系 统 科 学 与 数 学
J. Sys. Sci. & Math. Scis.
26(5) (2006, 10), 561–568

Virasoro 代数的一类一致有界模*

王 伟

(上海交通大学数学系， 上海 200240; 宁夏大学数学计算机学院， 银川 750021)

苏 育 才

(中国科学技术大学数学系， 合肥 230026)

摘要 给出了 Virasoro 代数的一类一致有界不可分解权模的分类，即分类了这样的不可分解模，其合成因子或者都是中间模 $A_{0,0}$ 的合成因子，或者都同构于中间模 $A_{a,b}$(其中 $a \notin \mathbb{Z}$ 或 $b \neq 0, 1$).

关键词 Virasoro 代数，一致有界模.

MR(2000) 主题分类号 17B65, 17B60, 17B68.

1 引 言

Virasoro 代数 **Vir** 是一个复数域 $\mathbb{C}$ 上的李代数，具有一组基 $\{L_i, \boldsymbol{c}, \,|\, i \in \mathbb{Z}\}$, 满足

$$[L_i, L_j] = (j-i)L_{i+j} + \frac{i^3-i}{12}\delta_{i,-j}\boldsymbol{c}, \quad [L_i, \boldsymbol{c}] = 0, \quad \forall i, j \in \mathbb{Z}.$$

本文始终假定 V 是具有有限维权空间分解的 **Vir**- 模

$$V = \bigoplus_{\lambda \in \mathbb{C}} V_{\lambda,c},\ V_{\lambda,c} = \{v \in V \,|\, L_0 v = \lambda v, \boldsymbol{c}v = cv\}, \quad \dim V_{\lambda,c} < \infty, \quad \forall\, (\lambda, c) \in \mathbb{C}^2.$$

因中心元 $\boldsymbol{c}$ 在不可分解模上的作用为纯量，可设 $\exists c \in \mathbb{C}$ 使 $\boldsymbol{c}V = cV$(当 V 一致有界时，$c = 0$, 见 [1–3]). 因此可用 λ 表示一个权，并记 $V_{\lambda,c}$ 为 V_λ.

已知有三类中间模： $A_{a,b}, A(\alpha)$ 和 $B(\alpha), \forall\, a, b \in \mathbb{C}, \alpha \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, 其定义为 [2–5] 它们具有基 $\{x_k \,|\, k \in \mathbb{Z}\}$, 使 c 的作用是平凡的，并满足： $\forall\, i, k \in \mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned} &A_{a,b} \ : L_i x_k = (a+k+bi)x_{i+k}, \\ &A(\alpha) : L_i x_k = (i+k)x_{i+k},\ k \neq 0, \quad L_i x_0 = i(1+(i+1)\alpha)x_i, \\ &B(\alpha) : L_i x_k = k x_{i+k},\ k \neq -i, \quad L_i x_{-i} = -i(1+(i+1)\alpha)x_0, \end{aligned}$$

这里约定当 $\alpha = \infty$ 时， $1+(i+1)\alpha{=}i+1$. 为方便，记 $A'_{0,0}$ 和 $V(0)$ 为 $A_{0,0}$ 的非平凡和平凡的合成因子.

* 国家自然科学基金 (10471096) 中国科学院“百人计划”及教育部博士点基金资助.
收稿日期：2004-02-23.

定义 1.1 若 $\exists N>0$ 使 $\dim V_\lambda \le N,\ \ \forall\lambda\in\mathbb{C}$, 则称 V 为一致有界模 [1−4]; 若 $\exists\lambda_0\in\mathbb{C}$, 满足： $\forall\lambda\in\mathbb{C}, V_\lambda\ne 0\Rightarrow \lambda\le\lambda_0$ 或 $\lambda_0\le\lambda$, 则称 V 为 范畴 $\mathcal{O}$ 或 $\mathcal{O}^-$ 中的模 (定义 $\mathbb{C}$ 的偏序为： $\lambda\le\mu\Leftrightarrow(\lambda-\mu)\in\mathbb{Z}_+$).

Kac[6] 给出了下述重要的猜想：不可约 **Vir**- 模是一个最高或最底权模，或者是一个中间模．这一著名猜想由 Mathieu[7] 证明 (部分证明另见 [8]), 并被 [2] 推广到 Virasoro 超代数及被 [3, 4] 推广到高阶 Virasoro 代数． [5] 证明了不可分解 **Vir**- 模或者是一致有界模，或者是范畴 $\mathcal{O}$ 或 $\mathcal{O}^-$ 中的模，或者是一个含平凡模作为它的合成因子的模．

不可分解一致有界 **Vir**- 模的分类是一个很有趣的问题． [1] 给出了合成因子个数 ≤ 2 的不可分解 **Vir**- 模的分类．本文将构造和分类一类不可分解一致有界 **Vir**- 模，即，考虑不可分解一致有界 **Vir**- 模的合成因子或全同构于模 $A_{a,b}$(这里 $a\notin\mathbb{Z}$ 或 $b\ne 0,1$), 或全同构于 $A_{0,0}$ 的合成因子．主要结果见定理 2.3.

2 主要结果

设 V 是不可分解一致有界 **Vir**- 模，其所有的合成因子或同构于 $A_{a,b}(a\notin\mathbb{Z}$ 或 $b\ne 0,1)$, 或同构于 $A'_{0,0}$ 或 $V(0)$. 下面讨论 V 的可能结构．因 V 不可分解，故可设， $\exists a\in\mathbb{C}$ 使

$$V=\sum_{k\in\mathbb{Z}}V_{k+a}.$$

我们总假设 $0\le\mathrm{Re}(a)<1$. 由 [1, 2], 得

引理 2.1 $\exists N\in\mathbb{Z}_+$ 使 $\dim V_{k+a}=N,\quad \forall\, k\in\mathbb{Z},\, k+a\ne 0$. 由此得，若 0 是权 (则 $a=0$), 则 $N-1\le\dim V_0\le N+1$.

