系 统 科 学 与 数 学
J. Sys. Sci. & Math. Scis.
25(3) (2005, 6), 331–339

有循环极大子群的素数幂阶群的作用是边传递的图 (I)*

陈 尚 弟

(中国民用航空学院理学院，天津 300300)

摘要 Γ 是一个有限的、单的、无向的且无孤立点的图， G 是 $\mathrm{Aut}(\Gamma)$ 的一个子群. 如果 G 在 Γ 的边集合上传递，则称 Γ 是 $G-$ 边传递图. 我们完全分类了当 G 为一个有循环的极大子群的素数幂阶群时的 $G-$ 边传递图. 这扩展了 Sander 的结果. 本文仅给出其中的一种情况，即当 G 同构于群 $\langle x,\ a \mid x^p = 1 = a^{p^{n-1}}, a^x = a^{1+p^{n-2}}\rangle$, $n \geq 3$ 时，所有的 G －边传递图. 结果为 Γ 是 $G-$ 边传递的当且仅当 Γ 为下列图之一

(1) $\Gamma \cong 2^{n-2}K_{1,1}$ $(n \geq 3)$;

(2) $\Gamma \cong p^k C_{p^{n-1-k}}$ $(p \neq 2,\ 1 \leq k \leq n-2;\ p=2,\ n \geq 4,\ 1 \leq k \leq n-3;\ p=2,\ n=3,\ k=0)$;

(3) $\Gamma \cong \Gamma_* = \bigcup\limits_{i=1}^{p} C^i_{p^{n-1}}$, $C^i_{p^{n-1}} \cong C_{p^{n-1}}$;

(4) $\Gamma \cong p^k C_{p^{n-k}}$ $(p > 2,\ 1 \leq k \leq n-1;\ p=2,\ 1 \leq k \leq n-2)$;

(5) $\Gamma \cong p^{k+1} K_{1,p^{n-1-k}}$ $(0 \leq k \leq n-1)$;

(6) $\Gamma \cong p^k K_{p,p^{n-1-k}}$ $(0 \leq k \leq n-1)$;

(7) $\Gamma \cong K_{1,p^n}$;

(8) $\Gamma \cong p^k K_{1,p^{n-1-k}}$ $(0 \leq k \leq n-1)$.

关键词 图，自同构群，边传递.

MR(2000) 主题分类号 20B25, 05C25

1 引 言

本文所指的图是有限的、单的、无向的且无孤立点. 群和图的术语是标准的，参见 [1–3].

在群与图的研究中，通常有两条路径. 第一，研究为了在一个或一簇给定图上建立某种传递性必须有什么性质的自同构群. 例如，已知 Γ 是 G-s- 弧传递的，则 G 和 G 的子群的许多信息是知道的 [4]. 第二，对于某一个或某一簇群建立的某种特殊的传递性，确定出所有的图. 例如， Ivanov[5] 确定出了所有的图，其中图的自同构群含有一个子群同构于 S_n 且在图上的作用是距离传递的. R.S.Sandder[6] 确定出了二面体群边传递的图. 作者确定出了有一个极大子群循环的素数幂阶群边传递的图. 本文仅给出其中的一种情况，即当 $G \cong \langle x,\ a \mid x^p = 1 = a^{p^{n-1}}, a^x = a^{1+p^{n-2}}\rangle$, $n \geq 3$ 时， G- 边 - 传递的图. 主要结果如下.

* 国家自然科学基金 (10171089) 和中国民航学院博士基金资助课题.
收稿日期：2002-09-30, 收到修改稿日期：2004-11-10.

定理 1 Γ 是一个有限的、单的、无向的且无孤立点的图. G 是 Γ 的一个自同构群, 且 G 同构于群 $\langle x,\ a \mid x^p = 1 = a^{p^{n-1}},\ a^x = a^{1+p^{n-2}}\rangle$, $n \geq 3$, 则 Γ 是 G- 边传递的当且仅当 Γ 同构于下列图之一

(1) $\Gamma \cong 2^{n-2}K_{1,1}$ $(n \geq 3)$;

(2) $\Gamma \cong p^k C_{p^{n-1-k}}$ $(p \neq 2,\ 1 \leq k \leq n-2;\ p = 2,\ n \geq 4,\ 1 \leq k \leq n-3;\ p = 2,\ n = 3,\ k = 0)$;

(3) $\Gamma \cong \Gamma_* = \bigcup\limits_{i=1}^{p} C^i_{p^{n-1}},\ C^i_{p^{n-1}} \cong C_{p^{n-1}}$;

(4) $\Gamma \cong p^k C_{p^{n-k}}$ $(p > 2,\ 1 \leq k \leq n-1;\ p = 2,\ 1 \leq k \leq n-2)$;

(5) $\Gamma \cong p^{k+1} K_{1,p^{n-1-k}}$ $(0 \leq k \leq n-1)$;

(6) $\Gamma \cong p^k K_{p,p^{n-1-k}}$ $(0 \leq k \leq n-1)$;

(7) $\Gamma \cong K_{1,p^n}$;

(8) $\Gamma \cong p^k K_{1,p^{n-1-k}}$ $(0 \leq k \leq n-1)$.

关于有一个极大子群循环的素数幂阶群的结构见 [7]. 下面给出本文的几个重要引理.

引理 1 (1) Γ 是一个图, $G \leq \mathrm{Aut}(\Gamma)$ 且 Γ 是 G- 边 - 传递的, 则 $V(\Gamma)$ 至多有两个 G 轨道. 进一步, 如果 Γ 不是 G- 顶点 - 传递的, 则 Γ 的每条边的两个端点位于不同的 G- 轨道 [8].

