系 统 科 学 与 数 学
J. Sys. Sci. & Math. Scis.
26(5) (2006, 10), 541–552

半正定两相驱动问题的多步有限体积方法及其理论分析*

杨 旻

(烟台大学数学与信息科学学院， 烟台 264005)

袁 益 让

(山东大学数学与系统科学学院， 济南 250100)

摘要 考虑多维半正定两相驱动方程的初边值问题，在非结构网格上构造多步的迎风有限体积格式，利用微分方程先验估计理论证明了格式的离散模形式的误差估计为 $O(\Delta t^2+h)$，其中 Δt 和 h 分别表示时空步长. 数值算例进一步验证了格式的有效性.

关键词 半正定问题，非结构网格，多步法，迎风有限体积格式，误差估计.

MR(2000) 主题分类号 65N30, 65N15

1 引 言

对于多孔介质中不可压缩两相渗流驱动问题，其数学模型是如下偏微分方程组

$$\nabla\cdot u=q=\overline{q}-\underline{q},\quad (x,t)\in\Omega\times(0,T], \tag{1.1a}$$

$$u=-a(x,c)\nabla p,\quad (x,t)\in\Omega\times(0,T], \tag{1.1b}$$

$$\phi\frac{\partial c}{\partial t}+\nabla\cdot[cu-D\nabla c]=\overline{q}c_I-\underline{q}c,\quad (x,t)\in\Omega\times(0,T], \tag{1.2}$$

其中 $\Omega\in R^d(d=2,3)$ 有界，并且当 $d=2$ 时， Ω 为凸多边形区域，当 $d=3$ 时， Ω 为凸多面体区域. $u(x,t)$ 表示流体的 Darcy 速度， $p(x,t)$ 表示压力， $c(x,t)\in[0,1]$ 表示某一可混溶物的饱和度， $a(x,c)$ 与渗透率和粘性系数有关， $\phi(x)$ 是介质的孔隙度， $D(x)$ 表示扩散系数，函数 $\overline{q}(x,t)\geq 0$, $\underline{q}(x,t)\geq 0$ 分别表示源项和井项，满足相容条件 $\int_\Omega q(x,t)\mathrm{d}x=0$, $c_I(x,t)$ 是注入液体的饱和度.

以 η 表示 Ω 边界处的单位外法向量，$\partial\Omega$ 表示其边界，则初边值条件由 (1.3)–(1.5) 给出

$$c(x,0)=c_0(x),\quad x\in\Omega, \tag{1.3}$$

$$u\cdot\eta=g(x,t),\quad (x,t)\in\partial\Omega\times(0,T]. \tag{1.4}$$

---

* 国家重点基础研究专项经费 (1999032803)，国家自然科学基金 (10372052,10271066)，教育部博士点基金 (20030422047) 资助项目.

收稿日期：2004-04-07, 收到修改稿日期：2005-06-09.

令 $\partial\Omega=\Gamma_I\cup\Gamma_O$, 其中流入边界 $\Gamma_I=\{x\in\partial\Omega:g<0\}$, 流出边界 $\Gamma_O=\{x\in\partial\Omega:g\geq 0\}$, 于是关于饱和度 c 的边界条件为

$$(cu-D\nabla c)\cdot\eta=c_Ig,\quad x\in\Gamma_I, \tag{1.5a}$$

$$D\nabla c\cdot\eta=0,\quad x\in\Gamma_O. \tag{1.5b}$$

对于上述模型问题，一般均假定饱和度方程是正定的，即 $0<D_*\leq D$, 此时可以采用不同的有限元或差分方法对上述问题进行求解 [1–4], 然而在实际应用中饱和度方程通常仅为半正定，这给问题的理论分析及实际计算带来了一定困难. 在周期性的假定下， Dawson, 袁益让分别提出特征线有限元方法 [5,6] 以及特征线有限差分方法 [7] 处理其中的半正定饱和度方程，但是有限元方法不能保持局部质量守恒，没有很好的反映出原问题的物理特性，而有限差分方法虽然能够保持质量守恒，但要求剖分比较规则，故逼近曲边域的几何误差较大，并且采用特征线方法需要关于空间进行插值计算，在实际计算中是相当复杂的.

有限体积方法 [8–12] 是近年来在工程计算领域中得到广泛应用的一类数值离散方法，它兼有有限元和差分方法的特点. 一方面具有剖分灵活，几何误差小的优点，另一方面具有非常好的局部守恒性，即能保证从一个离散单元到另一个离散单元的数值流量是守恒的，适宜处理流体力学问题. 对于具有齐次 Neuman 边值条件的正定不可压缩两相渗流问题， Michel 基于无结构网格提出了一类迎风单步有限体积格式 [12], 利用泛函分析工具，证明格式是收敛的，但未能给出具体的收敛阶. 本文对于半正定两相驱动问题研究其有限体积方法，我们考虑较为复杂的边值条件，包括流入和流出边界两部分，对该问题，在非结构网格上构造多步的迎风有限体积格式，利用一些数值分析技巧，给出离散模形式的具体误差估计.

首先对问题 (1.1)–(1.5) 的系数和精确解作必要的假定. 设压力 p 满足

$$\int_\Omega p(x,t)\mathrm{d}x=0,\quad t\in(0,T]. \tag{1.6}$$

存在正常数 $a_*,a^*,\phi_*,\phi^*,D^*,q^*,\underline{q}^*$ 使

$$0<a_*\leq a(x,c)\leq a^*,\quad 0<\phi_*\leq\phi(x)\leq\phi^*,\quad 0\leq D(x)\leq D^*,\quad |q|\leq q^*,\quad \underline{q}\leq\underline{q}^*, \tag{1.7}$$

并且 $a(x,c)$ 关于 x,c 为 Lipschitz 连续， Lipschitz 常数为 b^*.

本文中记号 M 和 ε 分别表示普通正常数和普通小正数，在不同的地方具有不同的含义.

2 多步有限体积格式

定义 2.1 T_h 是由 Ω 上的一组开凸子集 (控制体积) 所构成的网格剖分， E 是 R^d 上的具有严格正测度的超平面，并构成了 $\overline{\Omega}$ 的一组子集，即 $d=2$ 时 E 是边的集合， $d=3$ 时 E 是面的集合，并且控制体积内部的点所构成集合 P 满足如下性质:

(i) 所有控制体积的闭包是 $\overline{\Omega}$.

