析, 并给出 K_{λ}, K_{μ} 的选取方法.

3.2 保持曲面形状特征

使用方程(2)可以有效地光顺曲面, 但是依据物理学原理, 方程(2)可写为

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \nabla \cdot (K \nabla f),$$

它是传导系数为常数 K 的热传导方程, 或是各向同性的扩散过程. 使用该方程时, 算法不能依据曲面原有形状特征自适应地选择传导系数(或扩散系数). 此外, 依据上一节中方程(2)的理论解, 我们知道使用该方程等效于高斯卷积滤波, 会模糊曲面的形状特征.

然而, 我们在光顺曲面的同时, 希望尽可能地保持曲面的原有形状特征, 如边、角等, 因此从热传导过程(或扩散过程)的观点出发, 我们希望边、角等区域的热传导系数较小, 而平坦区域热传导系数较大,

这样在光滑曲面的同时就能较好地保持曲面原有的形状特征. 而 $\|\nabla f\|$ 可刻画边、角等特征, 即 $\|\nabla f\|$ 较大的位置为边、角等, $\|\nabla f\|$ 较小的位置为平坦区域, 故可取热传导系数为 $K/\|\nabla f\|$, 则直接导出方程(4):

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \nabla \cdot \left(\frac{K}{\|\nabla f\|} \nabla f \right),$$

表示各向异性的热传导过程(或扩散过程). 图 1 证实了我们的分析, 从图中可以看出, 使用方程(2)能得到较光滑的结果, 但会模糊边、角等形状特征; 而使用方程(4)就能较好地保持边、角等形状特征.

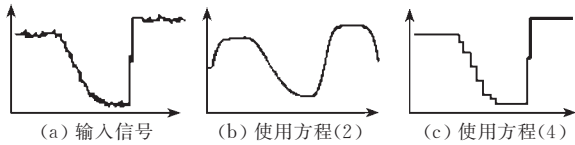


图 1 光滑结果对比

另注意到方程(4)是一个含非线性因子的抛物型方程, 在实际计算过程中, 可能因 $\|\nabla f\|$ 过小, 导致数值算法的不稳定或限制时间步长 Δt 过小. 因此, 在实际计算中, 需对方程(4)进行如下修正:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = K \nabla \cdot (g(\|\nabla f\|) \nabla f) \quad (9)$$

其中 $g(\|\nabla f\|) = \left(1 + \frac{\|\nabla f\|^2}{\alpha}\right)^{-1}$, $\alpha > 0$ 为常数, 起调节 $\|\nabla f\|$ 的作用.

对方程(9)还可进一步进行修正, 以简化计算. 将方程(9)右边项展开得

$$K \nabla \cdot (g(\|\nabla f\|) \nabla f) = K(g(\|\nabla f\|) \Delta f - \alpha^{-1} g^2(\|\nabla f\|) \nabla f \cdot \nabla (\|\nabla f\|^2)),$$

上式括号中第二项含有 $\alpha^{-1} g^2(\|\nabla f\|)$, 相对较小, 因此可将此项略去, 从而得到方程(9)的近似方程

$$\frac{\partial f}{\partial t} = K g(\|\nabla f\|) \Delta f, \quad g(\|\nabla f\|) = \left(1 + \frac{\|\nabla f\|^2}{\alpha}\right)^{-1} \quad (10)$$

实际计算结果表明, 方程(10)的光顺效果介于方程(8)与(9)之间.

观察方程(9)与(10), 它们与方程(8)一样, 都是抛物型方程, 只是后者是线性的, 而前者含有非线性项. 因此方程(9)、(10)也具有收缩效应, 因此实际使用中, 可仿照方程(8)的修正方法, 在方程(9)、(10)计算过程中引入修正步, 此处不再赘述.

以上我们给出一些典型的修正方法, 实际使用中, 还可以根据具体的需要对偏微分方程进行修正, 以满足其它约束条件.