(2) 设 G 传递地作用于集合 Ω 上. 如果 M 是 G 的子群, $x \in G$ 且 $G = M\langle x\rangle$, $|G:M| = n$, 则 Ω 至多有 n 个 M —轨道. 进而, 如果 M 是 G 的正规子群, 则所有的 M 轨道是等长的 [9].

推论 1 令置换群 G 传递地作用于集合 Ω 上. 如果 H 是 G 的一个指数为 2 的子群, 则 Ω 至多有两个 H 轨道. 而如果 Ω 恰有两个 H 轨道, 则两个 H 轨道是等长的.

这正是 [6] 中的引理 2.2.

推论 2 令 G 是一个置换 p- 群, 传递地作用于 Ω 上, 如果 M 是 G 的一个极大子群, 则 M- 轨道数是 1 或 p.

证 令 m 是 M- 轨道数. 由于 M 是 G 的极大子群, 所以 M 是的正规子群, 且 $|G:M| = p$, 由引理 1 (2), $m \leq p$. 又 $m\big||G|$, 这样 $m = 1$ 或 p.

2 主要结果的证明

这一节通过对定理 2 和定理 3 的证明来完成对定理 1 的证明. 首先给出两个例子说明满足定理条件的图是存在的. 事实上例 1 和例 2 中的图恰是满足定理条件的所有图.

例 1 下列图 Γ 含有一个自同构群 G 同构于 $\langle x,\ a \mid x^p = 1 = a^{p^{n-1}}, a^x = a^{1+p^{n-2}}\rangle$, $n \geq 3$, 且既是 G- 边 - 传递的, 又是 G- 点 - 传递的.

(1) $\Gamma \cong 2^{n-2}K_{1,1}$, $n \geq 3$, 其中

$$V(\Gamma) = \{1, 2, \cdots, 2^{n-1}\}, \quad E(\Gamma) = \{\{i,j\} \mid i \equiv j + 2^{n-2}\ (\mathrm{mod}\ 2^{n-1})\}.$$

(2) $\Gamma \cong p^k C_{p^{n-1-k}}$, 其中

$$V(\Gamma) = \{1, 2, \cdots, 2^{n-1}\}, \quad E(\Gamma) = \{\{i,j\} \mid i \equiv j + p^k\ (\mathrm{mod}\ p^{n-1})\}.$$

$p > 2$, $1 \leq k \leq n-2$ 或 $p = 2$, $1 \leq k \leq n-2$, $n \geq 4$ 或 $p = 2$, $k = 0$, $n = 3$.

(3) $\Gamma \cong \Gamma_*$, 其中

$$\Gamma_* = \bigcup_{i=1}^{p} C^i_{p^{n-1}}, \quad C^i_{p^{n-1}} \cong C_{p^{n-1}}, \quad V(\Gamma_*) = \{1, 2, \cdots, p^{n-1}\},$$

$$E(C^i_{p^{n-1}})=\left\{\{m,l\}|m\equiv l+1+(i-1)p^{n-2}\ (\mathrm{mod}\ p^{n-1})\right\},\quad i=1,2,\cdots,p.$$

$p>2,\ n\geq 3$ 或 $p=2,\ n=4.$

(4) $\varGamma\cong p^kC_{p^{n-k}}$, $p>2,\ 1\leq k\leq n-1$ 或 $p=2,\ 1\leq k\leq n-2$, 其中

$$V(\varGamma)=\{a_{i,j}\mid i=1,2,\cdots,p;\ j=1,2,\cdots,p^{n-1}\},$$

$$\begin{aligned}E(\varGamma)=&\big\{\{a_{\lambda+1,m},a_{\lambda+1,l}\}\ \big|\ l\equiv m+p^{k-1}(1+\lambda p^{n-2})\ (\mathrm{mod}\ p^{n-1}),\\ &\lambda=0,1,\cdots,p-1;\ m,\ l=1,2,\cdots,p^{n-1}\big\}.\end{aligned}$$

(5) $\varGamma\cong 2^{n-1}K_{1,1}$, 其中

$$V(\varGamma)=\left\{a_{i,j}\ \middle|\ i=1,2;\ \ j=1,2,\cdots,2^{n-1}\right\},$$

$$E(\varGamma)=\left\{\{a_{1,j},a_{2,j}\}\ \middle|\ j=1,2,\cdots,2^{n-1}\right\}.$$

证　仅给出 $\varGamma$ 的自同构群 G 的生成元 a 和 x.

(1) $a=(1,2,\cdots,2^{n-1})$, $i^x=1+(i-1)(1+2^{n-2})$, $i=1,2,\cdots,2^{n-1}$.

(2) $a=(1,2,\cdots,p^{n-1})$, $i^x=i(1+p^{n-2})$, $i=1,2,\cdots,p^{n-1}$.

(3) $a=(1,2,\cdots,p^{n-1})$, $i^x=1+(i-1)(1+p^{n-2})$, $i=1,2,\cdots,p^{n-1}$.

(4) $a=(a_{1,1}a_{1,2}\cdots a_{1,p^{n-1}})(a_{2,1}a_{2,2}\cdots a_{2,p^{n-1}})\cdots(a_{p,1}a_{p,2}\cdots a_{p,p^{n-1}})$,

$$a^x_{m,l}=a_{m+1,1+(l-1)(1+p^{n-2})},$$

$m=1,2,\cdots,p$, $l=1,2,\cdots,p^{n-1}$.

(5) $a=(a_{1,1}a_{1,2}\cdots a_{1,2^{n-1}})(a_{2,1}a_{2,2}\cdots a_{2,2^{n-1}})$,

$$a^x_{i,j}=a_{i+1,1+(j-1)(1+2^{n-2})},$$

$i=1,2$, $j=1,2,\cdots,2^{n-1}$.