(ii) 任给剖分单元 $K,L\in T_h$, $K\neq L$, $\overline{K}\cap\overline{L}=0$ 或 $\overline{K}\cap\overline{L}=\overline{\sigma}$, $\sigma\in E$. 记 $\sigma=K|L$, 其中 $K|L$ 是单元 K 和 L 的公共边界.

(iii) 任给 $K\in T_h$, 存在 $E_K\subseteq E$, 使 K 的边界 $\partial K=\bigcup\limits_{\sigma\in E_K}\bar{\sigma}$, 并且 $E=\bigcup\limits_{K\in T_h}E_K$. 记单元 K 的所有相邻单元所组成的集合为 $N(K)$, 即 $N(K)=\left\{L\in T_h:K|L\in E_K\right\}$.

(iv)　离散点集 $P=\{x_K\}_{K\in T_h}$ 满足：$x_K\in K$, 若 $\sigma=K|L$, 直线 $\overline{x_Kx_L}$ 垂直 σ.

记网格步长 $h=\sup\{\mathrm{diam}(K),K\in T_h\}$. 以 $m(K)$ 表示单元 K 的测度，当 $L\in N(K)$ 时，令 $m(K|L)$ 表示边界 $K|L$ 的测度，$d_{K|L}$ 表示离散点 x_K 与 x_L 之间的距离，$d_{K,K|L}$ 表示 x_K 与单元边界 $K|L$ 之间的距离，$d_{K,\partial K\cap\partial\Omega}$ 表示 x_K 与边界 $\partial K\cap\partial\Omega$ 之间的距离.

注 1　满足上述定义的非结构网格称为容许网格，其剖分可以由有多种不同形状的单元组成，常用的矩形网格 [8], 三角形网格 [9],Voronoi 网格 [10] 等都属于其中.

注 2　本文考虑一类正则性网格，即存在正常数 ζ, 使 $d_{K,K|L},d_{K,\partial K\cap\partial\Omega}\ge\zeta h$.

取时间步长为 $\Delta t,t_n=n\Delta t,0\le n\le N$ 且 $t_N=T$. 记 $\varphi^n=\varphi(t_n)$.

$\forall K\in T_h$, 以 η_K 表示单元边界 ∂K 的单位外法向量，由 (1.1a),(1.1b) 及 Green 公式得

$$\int_{\partial K/\partial\Omega}u\cdot\eta_K\mathrm{d}\gamma=-\int_{\partial K/\partial\Omega}a(c)\nabla p\cdot\eta_K\mathrm{d}\gamma=\int_K q\mathrm{d}x-\int_{\partial K\cap\partial\Omega}g\mathrm{d}\gamma. \tag{2.1}$$

以 P_K^n,C_K^n 分别表示 t_n 时刻在单元 K 上压力和饱和度的估计值，$U_{K,L}^n$ 表示 t_n 时刻在相邻单元 K 和 L 交界的近似 Darcy 速度，则关于方程 (1.1a),(1.1b) 的有限体积格式为

$$\sum_{L\in N(K)}m(K|L)U_{K,L}^n=\int_K q^n\mathrm{d}x-\int_{\partial K\cap\partial\Omega}g^n\mathrm{d}\gamma,\quad K\in T_h. \tag{2.2a}$$

$$U_{K,L}^n=-a(C)_{K|L}^n\frac{P_L^n-P_K^n}{d_{K|L}},\quad K\in T_h, \tag{2.2b}$$

其中

$$a(C)_{K|L}^n=\frac{a(x_K,C_K^n)d_{L,K|L}+a(x_L,C_L^n)d_{K,K|L}}{d_{K|L}}.$$

根据 (1.6), 令 $\sum\limits_{K\in T_h}m(K)P_K^n=0$.

由 (1.2) 以及 Green 公式得

$$\begin{aligned}&\int_K\phi\frac{\partial c}{\partial t}\mathrm{d}x+\int_{\partial K/\partial\Omega}(cu-D\nabla c)\cdot\eta_K\mathrm{d}\gamma+\int_{\partial K\cap\partial\Gamma_O}cg\mathrm{d}\gamma\\&=-\int_{\partial K\cap\partial\Gamma_I}c_Ig\mathrm{d}\gamma+\int_K(\overline{q}c_I-\underline{q}c)\mathrm{d}x.\end{aligned} \tag{2.3}$$

令 $\phi_K=\frac{1}{m(K)}\int_K\phi\mathrm{d}x$, 当 $L\in N(K)$ 时，记 $D_{K|L}=\frac{1}{m(K|L)}\int_{K|L}D(x)\mathrm{d}\gamma$, 以 $C_{K|L}^{n+1}$ 表示离散未知量 $C^{n+1}=\{C_K^{n+1}\}$ 在界面 $K|L$ 处的迎风值,

$$C_{K|L}^{n+1}=\begin{cases}C_K^{n+1},\ IU_{K,L}^{n+1}\ge 0,\\C_L^{n+1},\ IU_{K,L}^{n+1}<0,\end{cases} \tag{2.4}$$

其中 I 为关于时间的插值算子，满足 $IU_{K|L}^{n+1}=2U_{K|L}^n-U_{K|L}^{n-1},n\ge1$; $IU_{K|L}^{n+1}=U_{K|L}^0,n=0$. 记

$$F_{K,L}^{n+1}=-\frac{m(K|L)}{d_{K|L}}(C_L^{n+1}-C_K^{n+1}). \tag{2.5}$$

显然由上述定义可知，当 $L\in N(K)$ 时,

$$U_{K,L}^n=-U_{L,K}^n,\quad F_{K,L}^n=-F_{L,K}^n,\quad C_{K|L}^n=C_{L|K}^n,\quad D_{K|L}=D_{L|K}. \tag{2.6}$$