4 方程的数值求解

偏微分方程的数值解法有很多, 包括有限差分法、有限元方法、有限体积法等, 而且根据方程类型的不同, 又有独特的解法. 本文选择易于实现的有限差分法, 因篇幅有限, 在此仅给出部分实用的解法.

下面我们使用记号 f_{ijk}^n , 表示在 t_n 时刻, 函数 f 在空间网格点 (x_i, y_j, z_k) 处的值.

接下来, 我们将以方程(8)为代表, 描述求解抛物型方程的典型数值方法. 求解该方程时, 首先要对定义域进行离散, 可采用简单的均匀网格剖分, 得到空间网格. 然后对方程进行离散, 此时有两种选择.

4.1 显式差分格式

对光滑步方程的 $\frac{\partial f}{\partial t}$ 项采用前向差分, Δf 项采用中心差分, 可得

$$\frac{f_{ijk}^{n+1} - f_{ijk}^n}{\Delta t} = K_\lambda \left(\frac{f_{i+1jk}^n - 2f_{ijk}^n + f_{i-1jk}^n + f_{ij+1k}^n - 2f_{ijk}^n + f_{ij-1k}^n}{(\Delta h)^2} + \frac{f_{ij-1k}^n + f_{ijk+1}^n - 2f_{ijk}^n + f_{ijk-1}^n}{(\Delta h)^2} \right)$$

整理后得

$$f_{ijk}^{n+1} = (1 - 6\lambda) f_{ijk}^n + \lambda (f_{i+1jk}^n + f_{i-1jk}^n + f_{ij+1k}^n + f_{ij-1k}^n + f_{ijk+1}^n + f_{ijk-1}^n) \quad (11)$$

$$\lambda = \frac{K_\lambda \Delta t}{(\Delta h)^2} > 0.$$

类似地可得修正步方程的离散格式:

$$f_{ijk}^{n+1} = (1 - 6\mu) f_{ijk}^n + \mu (f_{i+1jk}^n + f_{i-1jk}^n + f_{ij+1k}^n + f_{ij-1k}^n + f_{ijk+1}^n + f_{ijk-1}^n) \quad (12)$$

$$\mu = \frac{K_\mu \Delta t}{(\Delta h)^2} < 0.$$

在第 3.1 节中, 我们提出保持曲面面积的修正方法, 并指出参数 K_λ, K_μ 需要满足一定关系. 依据 K_λ, K_μ 定义, 那么参数 λ, μ 也必须满足一定的条件. 下面我们将基于信号处理的思想, 结合线性代数理论进行分析, 给出参数 λ, μ 需要满足的条件及其选择方法.

设 x, y, z 方向网格的剖分数分别为 D_x, D_y, D_z , 记 $D = D_x + D_y + D_z$.

基于下标映射:

$$P(i, j, k) = (i-1)D_y \cdot D_z + (j-1)D_z + k,$$

其中 $i=1, 2, \dots, D_x, j=1, 2, \dots, D_y, k=1, 2, \dots, D_z$, 则可将 $(f_{ijk}^n)_{i,j,k=1}^{D_x, D_y, D_z}$ 写成向量形式:

$$\mathbf{F}^n = (F_1^n, F_2^n, \dots, F_D^n)^T, \quad F_{P(i,j,k)}^n = f_{ijk}^n,$$

那么执行一次光顺步与修正步,即使用方程(11)与(12),可表述成矩阵形式:

$$\mathbf{F}^{n+1} = (\mathbf{I} - \mu\mathbf{K})(\mathbf{I} - \lambda\mathbf{K})\mathbf{F}^n = h(\mathbf{K})\mathbf{F}^n$$

其中 \mathbf{I} 为单位阵, \mathbf{K} 为 $D \times D$ 的矩阵, 矩阵函数 $h(\mathbf{K})$ 的单变量形式为 $h(x) = (1 - \mu x)(1 - \lambda x)$.