例 2　下列图 $\varGamma$ 含有一个自同构群 G 同构于 $\langle x,a|x^p=1=a^{p^{n-1}},a^x=a^{1+p^{n-2}}\rangle$, $n\geq 3$, 且是 G- 边 - 传递的，但不是 G- 点 - 传递的.

(1) $\varGamma=\bigcup\limits_{i=1}^{p}\varGamma_i\cong p^{k+1}K_{1,p^{n-1-k}}$, $0\leq k\leq n-1$, 其中

$$V(\varGamma)=\left\{a_{i,j_1},a_{i,j_2}\ \middle|\ i=1,2,\cdots,p;\ j_1=1,2,\cdots,p^k;\ j_2=1,2,\cdots,p^{n-1}\right\},$$

$$\varGamma_i\cong p^kK_{1,p^{n-1-k}},$$

$$E(\varGamma_i)=\left\{\{a_{i,j_1},b_{i,j_2}\}\ \middle|\ j_1\equiv j_2\ (\mathrm{mod}\ p^k).\ j_1=1,2,\cdots,p^k;\ j_2=1,2,\cdots,p^{n-1}\right\}.$$

(2) $\varGamma=\bigcup\limits_{i=1}^{p}\varGamma_i\cong p^kK_{p,p^{n-1-k}}$, $0\leq k\leq n-1$, 其中

$$\varGamma_i\cong K_{p,p^{n-1-k}},\qquad V(\varGamma)=\left\{a_{i,j_1},b_{j_2}\ \middle|\ j_1=1,2,\cdots,p^k;\ j_2=1,2,\cdots,p^{n-1}\right\},$$

$$E(\varGamma_i)=\left\{\{a_{i,j_1},b_{j_2}\}\mid j_1\equiv j_2\ (\mathrm{mod}\ p^k).\ j_1=1,2,\cdots,p^k;\ j_2=1,2,\cdots,p^{n-1}\right\}.$$
$$(i=1,2,\cdots,p).$$

(3) $\varGamma\cong K_{1,p^n}$, 其中

$$V(\varGamma)=\left\{a_1,b_{i,j}|i=1,2,\cdots,p;\ j=1,2,\cdots,p^{n-1}\right\},$$

$$E(\Gamma)=\left\{\{a_1,b_{i,j}\}|i=1,2,\cdots,p;\ j=1,2,\cdots,p^{n-1}\right\}.$$

(4) $\Gamma=\bigcup_{i=1}^{p^k}\Gamma_i\cong p^kK_{1,p^{n-1-k}}$, $0\le k\le n-1$, 其中

$$\Gamma_i\cong K_{1,p^{n-1-k}},\quad V(\Gamma)=\left\{a_i,b_j\mid i=1,2,\cdots,p^k;\ j=1,2,\cdots,p^{n-1}\right\},$$

$$E(\Gamma_i)=\left\{\{a_i,b_j\}\mid j\equiv i\ (\mathrm{mod}\ p^k).\ i=1,2,\cdots,p^k;\ j=1,2,\cdots,p^{n-1}\right\}.$$

证 仅给出 G 的生成元.

(1) $a=(a_{1,1}a_{1,2}\cdots a_{1,p^k})(a_{2,1}a_{2,2}\cdots a_{2,p^k})\cdots(a_{p,1}a_{p,2}\cdots a_{p,p^k})(b_{1,1}b_{1,2}\cdots b_{1,p^{n-1}})(b_{2,1}b_{2,2}\cdots b_{2,p^{n-1}})\ \cdots(b_{p,1}b_{p,2}\cdots b_{p,p^{n-1}})$,

$$a_{i,j_1}^x=a_{i+1,1+(j_1-1)(1+p^{n-2})},b_{i,j_2}^x=b_{i+1,1+(j_2-1)(1+p^{n-2})}$$

$i=1,2,\cdots,p;\ j_1=1,2,\cdots,p^k;\ j_2=1,2,\cdots,p^{n-1}$.

(2) $a=(a_{1,1}a_{1,2}\cdots a_{1,p^k})(a_{2,1}a_{2,2}\cdots a_{2,p^k})\cdots(a_{p,1}a_{p,2}\cdots a_{p,p^k})(b_1b_2\cdots b_{p^{n-1}})$,

$$a_{i,j_1}^x=a_{i+1,1+(j_1-1)(1+p^{n-2})},\quad b_{j_2}^x=b_{1+(j_2-1)(1+p^{n-2})},$$

$i=1,2,\cdots,p;\ j_1=1,2,\cdots,p^k;\ j_2=1,2,\cdots,p^{n-1}$.

(3) $a=(b_{1,1}b_{1,2}\cdots b_{1,p^{n-1}})(b_{2,1}b_{2,2}\cdots b_{2,p^{n-1}})\cdots(b_{p,1}b_{p,2}\cdots b_{p,p^{n-1}})$,

$$a_1^x=a_1,\quad b_{i,j}^x=b_{i+1,1+(j-1)(1+p^{n-2})}.$$

(4) $a=(a_1a_2\cdots a_{p^k})(b_1b_2\cdots b_{p^{n-1}})$,

$$a_i^x=a_{1+(i-1)(1+p^{n-2})},\quad b_j^x=b_{1+(j-1)(1+p^{n-2})}.$$

$i=1,2,\cdots,p^k;\ j=1,2,\cdots,p^{n-1}$.

下面根据 Γ 是否 G- 点 - 传递来讨论.