为方便讨论，先设 $N=2$ 且 $V(0)$ 不是 V 的合成因子．则合成因子只能是 $A_{a,b}$ 型的，其中 $a\notin\mathbb{Z}$ 或 $b\ne 0,1$. 因此可取 V 的一组基 $\{x_k,x'_k\,|\,k\in\mathbb{Z}\}$, 且存在 $a_{i,k}\in\mathbb{C}$ 满足 $a_{0,k}=0$, 使

$$L_ix_k=(\overline{k}+bi)x_{i+k},\quad L_ix'_k=(\overline{k}+bi)x'_{i+k}+a_{i,k}x_{i+k},\quad \forall i,k\in\mathbb{Z}.$$

这里记 $\overline{k}=a+k, \forall k\in\mathbb{Z}$. 下面我们将重新选择一组基 x'_k, 使得 $a_{i,k}=0$ 对尽可能多的 $i,k\in\mathbb{Z}$ 成立．首先，取足够大的 $K\in\mathbb{Z}_+$ 使得，当 $i,k\in\mathbb{Z}, |i|\le 2, k, i+k\ge K$ 时都有 $\overline{k}+bi\ne 0$.

情形 1. 设存在 $K'\ge K$ 使得，当 $k\in\mathbb{Z}, k,i+k\ge K', |i|\le 2$ 时，都有 $a_{i,k}=0$.

(i) 设 $a\notin\mathbb{Z}$. 则 $\forall k\in\mathbb{Z}$, 或者 $\overline{k}-2b\ne 0$, 或者 $\overline{k}-b\ne 0$. 由此可重新挑选 $x'_k,\, k<K'$, 使 $x'_k=\frac{1}{\overline{k+1}-b}L_{-1}x'_{k+1}$, 且可证 $L_ix'_\ell=(\overline{\ell}+bi)x'_{i+\ell}, \forall i=0,1,2,\, \ell=k$, 或者 $\forall i=-1,-2,\quad \ell=k-i$. 这样即得 $a_{i,k}=0, \forall k\in\mathbb{Z}, |i|\le 2$. 因 Vir 由 $\{L_i\,|\,|i|\le 2\}$ 生成，这说明 $\forall i,k\in\mathbb{Z}$ 均有 $a_{i,k}=0$. 从而 V 是可分解的．即这种情形不出现．

(ii) 设 $a=0$. 则 $b\ne 0,1$. 与情况 (i) 一样，令

$$x'_k=\begin{cases}\dfrac{1}{k+1-b}L_{-1}x'_{k+1} & \text{当}\quad k+1-b\ne 0,\\[2mm] \dfrac{1}{k+2-2b}L_{-2}x'_{k+2} & \text{当}\quad k+1-b=0,\end{cases}\qquad \forall\, k<K'.$$

则 $\forall k\in\mathbb{Z}, |i|\le 2$ 均有 $a_{i,k}=0$, 这样又得到 V 是可分解的．

情形 2. 设对于任意基的选择，都存在无限个 $k>K$ 使 $a_{i,k}\neq 0$ 对某个 $|i|\leq 2$ 成立.

(i) 设 $b\neq 0,1$. $\forall\,k>K$, 若令 $x'_k=\frac{1}{\overline{k}-1+b}L_1x'_{k-1}$, 则得 $a_{1,k}=0, \forall\,k\geq K$. 将 $[L_{-1},L_1]=2L_0$ 作用到 x'_k 并计算 x_k 的系数，得

$$(\overline{k}+b)a_{-1,k+1}-a_{-1,k}(\overline{k}-1+b)=0,\ \ \forall\,k\geq K+1.$$

从而 $\exists\,a'\in\mathbb{C}$ 使

$$a_{-1,k}=\frac{1}{\overline{k}-1+b}a',\ \ \forall\,k\geq K+1.$$

同样，由 $[L_{-1},L_2]=3L_1$, $[L_{-2},L_1]=3L_{-1}$, 得 $\exists\,a'',a'''\in\mathbb{C}$ 使当 $k\geq K+2$ 时，

$$\begin{aligned} a_{2,k}\ &=\frac{1}{\overline{k}+2-b}a'-\frac{2b(1-b)(2\overline{k}+2b+1)}{(\overline{k}+b)(\overline{k}+1+b)(\overline{k}+1-b)(\overline{k}+2-b)}a'\\ &\quad+\frac{1}{(\overline{k}+2-b)(\overline{k}+1-b)}a'',\\ a_{-2,k}&=\frac{3}{\overline{k}-2+b}a'+\frac{1}{(\overline{k}-2+b)(\overline{k}-1+b)}a'''. \end{aligned}\tag{2.1}$$

由此及用 $[L_{-2},L_2]=4L_0$ 作用在 x'_k 上 $(k\geq K+4)$, 可得 (a',a'',a''') 是一组唯一确定的数. 将基元 x'_k 换成某一倍数后可看出，这样的模是唯一的. 因此重新取基后，我们有不可分解模

$$A_{a,b}(2):\ L_ix_k=(\overline{k}+bi)x_{i+k},\quad L_ix'_k=(\overline{k}+bi)x'_{i+k}+ix_{i+k},\quad \forall\,i,k\in\mathbb{Z}.$$