对于矩阵 \mathbf{K} , 令其特征值为 k_d , 对应的单位化特征向量为 $\mathbf{u}_d, d = 1, 2, \dots, D$, 那么可将向量 \mathbf{F}^n 做如下分解:

$$\mathbf{F}^n = \sum_{d=1}^D \xi_d \mathbf{u}_d,$$

而 $\mathbf{K}\mathbf{u}_d = k_d \mathbf{u}_d$, 那么,

$$\mathbf{F}^{n+1} = h(\mathbf{K})\mathbf{F}^n = \sum_{d=1}^D \xi_d h(k_d) \mathbf{u}_d$$

$$\Rightarrow \mathbf{F}^{n+l} = \sum_{d=1}^D \xi_d h(k_d)^l \mathbf{u}_d.$$

若将向量 \mathbf{F} 视为信号, 特征值 k_d 视为频率, 此时函数 $h(x)$ 可视为滤波器的传输函数, 那么曲面的光顺过程可用低通滤波过程来描述, 而使用理想低通滤波器不会发生明显的收缩效应. 因此基于理想低通滤波器的传输函数性质, 我们期望 $h(x)$ 对低频信号(即 k_d 较小)满足 $h(k_d)^l \approx 1$, 而对高频信号(即 k_d 较大)满足 $h(k_d)^l \approx 0$.

幸运的是, 传输函数 $h(x)^l$ 能较好地满足我们的期望, 见图 2. 事实上, $h(x) = 1 - (\lambda + \mu)x + \lambda\mu x^2$, 方程 $h(x) = 1$ 有两个根, 分别为 0, K_{pb} , 其中 K_{pb} 称为 pass-band frequency(参见文献[6]),

$$K_{pb} = \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\mu} > 0 \quad (13)$$

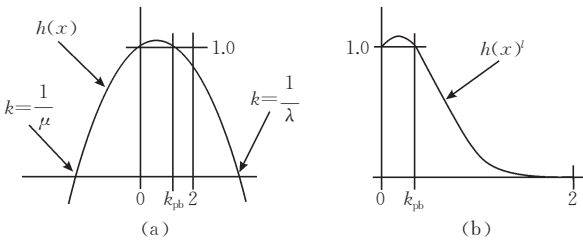


图 2 传输函数图

常取 $K_{pb} = 0.1$. 从图中可以知道, 当 $k \in [0, K_{pb}]$ 时, 有 $h(k)^l \approx 1$; 当 k 取 $K_{pb} \sim 2$ 时, 有 $h(k)^l$ 很快衰减到 0, 因此 $h(k)^l$ 是较理想的低通滤波器. 实际应用中, 我们先选择合适的 K_{pb} , 然后选择参数 λ , 最后依据方程(13)选择参数 μ .

另外, 注意到我们采用了显式差分方法求解偏微分方程, 根据差分格式稳定性理论(参见文献[17]), 此处格式是条件稳定的, 故 λ, μ 还必须满足 $|\lambda| <$

$$\frac{1}{8}, |\mu| < \frac{1}{8}.$$

4.2 隐式差分格式

与显式差分格式不同, 隐式差分格式对光顺步方程的 $\frac{\partial f}{\partial t}$ 项采用后向差分, Δf 项仍采用中心差分, 可得

$$\frac{f_{ijk}^{n+1} - f_{ijk}^n}{\Delta t} = K_\lambda \left(\frac{f_{i+1,jk}^{n+1} - 2f_{ijk}^{n+1} + f_{i-1,jk}^{n+1} + f_{ij,k+1}^{n+1} - 2f_{ijk}^{n+1} + f_{ij,k-1}^{n+1}}{(\Delta h)^2} \right),$$