定理 2 图 Γ 含有一个自同构群 $G\cong\langle x,a\mid x^p=1=a^{p^{n-1}},a^x=a^{1+p^{n-2}}\rangle$, $n\ge3$, 则 Γ 既是 G- 边 - 传递的, 又是 G- 点 - 传递的, 当且仅当 Γ 同构于例 1 中的图之一.

证 由于 G 传递地作用于 Γ 上, 所以 Γ 是正则图. 由推论 2, $V(\Gamma)$ 有 1 个或 p 个 $\langle a\rangle$ 轨道.

情形 1 $V(\Gamma)$ 有 1 个 $\langle a\rangle$ 轨道, 即 $\langle a\rangle$ 传递地作用于 $V(\Gamma)$ 上.

这意味着 $|V(\Gamma)|=|a|=p^{n-1}$, 从而 $|E(\Gamma)|\ge\frac{1}{2}|V(\Gamma)|$. 由于 Γ 是 G- 边 - 传递的, 所以 $|E(\Gamma)|\big|p^n$. 从而 $|E(\Gamma)|=2^{n-2}$ 或 p^{n-1} 或 p^n. 令 $V(\Gamma)=\{1,2,\cdots,p^{n-1}\}$, $a=(1,2,\cdots,p^{n-1})$.

(I) 如果 $|E(\Gamma)|=2^{n-2}$, 则 $p=2$ 且 Γ 是一度正则图, 因此 $\Gamma\cong2^{n-2}K_{1,1}$, 这正是例 1 中的图 (1).

(II) 如果 $|E(\Gamma)|=p^{n-1}$, 则 Γ 是二度正则图, 由于 Γ 是 G- 边 - 传递的, 所以 Γ 的所有圈是等长的, 因此 $\Gamma\cong p^kC_{p^{n-1-k}}$. 当 $k=0$ 时, $\Gamma\cong C_{p^{n-1}}$, 且 $\mathrm{Aut}(\Gamma)\cong\mathrm{Aut}(C_{p^{n-1}})\cong D_{2p^{n-1}}$, 这样 $p^n\big|2p^{n-1}$, $p=2$ 且 $G\cong D_{2^n}$, 这样必有 $n=3$. 由于 $p^{n-1-k}\ge3$, 所以 $p>2,1\le k\le n-2$ 或 $p=2,1\le k\le n-3,n\ge4$ 或 $k=0,p=2,n=3$. 这正是例 1 中的图 (2).

(III) 如果 $|E(\Gamma)|=p^n$, 则 Γ 是 $2p$ 度正则图. 由于 $|E(\Gamma)|\le\begin{pmatrix}p^{n-1}\\2\end{pmatrix}=\frac{p^{n-1}(p^{n-1}-1)}{2}$, 这样 $p^n\le\frac{p^{n-1}(p^{n-1}-1)}{2}$, $p^{n-1}\ge2p+1$. 因此 $p=2,n\ge4$ 或 $p>2,n\ge3$.

令 $1^x = r$, 则 $i^x = r + (i-1)(1+p^{n-2})$, $i = 1, 2, \cdots, p^{n-1}$. 这样

$$i^{x^p} = 1 + (r-1)\frac{(1+p^{n-2})^p - 1}{p^{n-2}} + (i-1)(1+p^{n-2})^p = i$$

和 $r \equiv 1 \pmod{p^{n-2}}$.

显然， i 是 x 的不动点当且仅当 $r - 1 + (i-1)p^{n-2} \equiv 0 \pmod{p^{n-1}}$, 这样如果 i 和 j 是 x 的不动点，则 $i \equiv j \pmod p$.

假设 $\{1, s\} \in E(\Gamma)$, 但 $\{\lambda, \mu\} \notin E(\Gamma)$, $(1 \le \lambda, \mu \le s)$. 于是 $E(\Gamma) = \{1, s\}^{\langle a\rangle\langle x\rangle}$.

如果 $s \equiv 1 \pmod p$. 令 j 是 x 的一个不动点，则 $\{1, s\}^{a^{j-1}} = \{j, s+j-1\}$, $(s+j-1)^x \equiv j^x + (s-1)(1+p^{n-2}) \equiv j + s - 1 \pmod{p^{n-1}}$, 因此， $s + j - 1$ 是 x 的一个不动点且 $1 \ne x \in G_{\{j, s+j-1\}}$, 从而 $p^n = |E(\Gamma)| < |G| = p^n$, 这是一个矛盾．因此， $s \not\equiv 1 \pmod p$.

不失普遍性，用 a^{s-1} 代替 a, 我们总是假设 $s = 2$, 这样 $C_{p^{n-1}} = 1, 2, \cdots, p^{n-1}$ 是 Γ 的一个长为 p^{n-1} 的圈，且 $\{k, k+1\} \in E(\Gamma)$, 其中 $k \equiv 1, 2, \cdots, p^{n-1} \pmod{p^{n-1}}$. 令 $C^i_{p^{n-1}} = 1^{x^{i-1}} 2^{x^{i-1}} \cdots (p^{n-1})^{x^{i-1}}$, 则 $C^i_{p^{n-1}} \cong C_{p^{n-1}}$, 这样

$$\begin{aligned} E(\Gamma) =& \Big\{\{k, k+1\}^{x^i} \mid k \equiv 1, 2, \cdots, p^{n-1} \pmod{p^{n-1}}.\ \ i = 1, 2, \cdots, p\Big\} \\ =& \Big\{\{m, l\} \mid m \equiv l + 1 + (i-1)p^{n-2} \pmod{p^{n-1}}.\ i = 1, 2, \cdots, p\Big\} \end{aligned}$$

且

$$\Gamma \cong \bigcup_{i=1}^{p} C^i_{p^{n-1}}.$$

这正是例 1 中的图 (3).