这里 $\overline{k}=a+k$. 一般地， $\forall\,a,b\in\mathbb{C},n\in\mathbb{Z}_+\backslash\{0\}$, $b\neq 0,1$, 可定义 n 个合成因子的不可分解模 $A_{a,b}(n)$, 使其具有基 $\{x_k^{(\ell)}\,|\,k\in\mathbb{Z},\ell=1,2,\cdots n\}$, 且

$$A_{a,b}(n):L_ix_k^{(\ell)}=(\overline{k}+bi)x_{i+k}^{(\ell)}+(\ell-1)ix_{i+k}^{(\ell-1)},\quad \forall\,i,k\in\mathbb{Z},\ \ell=1,2,\cdots,n.$$

(ii) 设 $b=0,1$(则 $a\notin\mathbb{Z}$). 与 (i) 一样，这时可得 $a'''=-a''$, 且将基元 x'_k 换成某一倍数后可设 $a''=1$, $a'\in\mathbb{C}$, 或 $a''=0$, $a'=1$. 故这样的模由参数 $\alpha\in\mathbb{C}\cup\{\infty\}$ 唯一决定. $\forall\,a\in\mathbb{C}\backslash\mathbb{Z},\alpha\in\mathbb{C}\cup\{\infty\}$, 重新取基后，可定义一个具有基 $\{x_k^{(\ell)}\,|\,k\in\mathbb{Z},\ell=1,2\}$ 的不可分解模

$$X(a,\alpha,2):\ \ L_ix_k^{(\ell)}=\overline{k}x_{i+k}^{(\ell)}+i\delta_{\ell,2}\Big(1+\frac{\overline{k}}{i+\overline{k}}\alpha\Big)x_{i+k}^{(1)},\ \ \forall\,i,k\in\mathbb{Z},\ \ell=1,2.$$

这里当 $\alpha=\infty$ 时，视 $1+\frac{\overline{k}}{i+\overline{k}}\alpha$ 为 $\frac{\overline{k}}{i+\overline{k}}$. 为方便起见，我们给出这类模的另一形式

$$X'(a,\alpha,2):\ \ L_ix_k^{(\ell)}=(i+\overline{k})x_{i+k}^{(\ell)}+i\delta_{\ell,2}\Big(1+\frac{i+\overline{k}}{\overline{k}}\alpha\Big)x_{i+k}^{(1)},\ \ \forall\,i,k\in\mathbb{Z},\ \ell=1,2.$$

则 $X(a,\alpha,2)\cong X'(a,\alpha^{-1},2)$.

现在设 V 有 3 个合成因子，且这 3 个合成因子同构于 $A'_{0,0}$ 或 $V(0)$. 先设 $\dim V_0=1$. 若 $V(0)$ 是底部合成因子，则由引理 2.1, $\frac{V}{V(0)}$ 是可分解的，且 $\frac{V}{V(0)}=\frac{U}{V(0)}\oplus\frac{W}{V(0)}$, 其中 U,W 是型如 $B(\alpha)$, $B(\alpha')$ 的 V 的不可分解子模. 适当选择基后，可使 $\alpha=0,\alpha'=-1$, 也就是说，可选 V 的一组基 $\{x_0=x_0^{(1)}=x_0^{(2)},x_k^{(\ell)}\,|\,k\in\mathbb{Z}\backslash\{0\},\ell=1,2\}$, 使

$$Y_1(3):\ L_ix_k^{(\ell)}=kx_{i+k}^{(\ell)},\,k\neq -i,\ \ L_ix_{-i}^{(\ell)}=(-i)^{\ell}x_0,\ \ \forall\,k\in\mathbb{Z},\,\ell=1,2.$$

同理，若 $V(0)$ 是顶部合成因子，则可得 2 个 $A'_{0,0}$ 型的单子模，且由此可选 V 的一组基 $\{x_0=x_0^{(1)}=x_0^{(2)},x_k^{(\ell)}\,|\,k\in\mathbb{Z}\backslash\{0\},\ell=1,2\}$, 使

$$Y_2(3):L_ix_k^{(\ell)}=(i+k)x_{i+k}^{(\ell)},\quad L_ix_0=ix_i^{(1)}-i^2x_i^{(2)},\quad \forall\,k\neq 0,\,i\in\mathbb{Z},\,\ell=1,2.$$

若 $V(0)$ 是中间合成因子，则可得一个型为 $A(\alpha)$ 的 V 的不可分解子模和一个型为 $B(\alpha')$ 的 V 的不可分解商模. 因此，可取 V 的一组基 $\{x_i,x'_k\,|\,i,k\in\mathbb{Z},k\neq 0\}$, 使

$$\begin{aligned}&L_ix_k=(i+k)x_{i+k},k\neq 0, && L_ix_0=i(1+(i+1)\alpha)x_i,\\&L_ix'_k=kx'_{i+k}+a_{i,k}x_{i+k},\ k\neq 0,-i, && L_ix'_{-i}=-i(1+(i+1)\alpha')x_0,\ i\neq 0,\end{aligned}\tag{2.2}$$

其中 $a_{i,k}\in\mathbb{C}$ 且 $a_{0,k}=0$. 进一步地，可这样取 $x'_k,\,k\neq 0$: 取定 x'_{-1} 并定义 $x'_1=-L_2x'_{-1}$. $\forall\,k>1$, 归纳定义 $x'_k=\frac{1}{k-1}L_1x'_{k-1}$. 若 $k<-1$, 设 x'_{k+1} 已选定，则由 (2.2) 可定义一个双射： $L_1|_{V_{\overline{k}}}:V_{\overline{k}}\to V_{\overline{k-1}}$. 因此可取 $V_{\overline{k}}$ 中的元 x'_k 满足 $L_1x'_k=kx'_{k+1}$. 由 $x'_k,\,k\neq 0$ 的选择，得

$$a_{1,k}=0,\quad 这里k\neq 0,-1,\quad 且a_{2,-1}=0.\tag{2.3}$$

用 $[L_{-1},L_1]=2L_0$ 作用在 x'_1,x'_{-1},x'_k 上 $(k\neq 0,\pm 1)$, 得

$$a_{-1,2}=1+2\alpha,\quad a_{-1,-1}=-(1+2\alpha'),\quad 且\ \ ka_{-1,k}-ka_{-1,k+1}=0,\quad k\neq 0,\pm 1.$$