整理后得

$$(1 - 6\lambda)f_{ijk}^{n+1} + \lambda(f_{i+1,jk}^{n+1} + f_{i-1,jk}^{n+1} + f_{ij,k+1}^{n+1} + f_{ij,k-1}^{n+1} + f_{ij,k+1}^{n+1} + f_{ij,k-1}^{n+1}) = f_{ijk}^n \quad (14)$$

$$\lambda = \frac{K_\lambda \Delta t}{(\Delta h)^2} > 0.$$

类似地可得修正步方程的离散格式:

$$(1 - 6\mu)f_{ijk}^{n+1} + \mu(f_{i+1,jk}^{n+1} + f_{i-1,jk}^{n+1} + f_{ij,k+1}^{n+1} + f_{ij,k-1}^{n+1} + f_{ij,k+1}^{n+1} + f_{ij,k-1}^{n+1}) = f_{ijk}^n \quad (15)$$

$$\mu = \frac{K_\mu \Delta t}{(\Delta h)^2} < 0.$$

此时, f_{ijk}^{n+1} 的值需要通过求解稀疏线性方程组得到, 推荐采用 PBCG 或 GMRES 方法(参见文献[18]). 因为此处的隐式差分格式是绝对稳定的, 仿照第 4.1 节的分析, 选择 λ, μ 时, 只需要满足式(13)条件即可.

4.3 格式分析

采用显式格式, 程序实现简单, 但必须谨慎选择 λ, μ 参数, 需采用迭代方法求指定时刻的 f 值. 而采用隐式格式, 需要解稀疏线性方程组, 但可一次求得指定时刻的 f 值, 因为上述隐式差分格式绝对稳定, Δt 可取较大的值. 另外, 当要求精度较高时, 可先对时间导数项进行半离散, 导出常微分方程, 然后再采用 Ruge-Kutta 方法求解.

对于方程(9), 右边项展开得

$$K \nabla \cdot (g(\|\nabla f\|) \nabla f) = K [g(\|\nabla f\|) \Delta f - 2\alpha^{-1} g^2(\|\nabla f\|) \cdot (f_x^2 f_{xx} + f_y^2 f_{yy} + f_z^2 f_{zz} + 2f_x f_y f_{xy} + 2f_x f_z f_{xz} + 2f_y f_z f_{yz})]$$

上式中含有混合偏导数项, 可以按下面的方式进行离散:

$$f_{xy} = \frac{f_{i+1,j+1,k} - f_{i+1,j-1,k} - f_{i-1,j+1,k} + f_{i-1,j-1,k}}{4(\Delta h)^2},$$

其它项 f_{xz}, f_{yz} 离散方式类似.

对于方程(6), 右边项为 $f_{xxxx} + f_{yyyy} + f_{zzzz} +$

$2f_{.xxyy} + 2f_{.xxxz} + 2f_{.yyzz}$, 可以按下面的方式进行离散:

$$f_{.xxx} = \frac{f_{i+2jk} - 4f_{i+1jk} + 6f_{ijk} - 4f_{i-1jk} + f_{i-2jk}}{(\Delta h)^4},$$

$$f_{.xxyy} = \frac{f_{i+1j+1k} - 2f_{i+1jk} + f_{i+1j-1k} - 2f_{ij+1k} + 4f_{ijk} - 2f_{ij-1k} + f_{i-1j+1k} - 2f_{i-1jk} + f_{i-1j-1k}}{(\Delta h)^4}.$$

$$f_{.xyyy}, f_{.zzzz}, f_{.xxxx}, f_{.yyzz}$$
 离散方式类似.

其它项 $f_{.xyyy}, f_{.zzzz}, f_{.xxxx}, f_{.yyzz}$ 离散方式类似.

方程(9)、方程(10)、方程(6)与方程(8)解法相似, 参数 λ, μ 选择也雷同, 不再赘述.

上面仅给出偏微分方程的一些常规解法, 而事实上偏微分方程的解法很多, 实际应用中, 可根据需要灵活选择.

5 实验结果及其分析

对于第 2 节, 第 3 节中提出的各种模型方程及第 4 节中的数值算法, 我们使用 C++ 语言实现了它们, 程序在 Windows 2000 环境下开发, 然后移植到了 Unix 环境.