令 $\delta\varphi^n=\varphi^n-\varphi^{n-1},\partial_t\varphi^n=\frac{\delta\varphi^n}{\Delta t}$. 则关于饱和度方程 (1.2) 的有限体积格式为

$$\begin{aligned}&m(K)\phi_K\partial_tC_K^{n+1}+\frac{2}{3}\sum_{L\in N(K)}\Big(m(K|L)C_{K|L}^{n+1}IU_{K,L}^{n+1}+D_{K|L}F_{K,L}^{n+1}\Big)\\&+\frac{2}{3}C_K^{n+1}\int_{\partial K\cap\partial\Gamma_O}g^{n+1}\mathrm{d}\gamma\\=&\frac{1}{3}m(K)\phi_K\partial_tC_K^n-\frac{2}{3}\int_{\partial K\cap\partial\Gamma_I}c_I^{n+1}g^{n+1}\mathrm{d}\gamma\\&+\frac{2}{3}\int_K\big(\overline{q}^{n+1}c_I^{n+1}-\underline{q}^{n+1}IC_K^{n+1}\big)\mathrm{d}x,\quad K\in T_h.\end{aligned}\tag{2.7}$$

为了获得完整的计算程序，必须给定初始值 $\{C_K^0,C_K^1\}$, 令

$$C_K^0=c_0(x_K),\quad K\in T_h;\tag{2.8a}$$

$$\begin{aligned}&m(K)\phi_K\partial_tC_K^1+\sum_{L\in N(K)}\Big(m(K|L)C_{K|L}^1U_{K,L}^0+D_{K|L}F_{K,L}^1\Big)+C_K^1\int_{\partial K\cap\partial\Gamma_O}g^1\mathrm{d}\gamma\\=&-\int_{\partial K\cap\partial\Gamma_I}c_I^1g^1\mathrm{d}\gamma+\int_K\big(\overline{q}^1c_I^1-\underline{q}^1C_K^0\big)\mathrm{d}x,\quad K\in T_h.\end{aligned}\tag{2.8b}$$

方程组 (2.2),(2.7) 和 (2.8) 的计算步骤是: 首先由 (2.8a),(2.2a),(2.2b) 计算 $\{C_K^0,P_K^0,U_{K,L}^0\}$, 接下来将结果代入 (2.8b), 求得 $\{C_K^1\}$; 若 $\{C_K^{n-1},C_K^n\}$ 已知，则由 (2.2a),(2.2b) 依次求出 $\{P_K^{n-1},P_K^n\},\{U_{K,L}^{n-1},U_{K,L}^n\}$, 代入 (2.7) 求出 $\{C_K^{n+1}\}$. 按上述步骤可求得所有离散解.

3 误差估计

引理 3.1[13] 存在与 c 的范数有关的常数 M, 使

$$\left\|\frac{2}{3}\frac{\partial c^{n+1}}{\partial t}-\partial_tc^{n+1}+\frac{1}{3}\partial_tc^n\right\|_0\le M\Delta t^2.\tag{3.1}$$

引理 3.2 设 R 是不大于 N 的任一正整数，则

$$\Delta t\sum_{n=1}^{R-1}(\partial_t\vartheta_K^n)\vartheta_K^{n+1}\ \le\frac{3}{2}\sum_{n=1}^{R-1}(\delta\vartheta_K^{n+1})^2+(\vartheta_K^R)^2+M\big[(\vartheta_K^1)^2+(\vartheta_K^0)^2\big].\tag{3.2}$$

证

$$\begin{aligned}\Delta t\sum_{n=1}^{R-1}(\partial_t\vartheta_K^n)\vartheta_K^{n+1}&=\sum_{n=1}^{R-1}(\delta\vartheta_K^n)\vartheta_K^n+\sum_{n=1}^{R-1}(\delta\vartheta_K^n)(\delta\vartheta_K^{n+1})\\&=\frac{1}{2}\left[\sum_{n=1}^{R-1}(\delta\vartheta_K^n)^2+(\vartheta_K^{R-1})^2-(\vartheta_K^0)^2\right]+\sum_{n=1}^{R-1}(\delta\vartheta_K^n)(\delta\vartheta_K^{n+1})\\&\le\sum_{n=1}^{R-1}(\delta\vartheta_K^n)^2+(\delta\vartheta_K^R)^2+(\vartheta_K^R)^2-\frac{1}{2}(\vartheta_K^0)^2+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{R-1}(\delta\vartheta_K^{n+1})^2\\&=\frac{3}{2}\sum_{n=1}^{R-1}(\delta\vartheta_K^{n+1})^2+(\delta\vartheta_K^1)^2+(\vartheta_K^R)^2-\frac{1}{2}(\vartheta_K^0)^2\\&\le\frac{3}{2}\sum_{n=1}^{R-1}(\delta\vartheta_K^{n+1})^2+(\vartheta_K^R)^2+M\big[(\vartheta_K^1)^2+(\vartheta_K^0)^2\big].\end{aligned}$$

令 $\pi^n(x)=\pi_K^n=P_K^n-p^n(x_K),\vartheta^n(x)=\vartheta_K^n=C_K^n-c^n(x_K),x\in K,K\in T_h$. 以 $\eta_{K|L}$ 表示单元 K 在边界 $K|L$ 的单位外法向量，由 (2.2a), (2.2b) 和 (2.1) 得

$$
\begin{aligned}
&-\sum_{L\in N(K)}m(K|L)a(C)_{K|L}^n\frac{\pi_L^n-\pi_K^n}{d_{K|L}}\\
=&-\sum_{L\in N(K)}\int_{K|L}\left(a(c^n)-\frac{a(x_K,c^n(x_K))d_{L,K|L}+a(x_L,c^n(x_L))d_{K,K|L}}{d_{K|L}}\right)\nabla p^n\cdot\eta_{K|L}\mathrm{d}\gamma\\
&+\sum_{L\in N(K)}\int_{K|L}\left(a(C)_{K|L}^n-\frac{a(x_K,c^n(x_K))d_{L,K|L}+a(x_L,c^n(x_L))d_{K,K|L}}{d_{K|L}}\right)\nabla p^n\cdot\eta_{K|L}\mathrm{d}\gamma\\
&+\sum_{L\in N(K)}a(C)_{K|L}^n\int_{K|L}\left(-\nabla p^n\cdot\eta_{K|L}+\frac{p^n(x_L)-p^n(x_K)}{d_{K|L}}\right)\mathrm{d}\gamma\\
=&\sum_{i=1}^3\alpha_i.
\end{aligned}\tag{3.3}
$$