利用这些，我们得到

$$a_{-1,k}=\begin{cases}1+2\alpha & 当\ k\geq 2,\\-(1+2\alpha') & 当\ k\leq -1.\end{cases}\tag{2.4}$$

同理，用 $[L_{-1},L_2]{=}2L_1$ 作用在 x'_1,x'_{-2},x'_k 上，得

$$\begin{aligned}&2a_{2,1}=2(1+3\alpha)-a_{-1,3}=1+4\alpha,\\&-2a_{2,-3}=a_{-1,-2}+2(1+3\alpha')=1+4\alpha',\end{aligned}$$

且

$$(k+1)a_{2,k}-ka_{2,k-1}=(k+1)a_{-1,k}-ka_{-1,k+2},\ k\neq 0,\pm 1,-2.$$

用 $[L_{-2},L_1]=2L_{-1}$ 作用在 x'_{-1},x'_2,x'_k 上，得

$$\begin{aligned}&-2a_{-2,-1}=2(1+2\alpha')(1-a)-3a_{-1,-1}=(1+2\alpha')(5-2\alpha),\\&2a_{-2,3}=2(1-\alpha')(1+2\alpha)+3a_{-1,2}=(1+2\alpha)(5-2\alpha'),\end{aligned}$$

且

$$(k-1)a_{-2,k}-ka_{-2,k+1}=-3a_{-1,k},\quad k\neq 0,\pm 1,2.$$

利用这些，我们得到

$$\begin{aligned}&(k+1)a_{2,k}=\begin{cases}(1+2\alpha)(k+1)-1 & 当\ k\geq 1,\\-(1+2\alpha')(k+1)-1 & 当\ k\leq -3,\end{cases}\\&(k-1)a_{-2,k}=\begin{cases}3(1+2\alpha)(k-1)-(1+2\alpha)(1+2\alpha') & 当\ k\geq 3,\\-3(1+2\alpha')(k-1)-(1+2\alpha)(1+2\alpha') & 当\ k\leq -1.\end{cases}\end{aligned}\tag{2.5}$$

由 (2.1) 且因 $a''+a'''=0$, 必须有 $1+(1+2\alpha)(1+2\alpha')=0$. 另一方面，如果用 $[L_{-2},L_2]=4L_0$ 作用于 x'_2 上，得 $1+\alpha+\alpha'+3\alpha\alpha'=0$. 因此， $\alpha=-1,\alpha'=0$, 或 $\alpha=0,\alpha'=-1$. 再用 $[L_{-2},L_2]=4L_0$ 作用于 x'_1 上，又得 $a_{-2,1}=3(1+2\alpha)$. 这样，联合 (2.3)–(2.5) 并因 **Vir** 由 $L_{\pm1},L_{\pm2}$ 生成，可以看出 V 由 α,α' 唯一决定. 现在，若 $\alpha=-1,\alpha'=0$ 或 $\alpha=0,\alpha'=-1$, 则得相应的以 $\{y_0,y_k^{(\ell)}\,|\,k\in\mathbb{Z}\backslash\{0\},\ell=1,2\}$ 为基的两个模

$$\begin{aligned}
Y_3(3):\ & L_iy_k^{(1)}=(i+k)y_{i+k}^{(1)},\quad k\neq0, && L_iy_0=-i^2y_i^{(1)},\\
& L_iy_k^{(2)}=ky_{i+k}^{(2)}-i(i+k)y_{i+k}^{(1)},\quad k\neq0,-i, && L_iy_{-i}^{(2)}=-iy_0,\\
Y_4(3):\ & L_iy_k^{(1)}=(i+k)y_{i+k}^{(1)},\quad k\neq0, && L_iy_0=iy_i^{(1)},\\
& L_iy_k^{(2)}=ky_{i+k}^{(2)}-iky_{i+k}^{(1)},\quad k\neq0,-i, && L_iy_{-i}^{(2)}=i^2y_0,
\end{aligned}$$

其中 $i,k\in\mathbb{Z}$. 这样，重新选 $Y_3(3)$ 的基 $\{x_k^{(1)}=-ky_k^{(1)},x_0^{(2)}=y_0,x_k^{(2)}=y_k^{(2)}\,|\,k\in\mathbb{Z}\backslash\{0\}\}$, 并令 $x_0^{(1)}=0$, 就得到

$$Y_3(3):\ L_ix_k^{(\ell)}=kx_{i+k}^{(\ell)}+i\delta_{\ell,2}\,x_{i+k}^{(1)},\quad i,k\in\mathbb{Z},\ \ell=1,2.$$

重新选 $Y_4(3)$ 的基 $\{x_k^{(1)}=y_k^{(1)},x_0^{(1)}=y_0,x_k^{(2)}=\frac{1}{-k}y_k^{(2)}\,|\,k\in\mathbb{Z}\backslash\{0\}\}$, 并令 $x_0^{(2)}$ 未定 (或令 $x_0^{(2)}$ 不是 $Y_4(3)$ 中的元), 则有

$$Y_4(3):\ L_ix_k^{(\ell)}=(i+k)x_{i+k}^{(\ell)}+i\delta_{\ell,2}\,x_{i+k}^{(1)},\quad i,k\in\mathbb{Z},\ \ell=1,2,$$

