系 统 科 学 与 数 学
J. Sys. Sci. & Math. Scis.
26(5) (2006, 10), 619–628

一类多维指数分布的参数估计

徐冬元 叶慈南 汪美辰
(上海理工大学理学院， 上海 200093)

摘要 考虑生存函数为

$$\overline{F}(x_1,x_2,\cdots,x_n)=P\{X_1>x_1,\cdots,X_n>x_n\}=\exp\left\{-\left[\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i}{\theta_i}\right)^{\frac{1}{\delta}}\right]^{\delta}\right\}$$

$(0<x_i<\infty,\ 0<\delta\leq 1,\ 0<\theta_i<\infty,\ i=\overline{1,n})$ 的一类多维指数分布，给出了它的密度函数的表示式，并讨论了它的性质．提出了相关参数 δ 的估计 $\hat{\delta}$，证明了 $\hat{\delta}$ 有相合性和渐近正态性，得到了 $\hat{\delta}$ 的渐近方差 σ_{δ}^2．最后还给出了若干随机模拟的结果．

关键词 多维指数分布，参数估计，相关参数，渐近性质．

MR(2000) 主题分类号 62F10, 62H12

1 引 言

1960 年， Gumbel[1] 曾提出一类二维指数分布 (GBVE)，其生存函数为本文讨论问题的二维情况．在较长时间内，由于 GBVE 不属于指数族，因而标准的统计方法不适用；其密度函数形式复杂，给统计推断带来不少的困难；再者不明确 GBVE 的物理背景，所以这种模型很少引起注意．直到 1986 年 Hougaard[2] 才指出 GBVE 实际上描述了一种很有意义的物理现象．此后，各种文献对 GBVE 的统计特性做了许多阐述，但是对于三维乃至多维情况由于其复杂性却讨论很少．本文考虑的则是具有以下生存函数的多维指数分布：

$$\overline{F}(x_1,\cdots,x_n)=P\{X_1>x_1,\cdots,X_n>x_n\}=\exp\left\{-\left[\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i}{\theta_i}\right)^{\frac{1}{\delta}}\right]^{\delta}\right\}, \tag{1.1}$$

其中 $0<x_i<\infty,\ 0<\delta\leq 1,\ 0<\theta_i<\infty,\ i=\overline{1,n}$. 这里参数 $\theta_i(i=\overline{1,n})$ 是尺度参数，而我们则把参数 δ 称为相关参数．容易看出， $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 相互独立当且仅当 $\delta=1.n=2$ 时即为 GB VE 分布．在多维情况下，各随机变量互不独立，研究问题时要时刻考虑它们的相关性，这就给讨论带来了许多困难．

容易看出，对于多维情况，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 的边缘分布分别为参数 (期望) 是 $\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_n$ 的指数分布．所以，对于多维情况作统计分析的难点主要在于给出密度函数的表示式并讨论其性质以及相关参数 δ 的估计．

收稿日期：2003-10-15, 收到修改稿日期：2005-07-28.

本文在第 2 节中讨论多维指数分布的密度函数及性质；第 3 节根据其性质提出 δ 的估计 $\hat{\delta}$, 并讨论它的一些性质；第 4 节给出一些模拟结果.

2 密度函数及性质

设 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 的生存函数为 (1.1). 为了方便起见，我们作变量代换 $Z_1 = \frac{X_1}{\theta_1}, Z_2 = \frac{X_2}{\theta_2}, \cdots, Z_n = \frac{X_n}{\theta_n}$. $Z_1, Z_2, \cdots, Z_n$ 的生存函数为

$$\overline{F}(z_1, z_2, \cdots, z_n) = \exp\left\{-\left[\sum_{i=1}^{n} z_i^{\frac{1}{\delta}}\right]^{\delta}\right\},\ 0 < z_i < \infty,\ 0 < \delta \le 1,\ i = \overline{1, n}. \tag{2.1}$$

先求 $(Z_1, Z_2, \cdots, Z_n)$ 的联合密度函数.