5.1 实验结果

下面, 我们以一个来自曲面重构问题的例子, 来演示各种算法的效果并作简要分析. 图 3 为给定的三维采样数据, 它含有 761 个数据点. 通过 RBF 方法(参见文献[13]), 重构出隐式曲面, 见图 4, 从图中不难发现有毛刺、震荡等不光顺的现象.



图 3 原始采样数据, 761 个点

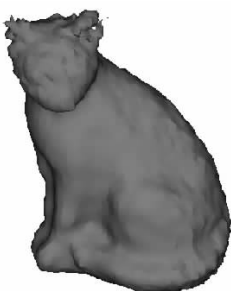


图 4 RBF 重构表示的隐式曲面

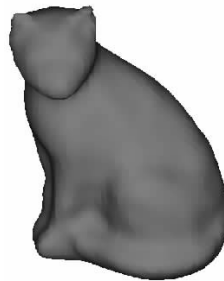


图 5 使用方程(2)经过 5 次迭代的结果

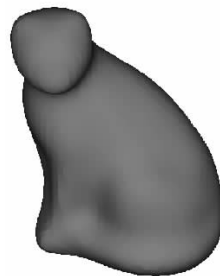


图 6 使用方程(2)经过 20 次迭代的结果

我们采用本文提出的各种模型方程, 对该隐式曲面进行光滑, 结果如下:

(i) 使用方程(2)作为光滑方程, 取 $\lambda=0.0833333$. 光滑结果如图 5, 6 所示, 可以看出曲面变得光滑起来, 但正如我们在第 3.1 节中分析的那样, 有明显的收缩现象发生;

(ii) 使用方程(8)作为光滑方程, 取 $\lambda=0.0833333, \mu=-0.0840336$, 光滑结果如图 7, 8 所示, 可以看到曲面变得光滑起来, 同时收缩现象明显减弱, 而且观察猫的耳朵, 不难发现这部分形状特征被模糊, 与我们在第 3 节与第 4 节中的分析完全吻合;

(iii) 使用方程(6)作为光滑方程, 同时引入修正步, 取 $\lambda=0.00666666, \mu=-0.00667111$, 光滑结果见图 9 和图 10, 可以看出光滑的结果与使用方程(8)类似. 另外, 注意到我们在这儿选择的步长较小, 为了对比结果, 我们增加了迭代次数;

(iv) 使用方程(9)作为光滑方程, 同时引入修正步, 取 $\lambda=0.0833333, \mu=-0.0840336$, 光滑结果见图 11 和图 12, 观察猫的耳朵, 可以看到这部分形状特征保持得较好, 但该模型的光滑效果要逊色些, 这验证了我们在第 3.2 节中的分析;

(v) 使用方程(10)作为光滑方程, 同时引入修正步, 取 $\lambda=0.0833333, \mu=-0.0840336$, 光滑结果见图 13 和图 14, 对比结果, 可以看出方程(10)的效果介于方程(8)与方程(9)之间. 因此, 使用该方程能取得较好的光滑效果, 又能较好地保持形状特征, 综合效果较为令人满意.