情形 2 $V(\Gamma)$ 有 p 个 $\langle a\rangle$ 轨道.

由引理 2, 所有的 $\langle a\rangle$ 轨道是等长的，因此， $|V(\Gamma)| = p|\langle a\rangle| = p^n$, 且 $G_\alpha = 1$ $(\alpha \in V(\Gamma))$. 由于 $|E(\Gamma)|\big|p^n$ 和 $|E(\Gamma)| \ge \frac{1}{2}p^n$, 所以 $|E(\Gamma)| = p^n$ 或 $|E(\Gamma)| = 2^{n-1}$.

(I) 如果 $E(\Gamma) = p^n$, 则 Γ 是二度正则图．这样 Γ 是一些圈的并．由于 Γ 是 G- 边 - 传递的，所以 Γ 的所有圈是等长的．假设 $\{u, v\}$ 是 Γ 的一条边，则由 Γ 的 G- 点 - 传递性知，存在 $b \in G$ 使得 $u^b = v$. 令 $|b| = p^{n-k}$, 则 $1 \le k \le n-1$. 这样含有 u 的圈是 $C_{p^{n-k}} = uu^b \cdots u^{b^{|b|-1}}$, 从而 $\Gamma \cong p^k C_{p^{n-k}}$. 由于 $p^{n-k} \ge 3$, 所以 $p > 2, 1 \le k \le n-1$ 或 $p = 2, 1 \le k \le n-2$. 这正是例 1 中的图 (4).

(II) 如果 $|E(\Gamma)| = 2^{n-1}$, 则 $p = 2$ 且 Γ 是一度正则图，因此， $\Gamma \cong 2^{n-1}K_{1,1}$. 这正是例 1 中的图 (5).

定理 3　图 Γ 含有一个自同构群 $G \cong \langle x, a | x^p = 1 = a^{p^{n-1}}, a^x = a^{1+p^{n-2}}\rangle$, $n \ge 3$, 则 Γ 是 G- 边 - 传递的，但不是 G- 点 - 传递的，当且仅当 Γ 同构于例 2 中的图之一.

证　由于 Γ 是 G- 边 - 传递的，但不是 G- 点 - 传递的，所以，由引理 1 知， $V(\Gamma)$ 有两个 G- 轨道．再由推论 2 知， $V(\Gamma)$ 的每个 G- 轨道含有 1 或 p 个 $\langle a\rangle$- 轨道．这样 $V(\Gamma)$ 可能有 2 个或 $p+1$ 个或 $2p$ 个 $\langle a\rangle$ 轨道.

令 $\{a_{1,1}, b_{1,1}\}$ 是 Γ 的一条边，则 $E(\Gamma) = \big\{\{a_{1,1}, b_{1,1}\}^{x^i\langle a\rangle} \mid i = 0, 1, \cdots p-1\big\}$. 用 $E_{x^i\langle a\rangle}$

表示 $\{a_{1,1},b_{1,1}\}^{x^i\langle a\rangle}$, 则 $E(\Gamma)$ 可表为

$$E(\Gamma)=\bigcup_{i=0}^{p-1}E_{x^i\langle a\rangle}.$$

再次由引理 1 知， $a_{1,1}$ 和 $b_{1,1}$ 位于不同的 G- 轨道. 因此，在 a 的不相连的循环置换分解中， $a_{1,1}$ 和 $b_{1,1}$ 位于不同的循环置换. 这样，令 $a_{1,1}$ 所在的循环置换为 $(a_{1,1}a_{1,2}\cdots a_{1,p^k})$, $(0\le k\le n-1)$, $b_{1,1}$ 所在的循环置换为 $(b_{1,1}b_{1,2}\cdots b_{1,p^{n-1}})$.

情形 1 $V(\Gamma)$ 有 $2p$ 个 $\langle a\rangle$ 轨道. 令

$$\begin{aligned}a=&(a_{1,1}a_{1,2}\cdots a_{1,p^k})(a_{2,1}a_{2,2}\cdots a_{2,p^k})\cdots(a_{p,1}a_{p,2}\cdots a_{p,p^k})\\&(b_{1,1}b_{1,2}\cdots b_{1,p^{n-1}})(b_{2,1}b_{2,2}\cdots b_{2,p^{n-1}})\cdots(b_{p,1}b_{p,2}\cdots b_{p,p^{n-1}})\end{aligned}$$

和 $a_{i,1}^x=a_{i+1,1}$, $b_{i,1}^x=b_{i+1,1}$, $(i\equiv 1,2,\cdots,p\ (\mathrm{mod}\ p))$. 则 $a_{i,j_1}^x=a_{i+1,1+(j_1-1)(1+p^{n-2})}$, $b_{i,j_2}^x=b_{i+1,1+(j_2-1)(1+p^{n-2})}$. 其中 $j_1\equiv 1,2,\cdots,p^k\ (\mathrm{mod}\ p^k)$; $j_2=1,2,\cdots,p^{n-1}\ (\mathrm{mod}\ p^{n-1})$. 令 Γ_i 是由 $E_{x^{i-1}\langle a\rangle}$ 诱导出的 Γ 的边子图，则

$$\begin{aligned}E(\Gamma_i)=&E_{x^{i-1}\langle a\rangle}=\Big\{\{a_{1,1},b_{1,1}\}^{x^{i-1}a^t}\mid t=0,1,\cdots,p^{n-1}\Big\}\\=&\Big\{\{a_{i,1},b_{i,1}\}^{a^t}\mid t=0,1,\cdots,p^{n-1}-1\Big\}\\=&\Big\{\{a_{i,1+t},b_{i,1+t}\}\mid t=0,1,\cdots,p^{n-1}-1\Big\},\quad i=1,2,\cdots,p.\end{aligned}$$

这样 $\{a_{i,j_1},b_{i,j_2}\}\in E(\Gamma_i)\Longleftrightarrow j_1\equiv j_2\ (\mathrm{mod}\ p^k)$.