引理 2.1 $(Z_1, Z_2, \cdots, Z_n)$ 的联合密度函数为

$$f(z_1, z_2, \cdots, z_n) = \prod_{j=1}^{n}\left(z_j^{\frac{1}{\delta}-1}\right)\exp\left[-\left(\sum_{i=1}^{n} z_i^{\frac{1}{\delta}}\right)^{\delta}\right]\left(\sum_{i=1}^{n} z_i^{\frac{1}{\delta}}\right)^{\delta-n}$$

$$\cdot\left[a_{n,n-1}\left(\sum_{i=1}^{n} z_i^{\frac{1}{\delta}}\right)^{(n-1)\delta} + a_{n,n-2}\left(\sum_{i=1}^{n} z_i^{\frac{1}{\delta}}\right)^{(n-2)\delta} + \cdots + a_{n,0}\right], \tag{2.2}$$

其中 $a_{n,n-1} = a_{n-1,n-2}, a_{n,n-2} = a_{n-1,n-3} + (\frac{n-1}{\delta} - n + 1)\cdot a_{n-1,n-2}, \cdots, a_{n,n-j} = a_{n-1,n-j-1} + (\frac{n-1}{\delta} - n + j - 1)a_{n-1,n-j}, \cdots, a_{n,0} = a_{n-1,0}(\frac{n-1}{\delta} - 1)$.

证 记 $\bar{f}(z_1, z_2, \cdots, z_n) = \frac{\partial^n \overline{F}(z_1, \cdots, z_n)}{\partial z_1 \cdots \partial z_n}$, $0 \le z_1, z_2, \cdots, z_n < \infty$ 则有

$$f(z_1, z_2, \cdots, z_n) = (-1)^n \bar{f}(z_1, z_2, \cdots, z_n).$$

我们使用数学归纳法证明本引理. 当 $i = 2$ 时容易算得

$$\bar{f}(z_1, z_2) = \prod_{j=1}^{2}\left(z_j^{\frac{1}{\delta}-1}\right)\exp\left[-\left(\sum_{i=1}^{2} z_i^{\frac{1}{\delta}}\right)^{\delta}\right]\left(\sum_{i=1}^{2} z_i^{\frac{1}{\delta}}\right)^{\delta-2}\left[\left(\sum_{i=1}^{2} z_i^{\frac{1}{\delta}}\right)^{\delta} + \left(\frac{1}{\delta} - 1\right)\right],$$

$$0 \le z_1, z_2 < \infty.$$

类似可得

$$\frac{\partial^2 \overline{F}(z_1, z_2, z_3)}{\partial z_1 \partial z_2} = \prod_{j=1}^{2}\left(z_j^{\frac{1}{\delta}-1}\right)\exp\left[-\left(\sum_{i=1}^{3} z_i^{\frac{1}{\delta}}\right)^{\delta}\right]\left(\sum_{i=1}^{3} z_i^{\frac{1}{\delta}}\right)^{\delta-2}\left[\left(\sum_{i=1}^{3} z_i^{\frac{1}{\delta}}\right)^{\delta} + \left(\frac{1}{\delta} - 1\right)\right],$$

$$0 \le z_1, z_2, z_3 < \infty.$$

假设 $i = n - 1$ 时,

$$\bar{f}(z_1, z_2, \cdots, z_{n-1}) = (-1)^{n-1}\prod_{j=1}^{n-1}\left(z_j^{\frac{1}{\delta}-1}\right)\exp\left[-\left(\sum_{i=1}^{n-1} z_i^{\frac{1}{\delta}}\right)^{\delta}\right]\left(\sum_{i=1}^{n-1} z_i^{\frac{1}{\delta}}\right)^{\delta-n+1}$$

$$\cdot\left[a_{n-1,n-2}\left(\sum_{i=1}^{n-1} z_i^{\frac{1}{\delta}}\right)^{(n-2)\delta}+a_{n-1,n-3}\left(\sum_{i=1}^{n-1} z_i^{\frac{1}{\delta}}\right)^{(n-3)\delta}+\cdots+a_{n-1,0}\right],$$

注意到 $\bar{f}(z_1,z_2,\cdots,z_{n-1})$ 与 $\frac{\partial^{n-1}\overline{F}(z_1,\cdots,z_{n-1},z_n)}{\partial z_1\cdots\partial z_{n-1}}$ 的区别，有 ($n=3$ 时前面已算得)

$$\begin{aligned}\frac{\partial^{n-1}\overline{F}(z_1,\cdots,z_n)}{\partial z_1\cdots\partial z_{n-1}}&=(-1)^{n-1}\prod_{j=1}^{n-1}\left(z_j^{\frac{1}{\delta}-1}\right)\exp\left[-\left(\sum_{i=1}^{n} z_i^{\frac{1}{\delta}}\right)^{\delta}\right]\left(\sum_{i=1}^{n} z_i^{\frac{1}{\delta}}\right)^{\delta-n+1}\\&\cdot\left[a_{n-1,n-2}\left(\sum_{i=1}^{n} z_i^{\frac{1}{\delta}}\right)^{(n-2)\delta}+a_{n-1,n-3}\left(\sum_{i=1}^{n} z_i^{\frac{1}{\delta}}\right)^{(n-3)\delta}+\cdots+a_{n-1,0}\right].\end{aligned}\tag{2.3}$$