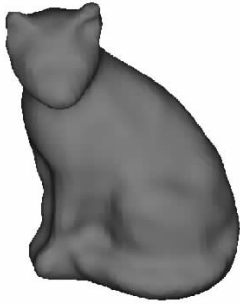


图 7 使用方程(8)经过 20 次迭代的结果

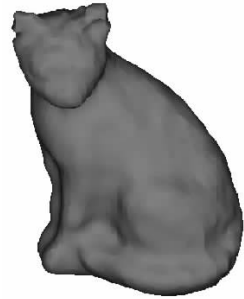


图 12 使用方程(9)经过 40 次迭代的结果

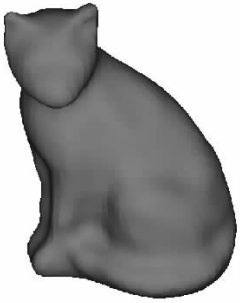


图 8 使用方程(8)经过 40 次迭代的结果

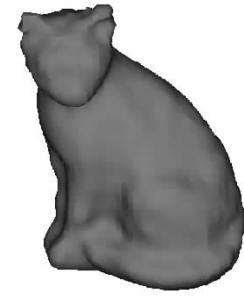


图 13 使用方程(10)经过 20 次迭代的结果

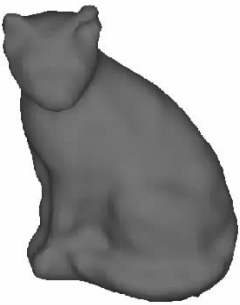


图 9 使用方程(6)经过 200 次迭代的结果

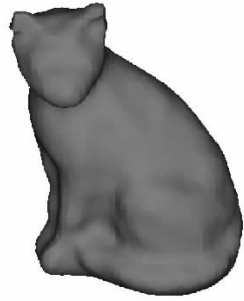


图 14 使用方程(10)经过 40 次迭代的结果

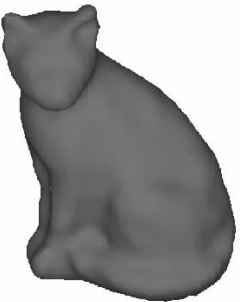


图 10 使用方程(6)经过 400 次迭代的结果

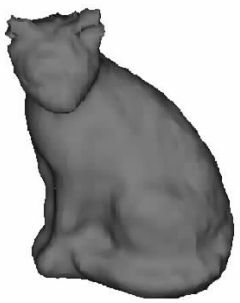


图 11 使用方程(9)经过 20 次迭代的结果

5.2 光顺效果及算法时间复杂度

实际应用中,我们推荐使用带修正步的各种算法,至于选用什么方程作为光顺方程,需视具体的光顺目标,譬如光滑性、保持形状特征、计算复杂度等因素.为便于选择合适的光顺方程,基于第 3,4 节中的分析,我们对典型方程的光顺效果及算法时间复杂度进行了小结,参见表 1.表中的算法复杂度是基于我们采用的显式差分格式,带修正步,其中 N 表示网格剖分形成的网格点总数, I 代表迭代次数.计算时间是基于运行环境 Intel 2.4G 芯片、1GB 内存、Windows 2000 操作系统测量的,数据表明我们提出的方法非常有效.

表 1 光顺效果与算法复杂度

	光滑性	保持形状特征	算法复杂度		计算时间 (单位:s)
			+/-	×/÷	
方程(8)	较好	较差	$14 \times N \times I$	$10 \times N \times I$	0.687(图 7)
方程(6)	较好	较差	$84 \times N \times I$	$56 \times N \times I$	14.690(图 9)
方程(9)	较差	较好	$74 \times N \times I$	$120 \times N \times I$	3.016(图 11)
方程(10)	一般	一般	$26 \times N \times I$	$40 \times N \times I$	1.985(图 13)

6 小 结

本文提出隐式曲面的光顺问题,给出刻画曲面光顺程度的能量模型,构造出光顺过程的偏微分方程,并结合约束条件进行修正,最后给出实用的数值解法.同时,文中对各种能量模型及方程进行了较系统的理论分析,用于指导实际应用.实验结果表明该方法能很好地光顺隐式曲面,而且具有通用、灵活、有效、程序易于实现等优点.

在进一步的研究工作中,我们将尝试寻找合适的几何量,将能量直接定义于曲面 S 上,构造出较易求解的偏微分方程.此外,目前我们采用交互式的方法选择时间 t ,如何通过添加直观的约束条件来自动完成 t 的选择,将是另一个有待研究的问题.

致 谢 感谢计算系博士研究生王奎武提供的无私帮助,数学系博士研究生吴春林的热情参与和协助,以及所有审稿者提出的宝贵意见.