令 $A_{ij}=\{a_{i,j}\}$, $B_{ij}=\{b_{i,j},b_{i,j+p^k},b_{i,j+2p^k},\cdots,b_{i,j+(p^{n-1-k}-1)p^k}\}$, $i=1,2,\cdots,p$, $j=1,2,\cdots,p^k$, 则 $\Gamma_{ij}=(A_{ij}\bigcup B_{ij},A_{ij}\times B_{ij})$ 是 Γ_i 的子图，且 $\Gamma_{ij}\cong K_{1,p^{n-1-k}}$. 因此，

$$\Gamma_i=\bigcup_{j=1}^{p^k}\Gamma_{ij}\cong p^kK_{p^{n-1-k}},\quad \Gamma=\bigcup_{i=1}^{p}\Gamma_i\cong p^{k+1}K_{1,p^{n-1-k}}.$$

这正是例 2 中的图 (1).

情形 2 $V(\Gamma)$ 有 $p+1$ 个 $\langle a\rangle$- 轨道，此时 a 有两种可能的循环分解.

(I) $a=(a_{1,1}a_{1,2}\cdots a_{1,p^k})(a_{2,1}a_{2,2}\cdots a_{2,p^k})\cdots(a_{p,1}a_{p,2}\cdots a_{p,p^k})(b_{1,1}b_{1,2}\cdots b_{1,p^{n-1}})$, $(0\le k\le n-1)$, 其中 $\{a_{1,1},a_{1,2},\cdots,a_{1,p^k},\cdots,a_{p,1},a_{p,2},\cdots,a_{p,p^k}\}$ 是一个 G- 轨道， $\{b_{1,1},b_{1,2},\cdots,b_{1,p^{n-1}}\}$ 是另一个 G- 轨道

令 $a_{i,1}^x=a_{i+1,1}$, $b_{1,i}^x=b_{1,r}$. $i\equiv 1,2,\cdots,p\ (\mathrm{mod}\ p)$. 由于 $|x|=p$ 和 $a^x=a^{1+p^{n-2}}$, 这样

$$a_{i,j_1}^x=a_{i+1,1+(j_1-1)(1+p^{n-2})},\quad b_{1,j_2}^x=b_{1,r+(j_2-1)(1+p^{n-2})},$$

$i\equiv 1,2,\cdots,p\ (\mathrm{mod}\ p)$; $j_1\equiv 1,2,\cdots,p\ (\mathrm{mod}\ p^k)$; $j_2\equiv 1,2,\cdots,p\ (\mathrm{mod}\ p^{n-1})$.

$$\begin{aligned}b_{1,j_2}^{x^p}=&b_{1,1+(r-1)(1+p^{n-2})+(r-1)(1+p^{n-2})^2+\cdots+(r-1)(1+p^{n-2})^{p-1}+(j_2-1)(1+p^{n-2})^p}\\=&b_{1,(r-1)\frac{(1+p^{n-2})^p-1}{p^{n-2}}+(j_2-1)(1+p^{n-2})^p}=b_{1,j_2}.\end{aligned}$$

因此

$$1+(r-1)\frac{(1+p^{n-2})^p-1}{p^{n-2}}+(j_2-1)(1+p^{n-2})^p\equiv j_2(\mathrm{mod}p^{n-1}).$$

由于 $\begin{pmatrix} p \\ l \end{pmatrix} \equiv 0 \pmod p$, 其中 $p > l$, 所以 $r \equiv 1 \pmod {p^{n-2}}$. 类似地，令 Γ_s 是由 $E_{x^s\langle a\rangle}$ 诱导出的 Γ 的子图， $s = 0, 1, \cdots, p-1$. 而 $a_{1,1}^{x^s} = a_{1+s,1}$, $b_{1,1}^{x^s} = b_{1,1+(r-1)\frac{(1+p^{n-2})^s-1}{p^{n-2}}}$. 由于 $r \equiv 1 \pmod{p^{n-2}}$, 所以

$$1 + (r-1)\frac{(1+p^{n-2})^s - 1}{p^{n-2}} \equiv 1 + s(r-1) (\bmod\ p^{n-1}).$$

这样

$$\begin{aligned} E(\Gamma_s) &= \left\{ \{a_{1,1}, b_{1,1}\}^{x^s a^t} \mid t = 1, 2, \cdots, p^{n-1} \right\} = \left\{ \{a_{1+s,1}, b_{1,1+s(r-1)}\}^{a^t} \mid t = 1, 2, \cdots, p^{n-1} \right\} \\ &= \left\{ \{a_{1+s,1+t}, b_{1,1+t+s(r-1)}\} \mid t = 1, 2, \cdots, p^{n-1} \right\}, \quad s = 0, 1, \cdots, p-1. \end{aligned}$$

于是

$$\{a_{s+1,j_1}, b_{1,j_2}\} \in E(\Gamma_s) \Longleftrightarrow j_1 + s(r-1) \equiv j_2 \pmod{p^k}.$$

令 $A_{s,j} = \{a_{s+1,j}\}$, $B_{s,j} = \{b_{1,j+s(r-1)}, b_{1,j+s(r-1)+p^k}, \cdots, b_{1,j+s(r-1)+(p^{n-1-k}-1)p^k}\}$, $s = 0, 1, \cdots, p-1$, $j \equiv 1, 2, \cdots, p^k \pmod{p^k}$. 则 $\Gamma_{sj} = (A_{s,j} \bigcup B_{s,j}, A_{s,j} \times B_{s,j})$ 是 Γ_s 的子图且 $\Gamma_{sj} \cong K_{1,p^{n-1-k}}$. 因此， $\Gamma_s = \bigcup\limits_{j=1}^{p^k} \Gamma_{sj} \cong p^k K_{1,p^{n-1-k}}$.