对误差方程 (3.3) 乘以 π_K^n 后，关于 $K\in T_h$ 求和，并应用分部求和公式可得

$$
\sum_{K\in T_h}\frac{1}{2}\sum_{L\in N(K)}a(C)_{K|L}^n\frac{m(K|L)}{d_{K|L}}(\pi_K^n-\pi_L^n)^2=\sum_{i=1}^3\sum_{K\in T_h}\alpha_i\pi_K^n.\tag{3.4}
$$

由注 2 知 $\sum\limits_{K\in T_h}\sum\limits_{L\in N(K)}m(K|L)d_{K|L}\le M\sum\limits_{K\in T_h}m(K)$. 而 $\sum\limits_{K\in T_h}\sum\limits_{L\in N(K)}m(K|L)d_{K|L}\le Mm(\Omega)$, 于是关于边界重新求和后，利用 $a(x,c)$ 的 Lipschitz 连续性以及 Young 不等式得

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^3\sum_{K\in T_h}\alpha_i\pi_K^n\le{}& M\{b^*,\|c\|_{L^\infty(W^{1,\infty})},\|p\|_{L^\infty(W^{1,\infty})}\}h^2+M\{b^*,\|p\|_{L^\infty(W^{1,\infty})}\}\|\vartheta^n\|_0^2\\
&+M\{a^*,\|p\|_{L^\infty(W^{2,\infty})}\}h^2+\varepsilon\sum_{K\in T_h}\sum_{L\in N(K)}\frac{m(K|L)}{d_{K|L}}(\pi_K^n-\pi_L^n)^2.
\end{aligned}\tag{3.5}
$$

由 (3.4) 和 (3.5), 注意到 $a(C)_{K|L}^n\ge a_*>0$, 取适当小的 ε 可得

$$
\sum_{K\in T_h}\sum_{L\in N(K)}\frac{m(K|L)}{d_{K|L}}(\pi_K^n-\pi_L^n)^2\le M(h^2+\|\vartheta^n\|_0^2).\tag{3.6}
$$

下面考虑饱和度方程．记 $\overline{F}_{K,L}^n=-\frac{m(K|L)}{d_{K|L}}(c^n(x_L)-c^n(x_K))$. 由 (2.3) 和 (2.7) 得

$$
\begin{aligned}
&m(K)\phi_K\partial_t\vartheta_K^{n+1}+\frac{2}{3}\sum_{L\in N(K)}\left(m(K|L)\vartheta_{K|L}^{n+1}IU_{K,L}^{n+1}+D_{K|L}(F_{K,L}^{n+1}-\overline{F}_{K,L}^{n+1})\right)\\
&+\frac{2}{3}\vartheta_K^{n+1}\int_{\partial K\cap\partial\Gamma_O}g^{n+1}\mathrm{d}\gamma\\
=&\frac{1}{3}m(K)\phi_K\partial_t\vartheta_K^n+\int_K\phi\partial_t\left[c^{n+1}-c^{n+1}(x_K)\right]\mathrm{d}x\\
&-\frac{1}{3}\int_K\phi\partial_t\left[c^n-c^n(x_K)\right]\mathrm{d}x+\int_K\phi\left(\frac{2}{3}\frac{\partial c^{n+1}}{\partial t}-\partial_t c^{n+1}+\frac{1}{3}\partial_t c^n\right)\mathrm{d}x\\
&-\frac{2}{3}\sum_{L\in N(K)}\int_{K|L}D(x)\left[\nabla c^{n+1}\cdot\eta_{K|L}+\frac{\overline{F}_{K,L}^{n+1}}{m(K|L)}\right]\mathrm{d}\gamma
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+\frac{2}{3}\sum_{L\in N(K)} IU_{K,L}^{n+1}\int_{K|L}\left(c^{n+1}-c_{K|L}^{n+1}\right)\mathrm{d}\gamma \\
&+\frac{2}{3}\sum_{L\in N(K)}\int_{K|L}\left(u^{n+1}\cdot\eta_{K|L}-IU_{K,L}^{n+1}\right)c^{n+1}\mathrm{d}\gamma \\
&+\frac{2}{3}\int_{\partial K\cap\partial\Gamma_O}[c^{n+1}-c^{n+1}(x_K)]g^{n+1}\mathrm{d}\gamma\ +\frac{2}{3}\int_K \underline{q}^{n+1}(c^{n+1}-IC_K^{n+1})\mathrm{d}x \\
=&\sum_{i=1}^{9}\beta_i,
\end{aligned}\tag{3.7}
$$

其中 $\vartheta_{K|L}^{n+1}=C_{K|L}^{n+1}-c_{K|L}^{n+1}$, 而 $c_{K|L}^{n+1}=c^{n+1}(x_K)$, $IU_{K,L}^{n+1}\geq 0$, $c_{K|L}^{n+1}=c^{n+1}(x_L)$, $IU_{K,L}^{n+1}<0$.

将 (3.7) 两端乘以 $\Delta t\vartheta_K^{n+1}$ 后关于 $K\in T_h, n\in[1,R-1], R\leq N$ 求和. 由引理 3.2 知

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{R-1}\sum_{K\in T_h}\beta_1\Delta t\vartheta_K^{n+1}\leq{}&\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{R-1}\sum_{K\in T_h}m(K)\phi_K(\delta\vartheta_K^{n+1})^2 \\
&+\frac{1}{3}\sum_{K\in T_h}m(K)\phi_K(\vartheta_K^R)^2+M\phi^*(\|\vartheta^1\|_0^2+\|\vartheta^0\|_0^2).
\end{aligned}\tag{3.8}
$$

利用引理 3.1 以及 Young 不等式得

$$
\sum_{n=1}^{R-1}\sum_{K\in T_h}(\beta_2+\beta_3+\beta_4)\Delta t\vartheta_K^{n+1}\leq M\{\|c\|_{H^1(W^{1,\infty})}\}\left(h^2+\Delta t^4+\Delta t\sum_{n=1}^{R-1}\|\vartheta^{n+1}\|_0^2\right).\tag{3.9}
$$