参 考 文 献

- 1 Su B. Q., Liu D. Y.. Computational Geometry. Shanghai: Shanghai Scientific and Technical Publishers, 1981(in Chinese) (苏步青,刘鼎元. 计算几何. 上海:上海科学技术出版社, 1981)
- 2 Hoschek J., Lasser D.. Fundamentals of Computer Aided Geometric Design. Wellesley: A K Peters Press, 1989
- 3 Welch W., Witkin A.. Variational surface modeling. In: Proceedings of ACM SIGGRAPH'92 Conference, Chicago, 1992, 157~166
- 4 Welch W., Witkin A.. Free-form shape design using triangulated surfaces. In: Proceedings of ACM SIGGRAPH'94 Conference, Orlando, 1994, 247~256

- 5 Moreton H., Sequin C.. Functional optimization for fair surface design. In: Proceedings of ACM SIGGRAPH'92 Conference, Chicago, 1992, 167~176
- 6 Taubin G.. A signal processing approach to fair surface design. In: Proceedings of ACM SIGGRAPH'95 Conference, Los Angeles, 1995, 351~358
- 7 Desbrun M., Meyer M. *et al.*. Implicit fairing of irregular meshes using diffusion and curvature flow. In: Proceedings of ACM SIGGRAPH'99 Conference, Los Angeles, 1999, 317~324
- 8 Desbrun M., Meyer M. *et al.*. Anisotropic feature-preserving denoising of height fields and bivariate data. In: Proceedings of Graphics Interface 2000, Montreal, 2000, 145~152
- 9 Taubin G.. Linear anisotropic mesh filters. IBM (Watson T. J. Research Center), Research Technical Report; RC-22213, 2001
- 10 Jones T., Durand T. *et al.*. Non-iterative, feature-preserving mesh smoothing. In: Proceedings of ACM SIGGRAPH'03 Conference, San Diego, 2003, 943~949
- 11 Fleishman S., Drori I. *et al.*. Bilateral mesh denoising. In: Proceedings of ACM SIGGRAPH'03 Conference, San Diego, 2003, 950~953
- 12 Ohtake Y., Belyaev A. *et al.*. Multi-level partition of unity implicit. In: Proceedings of ACM SIGGRAPH'03 Conference, San Diego, 2003, 463~470
- 13 Carr J., Beatson R. *et al.*. Reconstruction and representation of 3D objects with radial basis functions. In: Proceedings of ACM SIGGRAPH'01 Conference, Los Angeles, 2001, 67~76
- 14 Curless B., Levoy M.. A volumetric method for building complex models from range images. In: Proceedings of ACM SIGGRAPH'96 Conference, New Orleans, 1996, 303~312
- 15 Hoppe H., DeRose T. *et al.*. Surface reconstruction from unorganized points. In: Proceedings of ACM SIGGRAPH'92 Conference, Chicago, 1992, 71~78
- 16 Castleman K.. Digital Image Processing. New Jersey: Prentice-Hall International Press, 1996
- 17 Li L. K., Yu C. H. *et al.*. Numerical Solution of Differential Equations. Shanghai: Fudan University Press, 1999(in Chinese) (李立康, 於崇华等. 微分方程数值解法. 上海:复旦大学出版社, 1999)
- 18 Golub G., Van C.. Matrix Computations. Baltimore: John Hopkins University Press, 1996



TONG Wei-Hua, born in 1978, Ph. D. candidate. His research interests include computer graphics, computer aided geometry design.

CHEN Fa-Lai, born in 1966, professor, Ph. D. supervisor. His research interests include computer graphics, computer aided geometry design.

FENG Yu-Yu, born in 1940, professor, Ph. D. supervisor. His research interests include multivariable approximation theory, computer aided geometry design.

Background

In computer graphics, CAD/CAM, CAGD, etc, the implicit curve and surface play more and more role in shape representation. Our project aim is to design, control, convert, edit, fair et al, shape with this implicit form. In the past decade, our research group has archived lots of good results

including the implicitization method of using moving curves and surfaces, the mu-basis theory, blending surfaces with piecewise algebraic surface, et al. In this article, we present a method to fair implicit surface via partial differential equation.