为了简便，记 $y=\sum\limits_{i=1}^{n} z_i^{\frac{1}{\delta}}$, 于是有

$$\begin{aligned}&\bar{f}(z_1,z_2,\cdots,z_n)=\frac{\partial^{n}\overline{F}(z_1,\cdots,z_n)}{\partial z_1\cdots\partial z_n}\\=&(-1)^{n-1}\prod_{j=1}^{n-1}\left(z_j^{\frac{1}{\delta}-1}\right)\exp(-y^{\delta})y^{\delta-n+1}\\&\cdot\left[a_{n-1,n-2}y^{(n-2)\delta}+a_{n-1,n-3}y^{(n-3)\delta}+\cdots+a_{n-1,0}\right](-\delta)y^{\delta-1}\left(z_n^{\frac{1}{\delta}-1}\frac{1}{\delta}\right)\\&+(-1)^{n-1}\prod_{j=1}^{n-1}\left(z_j^{\frac{1}{\delta}-1}\right)\exp(-y^{\delta})(\delta-n+1)y^{\delta-n}\\&\cdot\left[a_{n-1,n-2}y^{(n-2)\delta}+a_{n-1,n-3}y^{(n-3)\delta}+\cdots+a_{n-1,0}\right]\left(z_n^{\frac{1}{\delta}-1}\frac{1}{\delta}\right)\\&\cdot(-1)^{n-1}\prod_{j=1}^{n-1}\left(z_j^{\frac{1}{\delta}-1}\right)\exp(-y^{\delta})y^{\delta-n+1}\\&\cdot\left[(n-2)\delta a_{n-1,n-2}y^{(n-2)\delta-1}\left(z_n^{\frac{1}{\delta}-1}\frac{1}{\delta}\right)+\cdots+a_{n-1,1}\delta y^{\delta-1}\left(z_n^{\frac{1}{\delta}-1}\frac{1}{\delta}\right)\right].\end{aligned}\tag{2.4}$$

化简即知 (2.2) 式成立.

从引理 2.1 的证明过程知 $a_{2,1}=1$, $a_{2,0}=(\frac{1}{\delta}-1)$, 我们可以依照上述递推公式算得任意 n 维情况的系数. 比如

3 维： $a_{3,2}=1$, $a_{3,1}=3(\frac{1}{\delta}-1)$, $a_{3,0}=(\frac{1}{\delta}-1)(\frac{2}{\delta}-1)$；

4 维： $a_{4,3}=1$, $a_{4,2}=6(\frac{1}{\delta}-1)$, $a_{4,1}=(\frac{1}{\delta}-1)(\frac{11}{\delta}-7)$, $a_{4,0}=(\frac{1}{\delta}-1)(\frac{2}{\delta}-1)(\frac{3}{\delta}-1)$；

5 维： $a_{5,4}=1$, $a_{5,3}=10(\frac{1}{\delta}-1)$, $a_{5,2}=5(\frac{1}{\delta}-1)(\frac{7}{\delta}-5)$,
$a_{5,1}=5(\frac{1}{\delta}-1)(\frac{2}{\delta}-1)(\frac{5}{\delta}-3)$, $a_{5,0}=(\frac{1}{\delta}-1)(\frac{2}{\delta}-1)(\frac{3}{\delta}-1)(\frac{4}{\delta}-1)$.