现在设 $N=1$ 且 $\dim V_0=2$. 类似于上面的讨论，可得基为 $\{x_0^{(1)},x_0^{(2)},x_k\,|\,k\in\mathbb{Z}\backslash\{0\}\}$ 的 4 个不可分解模

$$\begin{aligned}
Y'_1(3):&\ L_ix_k=(i+k)x_{i+k}, && L_ix_0^{(2)}=-i^2x_i,\\
Y'_2(3):&\ L_ix_k=kx_{i+k},\quad k\neq-i, && L_ix_{-i}=-ix_0^{(1)}+i^2x_0^{(2)},L_ix_0^{(2)}=0,\\
Y'_3(3):&\ L_ix_k=kx_{i+k}, && L_ix_0^{(2)}=ix_i,\\
Y'_4(3):&\ L_ix_k=(i+k)x_{i+k},k\neq-i, && L_ix_{-i}^{(1)}=ix_0,
\end{aligned}$$

其中 $i,k\in\mathbb{Z}$ 且在前 3 种情形中 $x_0=x_0^{(1)}$, 而在 $Y'_4(3)$ 的情况， $x_0=x_0^{(2)}$.

现在设 V 有 3 个形如 $A_{a,0}$, $a\notin\mathbb{Z}$ 的合成因子，则类似于上述的讨论，有下面基为 $\{x_k^{(\ell)}\,|\,k\in\mathbb{Z},\ \ell=1,2,3\}$ 的 4 个不可分解模

$$\begin{aligned}
X_1(a,3):&\quad L_ix_k^{(3)}=\overline{k}x_{i+k}^{(3)}+\frac{i\overline{k}}{\overline{k}+i}x_{i+k}^{(1)},\quad L_ix_k^{(2)}=\overline{k}x_{i+k}^{(2)}+ix_{i+k}^{(1)},\quad L_ix_k^{(1)}=\overline{k}x_{i+k}^{(1)},\\
X_2(a,3):&\quad L_ix_k^{(3)}=\overline{k}x_{i+k}^{(3)}+ix_{i+k}^{(2)}+\frac{i\overline{k}}{\overline{k}+i}x_{i+k}^{(1)},\quad L_ix_k^{(2)}=\overline{k}x_{i+k}^{(2)},\quad L_ix_k^{(1)}=\overline{k}x_{i+k}^{(1)},\\
X_3(a,\alpha,3):&\ L_ix_k^{(\ell)}=\overline{k}x_{i+k}^{(\ell)}+(\ell-1)ix_{i+k}^{(\ell-1)}+\delta_{\ell,3}\frac{i\overline{k}}{\overline{k}+i}\alpha x_{i+k}^{(1)},\\
X_4(a,\alpha,3):&\ L_ix_k^{(\ell)}=(\overline{k}+i)x_{i+k}^{(\ell)}+(\ell-1)ix_{i+k}^{(\ell-1)}+\delta_{\ell,3}\frac{i(\overline{k}+i)}{\overline{k}}\alpha x_{i+k}^{(1)},
\end{aligned}$$

这里 $\overline{k}=a+k$, $\quad a\in\mathbb{C}\backslash\mathbb{Z},\alpha\in\mathbb{C}$ 且 $\ell=1,2,3$.

根据上面的讨论，我们看到，型如 X,Y 的模可以通过生成元和定义关系来表示. 模 V 的子集 C 称作生成元集，如果 C 生成 V 且 C 的每一个元素都对应 V 的一个合成因子，使

$\#C$ 等于 V 的合成因子的数目. 例如, 在 $Y_1(3)$ 中可取 $C=\{x_1^{(1)},x_0,x_1^{(2)}\}$. 若 V 含合成因子 $V(0)$, 则 $\forall v\in C$, 我们定义 v 的权 $w(v)$ 为 0 或 1 如果 v 对应于平凡因子 $V(0)$ 或非平凡因子 $A'_{0,0}$ 在 C 中还可定义如下关系： $\forall u,v\in C$,

$$
\begin{aligned}
&u\twoheadrightarrow v \text{ 或} v\twoheadleftarrow u &&\Leftrightarrow u\ne v \text{且 } v \text{ 可由 } u \text{ 生成},\\
&u\to v \text{ 或} v\leftarrow u &&\Leftrightarrow u\twoheadrightarrow v\text{且不存在 } w\in C \text{ 使} u\twoheadrightarrow w\twoheadrightarrow v.
\end{aligned}
$$

则我们可用下列方法表示型如 X,Y 的模

$$
\begin{array}{lll}
X_1: x_0^{(2)}\to x_0^{(1)}\leftarrow x_0^{(3)}, & X_2: x_0^{(1)}\leftarrow x_0^{(3)}\to x_0^{(2)}, & \begin{smallmatrix}X_3\\ X_4\end{smallmatrix}: \underset{\alpha}{x_0^{(1)}}\leftarrow x_0^{(2)}\leftarrow x_0^{(3)},\\
Y_1: \underset{1}{x_1^{(1)}}\to \underset{0}{x_0}\leftarrow \underset{1}{x_1^{(2)}}, & Y_2: \underset{1}{x_1^{(1)}}\leftarrow \underset{0}{x_0}\to \underset{1}{x_1^{(2)}}, & \begin{smallmatrix}Y_3\\ Y_4\end{smallmatrix}: \underset{1}{x_1^{(1)}}\leftarrow \underset{0}{y_0}\leftarrow \underset{1}{x_1^{(2)}},\\
Y_1': \underset{0}{x_0^{(1)}}\to \underset{1}{x_1}\leftarrow \underset{0}{x_0^{(2)}}, & Y_2': \underset{0}{x_0^{(1)}}\leftarrow \underset{1}{x_1}\to \underset{0}{x_0^{(2)}}, & \begin{smallmatrix}Y_3'\\ Y_4'\end{smallmatrix}: \underset{0}{x_0^{(1)}}\leftarrow \underset{1}{x_1}\leftarrow \underset{0}{x_0^{(2)}},
\end{array}
$$

这里， X_3,X_4 中 $x_0^{(1)}$ 下面的 α 表示模含有一参数 α, 而 Y 中的数字 0,1 表示他们的权. 这样即得如下定义 (参见 [9] 的定义 5.4, [10] 的定义 3.4).