由于对于任意的 s 都有 $B_{s,j} = B_{1,j}$, 所以

$$\bigcup_{s=0}^{p-1} \Gamma_{sj} \cong K_{p,p^{n-1-k}}, \quad \Gamma = \bigcup_{j=1}^{p^k} \bigcup_{s=0}^{p-1} \Gamma_{sj} \cong p^k K_{p,p^{n-1-k}}.$$

这正是例 2 中的图 (2).

(II) $a = (a_{1,1}a_{1,2}\cdots a_{1,p^k})(b_{1,1}b_{1,2}\cdots b_{1,p^{n-1}})(b_{2,1}b_{2,2}\cdots b_{2,p^{n-1}})\cdots(b_{p,1}b_{p,2}\cdots b_{1,p^{n-1}})$, $(0 \le k \le n-2)$.

令 $a_{1,1}^x = a_{1,r}$, $b_{i,1}^x = b_{i+1,1}$. ($i \equiv 1, 2, \cdots, p \pmod p$.) 这样

$$a_{1,j_1}^x = a_{1,r+(j_1-1)(1+p^{n-2})}, \quad b_{i,j_2}^x = b_{i+1,1+(j_2-1)(1+p^{n-2})}.$$

其中 $j_1 \equiv 1, 2, \cdots, p^k \pmod{p^k}$; $j_2 \equiv 1, 2, \cdots, p^{n-1} \pmod{p^{n-1}}$; $i \equiv 1, 2, \cdots, p \pmod p$.

与 (I) 类似，可以证明 $\Gamma \cong p^k K_{1,p^{n-k}}$. 如果 $k > 0$, 这是例 2 中的图 (1) 当 $0 \le k \le n-3$ 时的情况；如果 $k = 0$, 则 $\Gamma \cong K_{1,p^n}$. 这正是例 2 中的图 (3).

情形 3 $V(\Gamma)$ 有两个 $\langle a\rangle$ 轨道. 令

$$a = (a_{1,1}a_{1,2}\cdots a_{1,p^k})(b_{1,1}b_{1,2}\cdots b_{1,p^{n-1}}), (0 \le k \le n-1), a_{1,1}^x = a_{1,r}, b_{1,1}^x = b_{1,s}$$

则

$$a_{1,i}^x = a_{1,r+(i-1)(1+p^{n-2})}, \quad i \equiv 1, 2, \cdots, p^k \pmod{p^k}.$$
$$b_{1,j}^x = b_{1,s+(j-1)(1+p^{n-2})}, \quad j \equiv 1, 2, \cdots, p^{n-1} \pmod{p^{n-1}}.$$

于是

$$a_{1,i}^{x^p} = a_{1,1+(r-1)\frac{(1+p^{n-2})^p-1}{p^{n-2}}+(i-1)(1+p^{n-2})^p}, \quad b_{1,j}^{x^p} = b_{1,1+(s-1)\frac{(1+p^{n-2})^p-1}{p^{n-2}}+(j-1)(1+p^{n-2})^p}$$

因此

$$1+(r-1)\frac{(1+p^{n-2})^p-1}{p^{n-2}}+(i-1)(1+p^{n-2})^p\equiv i\ (\mathrm{mod}\ p^k),$$

$$1+(s-1)\frac{(1+p^{n-2})^p-1}{p^{n-2}}+(j-1)(1+p^{n-2})^p\equiv j\ (\mathrm{mod}\ p^{n-1}).$$

于是有 $r\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ p^{k-1})$, $s\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ p^{n-2})$, $r\equiv s\ (\mathrm{mod}\ p^{k-1})$.

令 Γ_λ 是由 $E_{x^\lambda\langle a\rangle}$ 诱导出的 Γ 的子图，则

$$\begin{aligned}E(\Gamma_\lambda)=&\Big\{a_{1,1},b_{1,1}\Big\}^{x^\lambda\langle a\rangle}=\Big\{a_{1,1+(r-1)\frac{(1+p^{n-2})^\lambda-1}{p^{n-2}}},\quad b_{1,1+(s-1)\frac{(1+p^{n-2})^\lambda-1}{p^{n-2}}}\Big\}^{\langle a\rangle}\\ =&\Big\{\{a_{1,1+(r-1)\frac{(1+p^{n-2})^\lambda-1}{p^{n-2}}+t},b_{1,1+(s-1)\frac{(1+p^{n-2})^\lambda-1}{p^{n-2}}+t}\Big\}\ \Big|\ t=0,1,\cdots,p^{n-1}-1\Big\}\\ =&\Big\{\{a_{1,1+(r-1)\lambda+t},\quad b_{1,1+(s-1)\lambda+t}\Big\}\ \Big|\ t=0,1,\cdots,p^{n-1}-1\Big\}.\end{aligned}$$

这样 $\{a_{1,i},b_{1,j}\}\in E(\Gamma_\lambda)\Longleftrightarrow i+(s-r)\lambda\equiv j\ (\mathrm{mod}\ p^k)$.