由于

$$
\left|\nabla c^{n+1}\cdot\eta_{K|L}+\frac{\overline{F}_{K,L}^{n+1}}{m(K|L)}\right|\leq M\|c\|_{L^\infty(W^{2,\infty})}h,
$$

故

$$
\begin{aligned}
&\left|\sum_{n=1}^{R-1}\sum_{K\in T_h}\beta_5\Delta t\vartheta_K^{n+1}\right| \\
=&\left|\frac{\Delta t}{3}\sum_{n=1}^{R-1}\sum_{K\in T_h}\sum_{L\in N(K)}\int_{K|L}D(x)\left[\nabla c^{n+1}\cdot\eta_{K|L}+\frac{\overline{F}_{K,\sigma}^{n+1}}{m(K|L)}\right]\mathrm{d}\gamma(\vartheta_K^{n+1}-\vartheta_L^{n+1})\right| \\
\leq{}& MD^*h^2+\varepsilon\Delta t\sum_{n=1}^{R-1}\sum_{K\in T_h}\sum_{L\in N(K)}D_{K|L}\frac{m(K|L)}{d_{K|L}}(\vartheta_K^{n+1}-\vartheta_L^{n+1})^2.
\end{aligned}\tag{3.10}
$$

令 $\Omega_{K,K|L}=\{tx_K+(1-t)x, x\in K|L, t\in[0,1]\}$, 记 $\Omega_{K|L}=\Omega_{K,K|L}\cup\Omega_{L,K|L}$. 由迹定理得

$$
\begin{aligned}
&\sum_{K\in T_h}\sum_{L\in N(K)}\int_{K|L}\left(c^{n+1}-c_{K|L}^{n+1}\right)^2\mathrm{d}\gamma \\
\leq{}& M\sum_{K\in T_h}\sum_{L\in N(K)}\|c^{n+1}-c_{K|L}^{n+1}\|_{L^2(\Omega_{K|L})}\|c^{n+1}-c_{K|L}^{n+1}\|_{H^1(\Omega_{K|L})} \\
\leq{}& M\|c\|_{L^\infty(W^{2,\infty})}^2h^2\sum_{K\in T_h}\sum_{L\in N(K)}m(\Omega_{K|L}) \\
\leq{}& Mh^2.
\end{aligned}
$$

利用这个不等式，(2.2b), (3.6) 以及注 2 得

$$
\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^{R-1}\sum_{K\in T_h}\beta_6\Delta t\vartheta_K^{n+1}\\
=\;&\frac{\Delta t}{3}\sum_{n=1}^{R-1}\sum_{K\in T_h}\sum_{L\in N(K)}\int_{K|L}IU_{K,L}^{n+1}(c^{n+1}-c_{K|L}^{n+1})(\vartheta_K^{n+1}-\vartheta_L^{n+1})\mathrm{d}\gamma\\
\leq\;&Ma^*\|c\|^2_{L^\infty(W^{1,\infty})}\Delta t\sum_{n=0}^{R}\sum_{K\in T_h}\sum_{L\in N(K)}m(K|L)\left|\frac{\pi_L^n-\pi_K^n}{d_{K|L}}\right|h^2+Ma^*\|p\|_{L^\infty(W^{1,\infty})}h^2\\
&+\varepsilon\Delta t\sum_{n=1}^{R-1}\sum_{K\in T_h}\sum_{L\in N(K)}m(K|L)|IU_{K,L}^{n+1}|(\vartheta_K^{n+1}-\vartheta_L^{n+1})^2.
\end{aligned}
$$

而由 (3.6) 以及注 2 网格的正则性可知

$$
\begin{aligned}
&\sum_{K\in T_h}\sum_{L\in N(K)}m(K|L)\left|\frac{\pi_L^n-\pi_K^n}{d_{K|L}}\right|h^2\\
\leq\;&\frac{1}{2}\sum_{K\in T_h}\sum_{L\in N(K)}\frac{m(K|L)}{d_{K|L}}(\pi_L^n-\pi_K^n)^2+\frac{1}{2}\sum_{K\in T_h}\sum_{L\in N(K)}\frac{m(K|L)}{d_{K|L}}h^4\\
\leq\;&M(h^2+\|\vartheta^n\|_0^2)+\frac{M}{\zeta^2}\sum_{K\in T_h}\sum_{L\in N(K)}m(K|L)d_{K,K|L}h^2\\
\leq\;&M(h^2+\|\vartheta^n\|_0^2)+M\{\zeta,m(\Omega)\}h^2.
\end{aligned}
$$

由上述两个不等式可得

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{R-1}\sum_{K\in T_h}\beta_6\Delta t\vartheta_K^{n+1}\leq\;&M\left(h^2+\Delta t\sum_{n=0}^{R}\|\vartheta^n\|_0^2\right)\\
&+\varepsilon\Delta t\sum_{n=1}^{R-1}\sum_{K\in T_h}\sum_{L\in N(K)}m(K|L)|IU_{K,L}^{n+1}|(\vartheta_K^{n+1}-\vartheta_L^{n+1})^2.
\end{aligned}\tag{3.11}
$$

接下来估计含 β_7 的项. 注意到 (2.1) 和 (2.2a) 可得

$$
\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^{R-1}\sum_{K\in T_h}\beta_7\Delta t\vartheta_K^{n+1}\\
=\;&\frac{2\Delta t}{3}\sum_{n=1}^{R-1}\sum_{K\in T_h}\sum_{L\in N(K)}\int_{K|L}(u^{n+1}-Iu^{n+1})\cdot\eta_{K|L}c^{n+1}\mathrm{d}\gamma\vartheta_K^{n+1}\\
&+\frac{2\Delta t}{3}\sum_{n=1}^{R-1}\sum_{K\in T_h}\sum_{L\in N(K)}m(K|L)I\left[a(C)_{K|L}^{n+1}\frac{\pi_L^{n+1}-\pi_K^{n+1}}{d_{K|L}}\right](c^{n+1}-c^{n+1}(x_K))\mathrm{d}\gamma\vartheta_K^{n+1}\\
&+\frac{2\Delta t}{3}\sum_{n=1}^{R-1}\sum_{K\in T_h}\sum_{L\in N(K)}\int_{K|L}I\left[u^{n+1}\cdot\eta_{K|L}+a(C)_{K|L}^{n+1}\frac{p^{n+1}(x_L)-p^{n+1}(x_K)}{d_{K|L}}\right]\\
&\qquad\cdot(c^{n+1}-c^{n+1}(x_K))\mathrm{d}\gamma\vartheta_K^{n+1}\\
=\;&\beta_{71}+\beta_{72}+\beta_{73}.
\end{aligned}
$$