定义 2.2 (1) 一个链是一五元组 (a,b,C,n,x), 其中 $a\in\mathbb{C}$, $b=0,1$ (这里的 b 是为了区分模 X_3 和模 X_4; 模 Y_3 和模 Y_4; 模 Y_3' 和模 Y_4'), $n\ge 2$, $x\in\mathbb{C}$, 且 $C=\{v_1<\cdots<v_n\}$ 是一有序集, 其元素满足关系

(i) 对 $i=1,\cdots,n-1$, v_i 与 v_{i+1} 被一带箭头的线相连 ($u\to v$ 与 $v\leftarrow u$ 看成是一样的);

(ii) (a) 若 $a\in\mathbb{Z}$, 则 $n\ge 3$ 且每个 v_i 具有权 $w(v_i)=0,1$, 并且 $w(v_i)=0\Leftrightarrow w(v_{i+1})=1$; (b) 若 $a\notin\mathbb{Z}$, 则 v 具有权 $w(v)=\alpha\in\mathbb{C}\Leftrightarrow C$ 是一条 "直线 ", 即, $v_1\leftarrow\cdots\leftarrow v_n$, $v=v_1$ 或 $v_1\to\cdots\to v_n$, $v=v_n$;

(iii) $x\ne 0\Leftrightarrow v_n$ 与 v_1 被一个带箭头的线相连 (这时称链为 "圈", 否则称为 "线");

(iv) $x\ne 0\Leftrightarrow$ (a) $a\in\mathbb{Z}$, n 是一个偶数, 且 (b) v_i 和 $v_{i+1}(i=1,\cdots,n-1)$ 及 v_n 和 v_1 间的连线不能都指向同一方向, 即 C 不可能为 $v_1\leftarrow\cdots\leftarrow v_n\leftarrow v_1$ 或 $v_1\to\cdots\to v_n\to v_1$.

(2) 两个链 (a,b,C,n,x) 和 (a',b',C',n',x') (其中 $C=\{v_1<\cdots<v_n\}$, $C'=\{v_1'<\cdots<v_{n'}'\}$) 等价 $\Leftrightarrow a'-a\in\mathbb{Z}, n'=n, x'=x$ 且有一个保权和保线性的双射 $\tau: C\to C'$ (即, $\forall u,v\in C$, 有 $w(\tau(v))=w(v)$(若 v 有权) 且 $v\to u\Leftrightarrow\tau(v)\to\tau(u)$), 使得 $\exists j$, $1\le j\le n$ 满足, 若 $b'=b$, 则 $\tau(v_i)=\begin{cases} v'_{i+j} & \text{当} i+j\le n,\\ v'_{i+j-n} & \text{当} i+j>n;\end{cases}$ 若 $b'=1-b$, 则 $\tau(v_i)=\begin{cases} v'_{j-i} & \text{当} j-i\ge 1,\\ v'_{j-i+n} & \text{当} j-i<1.\end{cases}$

(3) 如果在 (2) 中， $n<n'$, $a-a'\in\mathbb{Z}$, $x=0$ (这里 x' 不必为零) 且映射 τ: $C\to C'$ 仅是个单射，则说 (a,b,C,n,x) 是 (a',b',C',n',x') 的一个子链.

当不至于引起混淆时，我们将说 C 是一个链. 我们若用 C 中元素的权来代表它的元素 (而当元素没有权时，就用点 "·" 来表示), 并且当 $x\ne 0$ 时，把元素 x 放在从 v_n 到 v_1 的连线下面. 这样我们就可用一个图来表示所定义的链. 比如,

$$
\begin{array}{lll}
\text{(i) } 0\to 1\to 0\to 1\to 0, & \text{(ii) } 0\leftarrow 1\leftarrow 0\leftarrow 1\leftarrow 0, & \text{(iii) } 0\begin{smallmatrix}\leftarrow 1\leftarrow 0\leftarrow 1\leftarrow\\ \longleftarrow 1\longleftarrow\\ x\end{smallmatrix}0,\\
\text{(iv) } \alpha\leftarrow\cdot\leftarrow\cdot\leftarrow\cdot, & \text{(v) } \cdot\leftarrow\cdot\leftarrow\cdot\leftarrow\cdot\to\cdot\to\cdot, & \text{(vi) } \cdot\begin{smallmatrix}\leftarrow\cdot\leftarrow\cdot\leftarrow\\ \longleftarrow\cdot\longleftarrow\\ x\end{smallmatrix}\cdot,
\end{array}
\tag{2.6}
$$

都是链. 若 (i) 中 $b=0$, (ii) 中 $b=1$, 则这 2 个链是等价的. 下面的图就不是链：

$$
\text{(vii) } 0\to 1\to 1\to 0\to 1,\quad \text{(viii) } 0\begin{smallmatrix}\leftarrow 1\leftarrow\\ \longleftarrow\\ x\end{smallmatrix}0,\quad \text{(ix) } 0\begin{smallmatrix}\leftarrow 1\leftarrow\\ \rightarrow 1\rightarrow\\ x\end{smallmatrix}0,
$$

本文的主要结果是

定理 2.3　(1) 对每一个链 (a,b,C,n,x), 存在唯一的不可分解模 $Y(a,b,C,n,x)$, 其生成元集对应于链 C, 且对于不同的链 C, 模 $Y(a,b,C,n,x)$ 也是不同的.