对于 $(Z_1,Z_2,\cdots,Z_n)$ 我们再做变量代换：

$$\begin{aligned}&Z_1=U_1^{\delta}\cdots U_{n-1}^{\delta}S,\quad Z_2=U_1^{\delta}\cdots U_{n-2}^{\delta}(1-U_{n-1})^{\delta}S,\cdots,\\&Z_i=U_1^{\delta}\cdots U_{n-i}^{\delta}(1-U_{n-i+1})^{\delta}S,\cdots,Z_{n-1}=U_1^{\delta}(1-U_2)^{\delta}S,\\&Z_n=(1-U_1)^{\delta}S,\ i=\overline{2,n-1}.\end{aligned}\tag{2.5}$$

引理 2.2 $S, U_1, U_2, \cdots, U_{n-1}$ 的联合密度函数为

$$g(s, u_1, u_2, \cdots, u_{n-1}) = (n-1)!\, u_1^{n-2} u_2^{n-3} \cdots u_{n-2} \frac{\mathrm{e}^{-s}\delta^{n-1}}{(n-1)!} \cdot \left[a_{n,n-1}s^{(n-1)} + a_{n,n-2}s^{(n-2)} + \cdots + a_{n,0}\right], \tag{2.6}$$

其中 $0 < u_1, u_2, \cdots, u_{n-1} < 1$, $0 < s < \infty$.

证 容易算得

$$\left|\frac{\partial(z_1, \cdots, z_n)}{\partial(s, u_1, \cdots u_{n-1})}\right|_{n\times n} = (-1)^{\frac{(n-1)(n+4)}{2}} \delta^{n-1} S^{n-1} u_1^{(n-1)\delta-1} \cdots u_{n-1}^{\delta-1}(1-u_1)^{\delta-1} \cdots (1-u_{n-1}). \tag{2.7}$$

结合 (2.2) 式和 (2.7) 式即可得 (2.6) 式.

容易看出 (2.6) 式方括号中的各项只与 S 有关，由此可见， $S, U_1, U_2, \cdots, U_{n-1}$ 相互独立，且 $U_{n-1} \sim U(0,1)$, U_i 的密度函数为 $(n-i)u_i^{n-i-1}$, $0 < u_i < 1 (i = \overline{1, n-2})$, S 的密度函数为 $\frac{\mathrm{e}^{-s}\delta^{n-1}}{(n-1)!} \cdot \left[a_{n,n-1}s^{(n-1)} + a_{n,n-2}s^{(n-2)} + \cdots + a_{n,0}\right]$, 它其实是一些 Γ 分布的混合.

式 (2.5) 把 $Z_1, Z_2, \cdots, Z_n$ 用独立随机变量 $S, U_1, U_2, \cdots, U_{n-1}$ 表示，这样给计算及讨论 $(Z_1, Z_2, \cdots, Z_n)$ 的性质带来了不少方便. 下面我们来讨论关于 $Z_1, Z_2, \cdots, Z_n$ 的数学期望.

引理 2.3

$$E(Z_1^{k_1} Z_2^{k_2} \cdots Z_n^{k_n}) = \Gamma\left(\sum_{i=1}^{n} k_i + 1\right) \frac{\prod\limits_{i=1}^{n} \Gamma(\delta k_i + 1)}{\Gamma\left(\delta \sum\limits_{i=1}^{n} k_i + 1\right)}. \tag{2.8}$$

证

$$E(Z_1^{k_1} \cdots Z_n^{k_n}) = E\left(S^{\sum\limits_{i=1}^{n} k_i}\right) E\left[U_1^{\sum\limits_{i=1}^{n-1} k_i\delta}(1-U_1)^{k_n\delta}\right] \cdots E\left[U_{n-1}^{k_1\delta}(1-U_{n-1})^{k_2\delta}\right], \tag{2.9}$$

其中

$$E\left[U_j^{\sum\limits_{i=1}^{n-j} k_i\delta}(1-U_j)^{\delta k_{n-j+1}}\right] = \int_0^1 u_j^{\sum\limits_{i=1}^{n-j} k_i\delta}(1-u_j)^{\delta k_{n-j+1}}(n-j)u_j^{n-j-1}\mathrm{d}u_j$$

$$= (n-j)\frac{\Gamma\Big(\sum\limits_{i=1}^{n-j} k_i\delta + n - j\Big)\Gamma(\delta k_{n-j+1} + 1)}{\Gamma\Big(\sum\limits_{i=1}^{n-j+1} k_i\delta + n - j + 1\Big)}, \quad (j = 1, 2, \cdots, n-1).$$

当 $n = 2$ 时，容易算得 $E(S^{k_1+k_2}) = \Gamma(k_1 + k_2 + 1)[\delta(k_1 + k_2) + 1]$. 使用数学归纳法可得

$$E\left(S^{\sum\limits_{i=1}^{n}k_i}\right)=\frac{1}{(n-1)!}\Gamma\left(\sum_{i=1}^{n}k_i+1\right)\left(\delta\sum_{i=1}^{n}k_i+n-1\right)\cdots\left(\delta\sum_{i=1}^{n}k_i+1\right).$$

将 $E(S^{\sum\limits_{i=1}^{n}k_i})$ 和 $E\left[U_j^{\sum\limits_{i=1}^{n-j}k_i\delta}(1-U_j)^{\delta k_{n-j+1}}\right](j=\overline{1,n-1})$ 的表示式代入 (2.9), 并利用 Γ 函数的性质即可得 (2.8) 式.