令 $A_i=\{a_{1,i}\}$, $B_{i\lambda}=\{b_{1,i+(s-r)\lambda+p^k},\quad b_{1,i+(s-r)\lambda+2p^k},\cdots,b_{1,i+(s-r)\lambda+(p^{n-1-k}-1)p^k}\}$, $i=1,2,\cdots,p^k$; $\lambda\equiv 0,1,\cdots,p-1\ (\mathrm{mod}\ p)$ 和 $\Gamma_{i\lambda}=(A_i\bigcup B_{i\lambda},A_i\times B_{i\lambda})$.

如果 $r\equiv s\ (\mathrm{mod}\ p^k)$, 则对于任意的 λ 有 $\Gamma_{i\lambda}=\Gamma_{i0}\cong K_{1,p^{n-1-k}}$. 这样

$$\Gamma=\bigcup_{i=1}^{p^k}\Gamma_{i\lambda}=\bigcup_{i=1}^{p^k}\Gamma_{i0}\cong p^kK_{1,p^{n-1-k}}$$

这正是例 2 中的图 (4).

如果 $r\not\equiv s\ (\mathrm{mod}\ p^k)$, 则 $1\le k\le n-1$, 且对于任意的 $\lambda_1\not\equiv\lambda_2$, 有 $B_{i\lambda_1}\bigcap B_{i\lambda_2}=\emptyset$, $B_{i\lambda}=B_{i-(s-r)j,\lambda+j}$, 其中 λ, $j\equiv 0,1,\cdots,p-1\ (\mathrm{mod}\ p)$. 这样

$$\Gamma_i=\Big((\bigcup_{j=0}^{p-1}A_{i-(s-r)j})\bigcup(\bigcup_{\lambda\in=0}^{p-1}B_{i\lambda}),\quad(\bigcup_{j=0}^{p-1}A_{i-(s-r)j})\times(\bigcup_{\lambda=0}^{p-1}B_{i\lambda})\Big)\cong K_{p,p^{n-k}},$$

$$\bigcup_{\mu=0}^{p-1}\Gamma_{i-(s-r)\mu}=\bigcup_{\mu=0}^{p-1}\Gamma_i\cong K_{p,p^{n-k}}$$

从而 $\Gamma=\bigcup\limits_{i=1}^{p^k}\Gamma_i\cong p^{k-1}K_{p,p^{n-k}}$. 这正是例 2 中的图 (2) 在 $0\le k\le n-2$ 时的情况.

注 例 1 中的图 (5) 是例 2 中的图 (4) 在 $p=2,k=n-1$ 时的情况.

参 考 文 献

[1] 徐明曜. 有限群导引 (上下册). 北京：科学出版社， 1999.
[2] Wielandt H. Finite Permutation Group. New York: Academic Preess, 1964.
[3] Harary F. Graph Theory. Addiso-Wesley, Reading, Mass, 1969.
[4] Biggs N. Algebraic Graph Theory. Combridge Tracts in Math. London: Combridge Univ. Press, 1974.

[5] Ivanov A A. Distance-transitive representation of the symmetric group. *J. Combin Theory*, ser. B, 1986, **41**: 255–274.
[6] Sander R S. Graphs on which a dihedral group acts edge-tansitively. *Discrete Mathmatics*, 1993, **118**: 225–318.
[7] Robinson J S. A Couse in the Theory of Group. New York: Spring-Verlag, 1982, 136–137.
[8] Yap H P. Some Topics in Graph Theory. London Math. Suc. Lecture Note, Series 108. London: Combridge Univ. Press, 1986, 90 .
[9] Dixon John D, Mortimer Brian. Permutation Group. New York: Springer-Verlag, 1997, 10.

GRAPHS ON WHICH A GROUP OF PRIME POWER ORDER WITH A CYCLIC MAXIMAL SUBGROUP ACTS EDGE-TRANSITIVELY(I)

Chen Shangdi

(*College of Science, Civil Aviation University of China , Tianjin,* 300300)

Abstract Let Γ be a finite simple undirected graph with no isolated vertices , G is a subgroup of Aut(Γ). The graph Γ is said to be G-edge transitive if G is transitive on the set of edges of Γ. We obtain a complete classification of $G-$edge transitive graphs , which G is a group of prime-power order with a cyclic maximal subgroup. This extend Sander's conclusion. In this paper, we only consider the case that G is isomorphic to group $\langle x,\ a \mid x^p = 1 = a^{p^{n-1}},\ a^x = a^{1+p^{n-2}}\rangle$, $n \geq 3$. Then Γ is $G-$edge-transitive if and only if Γ is one of following graphs

(1) $\Gamma \cong 2^{n-2}K_{1,1}$ $(n \geq 3)$;

(2) $\Gamma \cong p^k C_{p^{n-1-k}}$ $(p \neq 2,\ 1 \leq k \leq n-2;\ p=2,\ n \geq 4,\ 1 \leq k \leq n-3;\ p=2,\ n=3,\ k=0)$;

(3) $\Gamma \cong \Gamma_* = \bigcup\limits_{i=1}^{p} C^i_{p^{n-1}},\ C^i_{p^{n-1}} \cong C_{p^{n-1}}$;

(4) $\Gamma \cong p^k C_{p^{n-k}}$ $(p > 2,\ 1 \leq k \leq n-1;\ p=2,\ 1 \leq k \leq n-2)$;

(5) $\Gamma \cong p^{k+1} K_{1,p^{n-1-k}}$ $(0 \leq k \leq n-1)$;

(6) $\Gamma \cong p^k K_{p,p^{n-1-k}}$ $(0 \leq k \leq n-1)$;

(7) $\Gamma \cong K_{1,p^n}$;

(8) $\Gamma \cong p^k K_{1,p^{n-1-k}}$ $(0 \leq k \leq n-1)$.

Key words Graph, automorphism group, edge-transitive.