(2) 设 V 是一不可分解模，其合成因子或者都为模 $A_{a,b}$(其中 $a\notin\mathbb{Z}$ 或 $b\neq 0,1$), 或者都为模 $A'_{0,0}$ 或 $V(0)$. 则 V 或者是 $A_{a,b}, A(\alpha), B(\alpha)$ 的子商模，或者同构于 $A_{a,b}(n)$, 或者对应于一个链 (a,b,C,n,x).

证 (1) $\forall a\in\mathbb{C}$, $b=0,1$, $\alpha\in\mathbb{C}$, $m\geq 2$ 满足 $a\notin\mathbb{Z}$ 或 $a=\alpha=0$, 我们可定义基为 $\{x_k^{(\ell)}\,|\,k\in\mathbb{Z},\ell=1,2,\cdots,m\}$ 的不可分解模为

$$X(a,b,\alpha,m)\colon L_ix_k^{(\ell)}=(\overline{k}+bi)x_{i+k}^{(\ell)}+(\ell-1)ix_{i+k}^{(\ell-1)}+\delta_{\ell,m}\frac{i(\overline{k}+bi)}{\overline{k}+(1-b)i}\,\alpha x_{i+k}^{(1)},$$

其中 $i,k\in\mathbb{Z}$, $\ell=1,\cdots,m$. 这里 $\overline{k}=a+k$.

先设 (a,b,C,n,x) 是一条 “线”(即 $x=0$). 若 $a\notin\mathbb{Z}$, 则 C 必为型 (d1): $\alpha\leftarrow\cdot\leftarrow\cdots\leftarrow\cdot$ (有 n 个顶点), 这时可令 $Y(a,b,C,n,x)=X(a,b,\alpha,n)$, 因为生成元集 $C=\{x_0^{(1)}<\cdots<x_0^{(n)}\}$ 满足所要求的条件. 设 $a=0$. 假定 $n=2m$. 若 $b=0$ 且 C 型如 (d2): $0\leftarrow 1\leftarrow\cdots\leftarrow 0\leftarrow 1$, 或 $b=1$ 且 C 型如 (d3): $1\leftarrow 0\leftarrow\cdots\leftarrow 1\leftarrow 0$, 则可令 $Y(a,b,C,n,x)=X(0,b,0,m)$, 这因为，若 $b=0$, 则可取 $C=\{x_0^{(1)}<x_1^{(1)}<\cdots<x_0^{(m)}<x_1^{(m)}\}$, 若 $b=1$, 则可取 $C=\{x_1^{(1)}<x_0^{(1)}<\cdots<x_1^{(m)}<x_0^{(m)}\}$, 这时 C 满足我们的需求. 注意到，任意其它 “线” 一定对应到 (d2) 或 (d3) 的子图 (通过去掉第一个或最后一个顶点，或者同时取掉第一个和最后一个顶点), 相应地，我们可取 $Y(a,b,C,n,x)$ 为 $X(0,b,0,m)$ 的商子模，其中 $\frac{n}{2}<m\leq\frac{n}{2}+1$. 比如，若 $b=0, n=2m-1$, 则 $Y(a,b,C,n,x)$ 或者是由 $x_0^{(m)}$ 生成的模 $X(0,0,0,m)$(参看 $Y_3'(3)$), 或者是商模 $\frac{X(0,0,0,m)}{\mathbb{C}x_0^{(1)}}$(参看 $Y_3(3)$).

下设 (a,b,C,n,x) 是任一个链. 我们可按如下规则把它分成一些子链 $(a,b_i,C_i,n_i,0)$ (每一个是一条 “线”): 若 $\rightarrow v\leftarrow$(称此 v 为底点因它对应一单子模), 或 $\leftarrow u\rightarrow$ (称此 u 为顶点), 则在点 v 或 u 处打断链，变成 $\rightarrow v', v''\leftarrow$ 或 $\leftarrow u', u''\rightarrow$. 比如，设 $a=0, n=6$ 且 C 是 (2.6) 中的 (iii), 我们先在 v_1 处打断，则链变为： $0\leftarrow 1\leftarrow 0\leftarrow 1\leftarrow 0\rightarrow 1\rightarrow 0$ (这时 x 消失了，因为它成了一条 “线”); 然后在 v_5 处打断，则得到 2 个子链 $(0,b,C_1,5,0)$, $(0,b,C_2',3,0)$ 且 C_1: $\overset{v_1}{0}\leftarrow 1\leftarrow 0\leftarrow 1\leftarrow\overset{v_5}{0}$ 及 C_2': $\overset{v_5}{0}\rightarrow 1\rightarrow\overset{v_1}{0}$. 把第二个链的顺序颠倒过来，得到链 $(0,1-b,C_2,3,0)$ 且 C_2: $\overset{v_1}{0}\leftarrow 1\leftarrow\overset{v_5}{0}$. 又比如， C 是 (2.6) 中的 (vi), 则我们可得 2 个子链 $(0,b,C_1,4,0)$ 和 $(0,1-b,C_2,3,0)$, 其中 C_1: $0\leftarrow\cdot\leftarrow\cdot\leftarrow\cdot$ 及 C_2: $0\leftarrow\cdot\leftarrow\cdot$, 而且我们令 v_1', v_1'' 的权为 0, 以便使 C_1, C_2 成为链. 现在, 对每一子链 (一条 “线”) $(a,b_i,C_i,n_i,0)$, 我们就有模 $Y(a,b_i,C_i,n_i,0)$. 令 V' 为所有这些模的直和. 对每一对 v', v'', 我们通过用商模 $\frac{V'}{U}(\mathbf{Vir})(v'-v'')$ 来代替 V' 从而把 v', v'' “合并 ” 为一点 v(这是一个底点); 并对每一对 u', u'', 我们通过令 $u=u'+yu''$ 来 “联合” 他们，使他们成为一个点 u(这是一个顶点) (其中，若 $x\neq 0$ 且 u 是被 “联合” 而形成圈的最后一个元素，则 $y=x$, 否则 $y=1$). 最后令 $Y(a,b,C,n,x)$ 为由所有 “联合” 的 u(这些点都是顶点) 生成的 V' 的子模，则 $Y(a,b,C,n,x)$ 是与 (a,b,C,n,x) 对应的模. 为了证明不同的链有不同的模 $Y(a,b,C,n,x)$, 且 $Y(a,b,C,n,x)$ 是不可分解的，并由链 (a,b,C,n,x) 唯一决定，同样地，我们可先假设 C 是一条 “线 ”, 那么就可对 n 施行归纳法.