引理 2.4 对于 $i,j,k,l=1,2,\cdots,n$ 且 i,j,k,l 各不相同，有

$$\begin{aligned}
&b_1\widehat{=}D(\ln Z_i)=\frac{\pi^2}{6},\\
&b_2\widehat{=}\mathrm{cov}(\ln Z_i,\ln Z_j)=(1-\delta^2)\frac{\pi^2}{6},\\
&b_3\widehat{=}\mathrm{cov}(\ln Z_i\ln Z_j,\ln Z_i)=-2\zeta(3)-\frac{\gamma}{3}\pi^2+\delta^2\gamma\frac{\pi^2}{6}+2\delta^3\zeta(3),\\
&b_4\widehat{=}\mathrm{cov}(\ln Z_i\ln Z_j,\ln Z_k)=-2\zeta(3)-\frac{\gamma}{3}\pi^2+\delta^2\gamma\frac{\pi^2}{3}+2\delta^3\zeta(3),\\
&b_5\widehat{=}D(\ln Z_i\ln Z_j)=6\zeta(4)+8\zeta(3)\gamma+\frac{\pi^4}{18}+\frac{2}{3}\pi^2\gamma^2-\frac{1}{3}\pi^2\Big(\frac{\pi^2}{6}+\gamma^2\Big)\delta^2\\
&\qquad\qquad-8\gamma\delta^3\zeta(3)+\delta^4\Big(\frac{\pi^4}{36}-6\zeta(4)\Big),\\
&b_6\widehat{=}\mathrm{cov}(\ln Z_i\ln Z_j,\ln Z_i\ln Z_k)=\Big[6\zeta(4)+8\zeta(3)\gamma+\frac{\pi^4}{18}+\frac{2}{3}\pi^2\gamma^2\Big]-\delta^2\Big[\frac{\pi^4}{12}+\frac{1}{2}\pi^2\gamma^2\Big]\\
&\qquad\qquad-8\gamma\delta^3\zeta(3)+\Big[\frac{\pi^4}{36}-6\zeta(4)\Big]\delta^4,\\
&b_7\widehat{=}\mathrm{cov}(\ln Z_i\ln Z_j,\ln Z_l\ln Z_k)=\Big[6\zeta(4)+8\zeta(3)\gamma+\frac{\pi^4}{18}+\frac{2}{3}\pi^2\gamma^2\Big]\\
&\qquad\qquad-\frac{2}{3}\pi^2\left(\frac{\pi^2}{6}+\gamma^2\right)\delta^2-8\gamma\delta^3\zeta(3)+\left[\frac{\pi^4}{18}-6\zeta(4)\right]\delta^4.
\end{aligned}$$

证　b_1,b_2,b_3,b_4,b_5 引自 [3], b_6,b_7 的推导过程与之类似，从略.

引理 2.5

$$\begin{aligned}
&\mathrm{cov}(\ln Z_1\ln Z_2,\cdots,\ln Z_1\ln Z_n,\cdots,\ln Z_{n-1}\ln Z_n,\ln Z_1,\cdots,\ln Z_n)^{\mathbf{T}}\\
=&(a'_{ij})_{\frac{n(n+1)}{2}\times\frac{n(n+1)}{2}}\widehat{=}\sum{}^{**}.
\end{aligned}\tag{2.10}$$