依次估计 $\beta_{71},\beta_{72},\beta_{73}$. 由 Holder 不等式以及迹定理可知

$$\beta_{71}\le M\{\|u\|_{W^{2,\infty}(W^{1,\infty})},\|c\|_{L^\infty(W^{1,\infty})},m(\Omega)\}\left(t^4+\Delta t\sum_{n=1}^{R-1}\|\vartheta^{n+1}\|_0^2\right).$$

由注 2 可知 $h\le\frac{d_{K|L}}{2\zeta}$, $\sum\limits_{L\in N(K)}m(K|L)d_{K|L}\le Mm(K)$. 利用 (3.6) 可知

$$\begin{aligned}\beta_{72}\le{}& M\{a^*,\|c\|_{L^\infty(W^{1,\infty})}\}\Delta t\sum_{n=1}^{R-1}\sum_{K\in T_h}\sum_{L\in N(K)}\frac{m(K|L)}{d_{K|L}}[I(\pi_K^{n+1}-\pi_L^{n+1})]^2\\&+M\Delta t\sum_{n=1}^{R-1}\sum_{K\in T_h}\sum_{L\in N(K)}\frac{m(K|L)}{d_{K|L}}(h\vartheta_K^{n+1})^2\\\le{}& M\left(h^2+\Delta t\sum_{n=0}^{R-1}\|\vartheta^n\|_0^2+\Delta t\sum_{n=1}^{R-1}\|\vartheta^{n+1}\|_0^2\right).\end{aligned}$$

由 $a(x,c)$ 的 Lipschitz 连续性以及 Young 不等式，类似上式有

$$\beta_{73}\le M\{a^*,b^*,m(\Omega),\zeta,\|c\|_{L^\infty(W^{1,\infty})},\|p\|_{L^\infty(W^{2,\infty})}\}\left(h^2+\Delta t\sum_{n=0}^{R-1}\|\vartheta^n\|_0^2+\Delta t\sum_{n=1}^{R-1}\|\vartheta^{n+1}\|_0^2\right).$$

于是

$$\sum_{n=1}^{R-1}\sum_{K\in T_h}\beta_7\Delta t\vartheta_K^{n+1}\le M\left(h^2+\Delta t\sum_{n=0}^{R-1}\|\vartheta^n\|_0^2+\Delta t\sum_{n=1}^{R-1}\|\vartheta^{n+1}\|_0^2\right).\tag{3.12}$$

注意到 $x\in\Gamma_O$ 时， $g\ge0$, 应用 Young 不等式，迹定理可得

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{R-1}\sum_{K\in T_h}\beta_8\Delta t\vartheta_K^{n+1}\le{}& M\{\|u\|_{L^\infty(L^\infty(\partial\Omega))},\|c\|_{L^\infty(W^{2,\infty})}\}h^2\\&+\varepsilon\Delta t\sum_{n=1}^{R-1}\sum_{K\in T_h}\int_{\partial K\cap\Gamma_O}g^{n+1}\mathrm{d}\gamma(\vartheta_K^{n+1})^2,\end{aligned}\tag{3.13}$$

$$\sum_{n=1}^{R-1}\sum_{K\in T_h}\beta_9\Delta t\vartheta_K^{n+1}\le M\underline{q}^*\left(\|c\|_{H^2(L^2)}^2\Delta t^4+\|c\|_{L^\infty(W^{1,\infty})}^2h^2+\Delta t\sum_{n=0}^{R}\|\vartheta^n\|_0^2\right).\tag{3.14}$$

接下来我们对 (3.7) 的左端项进行估计. 首先注意到 $\vartheta_K^{n+1}=\frac12(\delta\vartheta_K^{n+1}+\vartheta_K^{n+1}+\vartheta_K^n)$, 则

$$\begin{aligned}&\Delta t\sum_{n=1}^{R-1}\sum_{K\in T_h}m(K)\phi_K(\partial_t\vartheta_K^{n+1})\vartheta_K^{n+1}\\\ge{}&\frac12\sum_{K\in T_h}m(K)\phi_K(\vartheta_K^R)^2-\frac{\phi^*}{2}\|\vartheta^1\|_0^2+\frac12\sum_{n=1}^{R-1}\sum_{K\in T_h}m(K)\phi_K(\delta\vartheta_K^{n+1})^2.\end{aligned}\tag{3.15}$$

利用分部求和公式可得

$$\begin{aligned}&\frac{2\Delta t}{3}\sum_{n=1}^{R-1}\sum_{K\in T_h}\sum_{L\in N(K)}D_{K|L}(F_{K,L}^{n+1}-\overline{F}_{K,L}^{n+1})\vartheta_K^{n+1}\\={}&\frac{\Delta t}{3}\sum_{n=1}^{R-1}\sum_{K\in T_h}\sum_{L\in N(K)}D_{K|L}\frac{m(K|L)}{d_{K|L}}(\vartheta_K^{n+1}-\vartheta_L^{n+1})^2.\end{aligned}\tag{3.16}$$