(2) 假设 V 是一个不可分解模，其合成因子全为 $A_{a,b}(b\neq 0,1)$, 则由情形 2(i) 的讨论，可得 $V\cong A_{a,b}(n)$. 现在假设 V 至少有 3 个合成因子，并且所有 V 的合成因子都是 $A_{a,0}$ 的合

成因子. 我们要证明, 可选 V 的一组生成元集 C, 使 C 对应一个链. 若 $V(0)$ 是 V 的一个合成因子, 则由引理 2.1, 不存在这样的子链: $1 \leftarrow 1$, $0 \leftarrow 0$, $1 - 0 \begin{smallmatrix} - 1 \\ - 1 \end{smallmatrix}$ 或 $0 - 1 \begin{smallmatrix} - 0 \\ - 0 \end{smallmatrix}$(最后两种情形的箭头方向是任意的). 因此我们可设 V 没有合成因子 $V(0)$. 设 C 有一个子链, 比如, $\begin{smallmatrix} v_1 \leftarrow \\ v_2 \leftarrow \end{smallmatrix} v_3 \leftarrow v_4$, 这里 v_1, v_2 有权 α, α'. 若 $\alpha' = \alpha$, 则通过令 $v_1' = v_1 + v_2$, 这个子链即被分成 2 部分: v_2 和 $v_1' \leftarrow v_3 \leftarrow v_4$. 若 $\alpha' \neq \alpha$, 则通过令 $v_2' = v_2 + v_1, v_1' = \frac{1}{\alpha' - \alpha} v_1 + \alpha v_2'$, 这个子链就变成 $\begin{smallmatrix} & & v_1' \leftarrow \\ v_2' \leftarrow & v_3 \leftarrow & \end{smallmatrix} v_4$. 因此, 我们能选择适当的生成元集 C 使它对应一个链.

参 考 文 献

[1] Martin C, Piard A. Classification of the indecomposable bounded admissible modules over the Virasoro Lie algebra with weight spaces of dimension not exceeding two. *Comm. Math. Phys.* 1992, **150**: 465–493.

[2] Su Y. Classification of Harish-Chandra modules over the super-Virasoro algebras. *Comm. Alg.* 1995, **23**: 3653–3675.

[3] Su Y. Classification of Harish-Chandra modules over the higher rank Virasoro algebras, *Comm. Math. Phys.* 2003, **240**: 539–551.

[4] Su Y. Simple modules over the high rank Virasoro algebras. *Comm. Alg.* 2001, **29**: 2067–2080.

[5] Su Y. On indecomposable modules over the Virasoro algebra. *Science in China A*, 2001, **44**: 980–983.

[6] Kac V G. Some problems on infinite–dimensional Lie algebras and their representations. Lecture Notes in Math., Springer, New York-Berlin, 1982, **933**: 117–126.

[7] Mathieu O. Classification of Harish-Chandra modules over the Virasoro Lie algebra. *Invent. Math.* 1992, **107**: 225–234.

[8] Su Y. A classification of indecomposable $sl_2(\mathbb{C})$-modules and a conjecture of Kac on Irreducible modules over the Virasoro algebra. *J. Alg.*, 1993, **161**: 33–46.

[9] Su Y. Classification of finite dimensional modules of the Lie superalgebra $sl(\frac{2}{1})$. *Comm. Alg.*, 1992, **20**: 3259–3277.

[10] Su Y. Classification of infinite dimensional weight modules over the Lie superalgebra $sl(\frac{2}{1})$. *Comm. Alg.*, 2001, **29**: 1301–1309.

[11] Zhao K. Harish-Chandra modules over generalized Witt algebras. to appear.

A CLASS OF UNIFORMLY BOUNDED MODULES OVER THE VIRASORO ALGEBRA

Wang Wei

(*Department of Mathematics, Shanghai Jiaotong University, Shanghai* 200240
School of Mathematics and Compute Science, Ningxia University,Yinchuan 750021)

Su Yucai

(*Department of Mathematics, University of Science and Technology, Hefei* 230026)

Abstract In this paper, a class of uniformly bounded indecomposable weight modules over the Virasoro algebra is classified. To be precise, we classify all uniformly bounded indecomposable weight modules whose composition factors are either the composition factor of the module $A_{0,0}$ of the intermediate series, or isomorphic to the module $A_{a,b}$ of the intermediate series for some $a \notin \mathbb{Z}$, $b \neq 0, 1$.

Key words Virasoro algebra, uniformly bounded module.