上述列向量的前 $n-1$ 个分量分别为 $\ln Z_1$ 与 $\ln Z_i(i=\overline{2,n})$ 的乘积，第 n 到第 $2n-3$ 个分量分别为 $\ln Z_2$ 与 $\ln Z_i(i=\overline{3,n})$ 的乘积，依此类推，到第 $\frac{n(n-1)}{2}$ 个分量为 $\ln Z_{n-1}$ 与 $\ln Z_n$ 的乘积，列向量余下各分量分别是 $\ln Z_1$ 到 $\ln Z_n$. 记 $\sum^{**}=\begin{pmatrix}A & B\\ B' & C\end{pmatrix}$, 其中 A 是一个 $\frac{n(n-1)}{2}$ 阶的方阵. 第一行中第一个元素是 b_5, 接着 $2(n-2)$ 个元素都是 b_6, 最后 $\frac{(n-2)(n-3)}{2}$ 个元素都是 b_7. A 的其他行中的 $\frac{n(n-1)}{2}$ 个元素中也有 1 个 b_5, $2(n-2)$ 个 b_6, $\frac{(n-2)(n-3)}{2}$ 个 b_7,

只是位置有所不同.

$$B=\begin{pmatrix} b_3, & b_3, & b_4, & \cdots & \cdots & \cdots & b_4 \\ b_3, & b_4, & b_3, & b_4, & \cdots & \cdots & b_4 \\ b_3, & b_4, & b_4, & b_3, & b_4, & \cdots & b_4 \\ & & & \vdots & & & \\ b_4, & \cdots & \cdots & \cdots & b_4, & b_3, & b_3 \end{pmatrix}_{\frac{n(n-1)}{2}\times n}.$$

B 的每一行 n 个元素中有 2 个 b_3, $n-2$ 个 b_4.

$$C=\begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_2 \\ b_2 & b_1 & \cdots & b_2 \\ & & \vdots & \\ b_2 & \cdots & b_2 & b_1 \end{pmatrix}_{n\times n}.$$

除了对角线元素是 b_1 之外, C 的其余元素都是 b_2.

证 利用引理 2.4 的结果即可得到本引理的结论.

引理 2.6

$$\begin{aligned} &\operatorname{cov}(\ln X_1 \ln X_2,\cdots,\ \ln X_1 \ln X_n,\cdots,\ \ln X_{n-1}\ln X_n,\ \ln X_1,\cdots,\ \ln X_n)^{\mathbf{T}} \\ =&(a_{ij})_{\frac{n(n+1)}{2}\times\frac{n(n+1)}{2}} \\ \widehat{=}&\sum{}^{*}. \end{aligned} \tag{2.11}$$

上述列向量的结构类似于 (2.10) 式. 协方差矩阵 $\sum^*$ 的元素有以下 7 种类型 ($i,j,k,l=1,2,\cdots,n$ 且 i,j,k,l 各不相同):

$$\begin{aligned} b_1' &\widehat{=} D(\ln X_i)=\frac{\pi^2}{6}, \\ b_2' &\widehat{=} \operatorname{cov}(\ln X_i,\ln X_j)=(1-\delta^2)\frac{\pi^2}{6}\widehat{=}\delta_T, \\ b_3' &\widehat{=} \operatorname{cov}(\ln X_i\ln X_j,\ln X_i)=\frac{\pi^2}{6}\ln\theta_j+(1-\delta^2)\frac{\pi^2}{6}\ln\theta_i+b_3, \\ b_4' &\widehat{=} \operatorname{cov}(\ln X_i\ln X_j,\ln X_k)=(1-\delta^2)\frac{\pi^2}{6}\ln\theta_i+(1-\delta^2)\frac{\pi^2}{6}\ln\theta_j+b_4, \\ b_5' &\widehat{=} D(\ln X_i\ln X_j)=\frac{\pi^2}{3}(1-\delta^2)\ln\theta_i\ln\theta_j+[(\ln\theta_i)^2+(\ln\theta_j)^2]\frac{\pi^2}{6} \\ &\qquad\qquad +(\ln\theta_i+\ln\theta_j)\cdot 2b_3+b_5, \\ b_6' &\widehat{=} \operatorname{cov}(\ln X_i\ln X_j,\ln X_i\ln X_k) \\ &= b_6+\ln\theta_i\Big[-4\zeta(3)-\frac{2}{3}\pi^2\gamma+4\delta^3\zeta(3)+\frac{2}{3}\gamma\pi^2\delta^2\Big]+(\ln\theta_j+\ln\theta_k)\cdot b_3 \\ &\quad +(\ln\theta_i\ln\theta_k+\ln\theta_i\ln\theta_j+\ln^2\theta_i)\cdot\frac{\pi^2}{6}(1-\delta^2)+\ln\theta_j\ln\theta_k\frac{\pi^2}{6}, \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
b_7' \widehat{=} & \operatorname{cov}(\ln X_i \ln X_j, \ln X_l \ln X_k) \\
= & b_7 + \frac{\pi^4}{36} + \frac{\pi^2\gamma}{3} + \gamma^4 + \frac{\pi^2}{3}\delta^2\Big(\frac{\pi^4}{12} - \gamma^2\Big) + b_4 - \gamma(b_2+\gamma^2)\cdot(\ln\theta_i + \ln\theta_j + \ln\theta_k + \ln\theta_l) \\
& + \Big[(1-\delta^2)\frac{\pi^2}{6} + \gamma^2\Big]\cdot\sum_{u\neq v}\ln\theta_u\ln\theta_v - \gamma\sum_{\substack{u\neq v, u\neq p\\ v\neq p}}\ln\theta_u\ln\theta_v\ln\theta_p + \ln\theta_i\ln\theta_j\ln\theta_k\ln\theta_l,
\end{aligned}
$$