记 $\underline{\vartheta}_{K|L}^{n+1}=\vartheta_L^{n+1}$, $IU_{K,L}^{n+1}\geq 0$; $\underline{\vartheta}_{K|L}^{n+1}=\vartheta_K^{n+1}$, $IU_{K,L}^{n+1}<0$, 则

$$
\begin{aligned}
&\frac{2\Delta t}{3}\sum_{n=1}^{R-1}\sum_{K\in T_h}\sum_{L\in N(K)}m(K|L)IU_{K,L}^{n+1}\underline{\vartheta}_{K|L}^{n+1}\vartheta_K^{n+1}\\
=&\frac{\Delta t}{6}\sum_{n=1}^{R-1}\sum_{K\in T_h}\sum_{L\in N(K)}m(K|L)|IU_{K,L}^{n+1}|\left((\vartheta_{K|L}^{n+1}-\underline{\vartheta}_{K|L}^{n+1})^2+\left[(\vartheta_{K|L}^{n+1})^2-(\underline{\vartheta}_{K|L}^{n+1})^2\right]\right)\\
=&\frac{\Delta t}{6}\sum_{n=1}^{R-1}\sum_{K\in T_h}\sum_{L\in N(K)}m(K|L)|IU_{K,L}^{n+1}|(\vartheta_K^{n+1}-\vartheta_L^{n+1})^2\\
&+\frac{\Delta t}{3}\sum_{n=1}^{R-1}\sum_{K\in T_h}(\vartheta_K^{n+1})^2\left(\sum_{L\in N(K)}m(K|L)IU_{K,L}^{n+1}\right).
\end{aligned}
$$

由 (2.2a) 可知 $\sum\limits_{L\in N(K)}m(K|L)IU_{K,L}^{n+1}=\int_K Iq^{n+1}\mathrm{d}x-\int_{\partial K\cap\partial\Omega}Ig^{n+1}\mathrm{d}\gamma$. 当 $h=O(\Delta t^2)$ 时，利用注 2 知， $m(\partial K\cap\partial\Omega)\Delta t^2\leq Mm(K)$, 注意到 $|g^{n+1}-Ig^{n+1}|\leq M\Delta t^2$, 于是

$$
\begin{aligned}
&\frac{2\Delta t}{3}\sum_{n=1}^{R-1}\sum_{K\in T_h}\sum_{L\in N(K)}m(K|L)IU_{K,L}^{n+1}\vartheta_{K|L}^{n+1}\vartheta_K^{n+1}\\
&+\frac{2\Delta t}{3}\sum_{n=1}^{R-1}\sum_{K\in T_h}\int_{\partial K\cap\Gamma_O}g^{n+1}\mathrm{d}\gamma(\vartheta_K^{n+1})^2\\
\geq&\frac{\Delta t}{6}\sum_{n=1}^{R-1}\sum_{K\in T_h}\sum_{L\in N(K)}m(K|L)|IU_{K,L}^{n+1}|(\vartheta_K^{n+1}-\vartheta_L^{n+1})^2\\
&-M\{q^*,\|u\|_{W^{2,\infty}(L^\infty(\partial\Omega))}\}\Delta t\sum_{n=1}^{R-1}\|\vartheta^{n+1}\|_0^2\\
&-\frac{\Delta t}{3}\sum_{n=1}^{R-1}\sum_{K\in T_h}\int_{\partial K\cap\Gamma_I}g^{n+1}\mathrm{d}\gamma(\vartheta_K^{n+1})^2\\
&+\frac{\Delta t}{3}\sum_{n=1}^{R-1}\sum_{K\in T_h}\int_{\partial K\cap\Gamma_O}g^{n+1}\mathrm{d}\gamma(\vartheta_K^{n+1})^2.
\end{aligned}\tag{3.17}
$$

由 (3.8)–(3.17) 并取适当小的 ε, 注意到 $\phi_K\geq\phi_*, D_{K|L}\geq 0$, $g^{n+1}\geq 0, x\in\Gamma_O$ 以及 $g^{n+1}<0, x\in\Gamma_I$, 得

$$
\|\vartheta^R\|_0^2\leq M\left(\Delta t^4+h^2+\Delta t\sum_{n=1}^{R-1}\|\vartheta^{n+1}\|_0^2+\|\vartheta^1\|_0^2+\|\vartheta^0\|_0^2\right).\tag{3.18}
$$

应用 Gronwall 引理可知

$$
\|\vartheta^R\|_0^2\leq M\left(\Delta t^4+h^2+\sum_{K\in T_h}m(K)(C_K^1-c^1(x_K))^2+\sum_{K\in T_h}m(K)(C_K^0-c_0(x_K))^2\right).\tag{3.19}
$$

对 (2.3) 和 (2.8b) 进行类似分析，可知 $\sum\limits_{K\in T_h}m(K)(C_K^1-c^1(x_K))^2\leq M(\Delta t^4+h^2)$. 而由 (2.8a) 可知 $C_K^0-c_0(x_K)=0$. 注意到 R 是大于 1 不超过 N 的任意正数，则由 (3.6) 和 (3.19) 知下述定理成立.

定理 3.1 对于有限体积格式 (2.2),(2.7), 当 $h=O(\Delta t^2)$ 并且初值 $\{C_K^0, C_K^1\}$ 由 (2.8a),(2.8b) 给定时，存在常数 M 与 u,p,c 的范数有关，对于 $0\leq n\leq N$, 有

$$\begin{aligned}&\left[\sum_{K\in T_h} m(K)(C_K^n-c^n(x_K))^2\right]^{\frac12}\\&+\left[\sum_{K\in T_h}\sum_{L\in N(K)}\frac{m(K|L)}{d_{K|L}}([P_K^n-P_L^n]-[p^n(x_K)-p^n(x_L)])^2\right]^{\frac12}\\&\leq M(\Delta t^2+h).\end{aligned}$$

注 3 定理 3.1 是以离散的 L^2 模和离散的 H^1 模 [9,11,13] 表示相应的误差估计.

4 数值算例

本节考虑两个数值算例，第一个是正定的对流扩散问题，第二个是半正定问题，并且其二阶项完全退化，成为一个双曲型问题. 对于上述两个问题，假定 Darcy 速度 u 已知，表 1 和表 2 分别给出在不同的时空步长下单步 ($q=1$) 和多步 ($q=2$) 有限体积格式的误差估计，其中第 2, 3 列表示相应格式在所有时间层上的最大的离散 L^2 模误差，而第 4, 5 列表示所有节点的最大相对误差.

表 1 问题 (4.1) 的单步和多步有限体积格式的离散 L^2 模误差估计及最大相对误差估计

	$q=1$	$q=2$	$q=1$	$q=2$
$h=\frac{\pi}{24},\Delta t=\frac{1}{10}$	0.031700	0.014896	3.61%	2.52%
$h=\frac{\pi}{36},\Delta t=\frac{1}{20}$	0.016658	0.008999	2.32%	1.75%
$h=\frac{\pi}{48},\Delta t=\frac{1}{30}$	0.010533	0.006272	1.67%	1.29%
$h=\frac{\pi}{64},\Delta t=\frac{1}{50}$	0.005503	0.004895	1.12%	0.88%

表 2 问题 (4.2) 的单步和多步有限体积格式的离散 L^2 模误差估计及最大相对误差估计

	$q=1$	$q=2$	$q=1$	$q=2$
$h=\frac{\pi}{24},\Delta t=\frac{1}{10}$	0.049625	0.046958	5.68%	5.19%
$h=\frac{\pi}{36},\Delta t=\frac{1}{20}$	0.033721	0.032239	4.00%	3.75%
$h=\frac{\pi}{48},\Delta t=\frac{1}{30}$	0.025673	0.024722	3.16%	2.92%
$h=\frac{\pi}{64},\Delta t=\frac{1}{50}$	0.019276	0.018904	2.38%	2.25%

首先，考虑如下正定对流扩散问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial c}{\partial t}+\nabla\cdot[cu-\nabla c]=\mathrm{e}^t\sin(x_1+x_2)+3\mathrm{e}^t\sin x_1\sin x_2, & x\in\Omega,\quad t\in(0,1], \\ c(x,0)=\sin x_1\sin x_2, & x\in\Omega, \\ (cu-\nabla c)\cdot\eta=0, & x\in\Gamma_I, \\ \nabla c\cdot\eta=0, & x\in\Gamma_O, \end{cases} \tag{4.1}$$

其中 $u(x,t)=(1,1)^{\mathrm{T}},\Omega=(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2})\times(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2})$, 精确解 $c=\mathrm{e}^t\sin x_1\sin x_2$, 采用矩形剖分.

其次，考虑下面的一阶双曲型问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial c}{\partial t}+\nabla\cdot(cu)=e^t\sin(x_1+x_2)+c, & x\in\Omega,\ t\in(0,1], \\ c(x,0)=\sin x_1\sin x_2, & x\in\Omega, \\ cu\cdot\eta=c_Iu\cdot\eta, & x\in\Gamma_I, \end{cases} \tag{4.2}$$

其中 $u(x,t)=(1,1)^{\mathrm{T}},\Omega=(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2})\times(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2})$, 并且当 $x_1=\frac{\pi}{4}$ 时，注入浓度 $c_I=\frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{e}^t\sin x_2$; 当 $x_2=\frac{\pi}{4}$ 时， $c_I=\frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{e}^t\sin x_1$, 精确解 $c=\mathrm{e}^t\sin x_1\sin x_2$, 仍然作矩形剖分.

参　考　文　献

[1] Douglas J Jr. Finite difference methods for two-phase incompressible flow in porous media. *SIAM J. Numer. Anal.*, 1983, **20**(4): 681–696.

[2] Russell T F. Time stepping along characteristics with incomplete iteration for a Galerkin approximation of miscible displacement in porous media. *SIAM J. Numer. Anal.*, 1985, **22**(5): 970–1013.

[3] Douglas J Jr, Ewing R E and Wheeler M F. A time-discretization procedure for a mixed finite element approximation of miscible displacement in porous media. *RAIRO Analyse Numerique*, 1983, **17**(3): 249–265.

[4] 袁益让. 三维动边值问题的特征混合元方法和分析. 中国科学 (A 辑), 1996, **26**(1): 11–22.

[5] Dawson C N, Russell T F and Wheeler M F. Some improved error estimates for the modified method of characteristics. *SIAM J. Numer. Anal.*, 1989, **26**(6): 1487–1512.

[6] 袁益让. 三维油水驱动半定问题特征有限元格式及分析.　科学通报, 1996, **41**(22): 2027–2032.

[7] Yuan Y R. Characteristic finite difference methods for positive semidefinite problem of two-phase (oil and water) miscible flow in porous media. *Systems Science and Mathematical Sciences*, 1999, **12**(4): 299–306.

[8] Lazarov R D, Mishev I D and Vassilevski P S. Finite volume methods for convection-diffusion problems. *SIAM J. Numer. Anal.*, 1996, **33**(1): 31–55.

[9] Herbin R. An error estimate for a finite volume scheme for a diffusion-convection problem on a triangular mesh. *Num. Meth. P. D. E.*, 1995, **11**(2): 165–173.

[10] Mishev I D. Finite volume methods on Voronoï meshes. *Num. Meth. P. D. E.*, 1998, **14**(2): 193–212.
[11] Gallouët T, Herbin R and Hélène M. Error estimates on the approximate finite volume solution of convection diffusion equations with general boundary conditions. *SIAM J. Numer. Anal.*, 2000, **37**(6): 1935–1972.
[12] Michel A, A finite volume scheme for two–phase immiscible flow in porous media *SIAM J. Numer. Anal.*, 2003, **41**(4): 1301–1317.
[13] Bramble J H, Ewing R E and Li Gang. Alternating direction multistep methods for parabolic problems-iterative stabilization. *SIAM J.Numer.Anal.*, 1989, **26**(4): 904–919.

ANALYSIS OF MULTISTEP FINITE VOLUME METHODS FOR POSITIVE SEMIDEFINITE PROBLEM OF TWO-PHASE INCOMPRESSIBLE FLOW

Yang Min

(*School of Mathematics and Information Science, Yantai University, Yantai* 264005)

Yuan Yirang

(*School of Mathematics and Systems Science, Shandong University, Jinan* 250100)

Abstract The multidimensional positive semidefinite problem of two-phase incompressible flow in porous media with initial-boundary conditions is considered here. The equations are discretized by multistep upwind finite volume methods on unstructured meshes. It is proved that the error estimates in discrete norms are of order $O(\Delta t^2 + h)$, where Δt denotes the time step and h denotes the space step. Numerical examples are given at the end to show the efficiency of the method.

Key words Positive semidefinite problem, unstructured meshes, multistep methods, upwind finite volume scheme, error estimates.