且 $\sum^*$ 的结构类似 $\sum^{**}$.

证　注意到 $Z_i = \frac{X_i}{\theta_i}$　$i=\overline{1,n}$, 并利用引理 2.4 和 2.5 的结果即可.

3　δ 的估计

设 $(X_{1i}, X_{2i}, \cdots, X_{ni})(i=\overline{1,m})$ 是来自总体 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 的样本. 因为 $X_j(j=\overline{1,n})$ 分别服从参数 (期望) 为 θ_j 的指数分布, 很自然把 θ_j 的估计取为

$$\hat{\theta}_j = \sum_{i=1}^m \frac{X_{ji}}{m}, \quad j=\overline{1,n}.$$

下面讨论 δ 的估计. 由引理 2.6, $\operatorname{cov}(\ln X_i, \ln X_j) = \delta_T = (1-\delta^2)\frac{\pi^2}{6}$, 我们可用下述方法估计 δ_T :

$$\hat{\delta}_T = \frac{1}{C_n^2}\sum_{1\le v<u\le n}\Big[\frac{1}{m}\sum_{i=1}^m(\ln X_{ui} - \overline{\ln X_u})(\ln X_{vi} - \overline{\ln X_v})\Big], \tag{3.1}$$

其中 $\overline{\ln X_u} = \frac{1}{m}\sum\limits_{i=1}^m \ln X_{ui}$, $u=\overline{1,n}$, $\overline{\ln X_v} = \frac{1}{m}\sum\limits_{i=1}^m \ln X_{vi}$, $v=\overline{1,n}$. 故

$$\hat{\delta}_T = \frac{1}{C_n^2}\sum_{1\le v<u\le n}\Big[\frac{1}{m}\sum_{i=1}^m \ln X_{ui}\ln X_{vi} - \Big(\frac{1}{m}\sum_{i=1}^m \ln X_{ui}\Big)\Big(\frac{1}{m}\sum_{i=1}^m \ln X_{vi}\Big)\Big]. \tag{3.2}$$

作变量代换

$$Z_{1i} = \frac{X_{1i}}{\theta_1},\ Z_{2i} = \frac{X_{2i}}{\theta_2}, \cdots,\ Z_{ni} = \frac{X_{ni}}{\theta_n}\ (i=\overline{1,m}),$$

注意到

$$\overline{\ln X_j} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^m \ln X_{ji} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^m(\ln Z_{ji} + \ln\theta_j) = \overline{\ln Z_j} + \ln\theta_j, \quad j=\overline{1,n},$$

所以有

$$\hat{\delta}_T = \frac{1}{C_n^2}\sum_{1\le v<u\le n}\Big[\frac{1}{m}\sum_{i=1}^m \ln Z_{ui}\ln Z_{vi} - \Big(\frac{1}{m}\sum_{i=1}^m \ln Z_{ui}\Big)\Big(\frac{1}{m}\sum_{i=1}^m \ln Z_{vi}\Big)\Big]. \tag{3.3}$$

因此，为了简便，我们可由 (3.3) 讨论 $\hat{\delta}_T$ 的性质．由多维中心极限定理，

$$\frac{1}{\sqrt{m}}\sum_{i=1}^{m}\begin{pmatrix}\ln Z_{1i}\ln Z_{2i}-E(\ln Z_{1i}\ln Z_{2i})\\ \vdots\\ \ln Z_{1i}\ln Z_{ni}-E(\ln Z_{1i}\ln Z_{ni})\\ \vdots\\ \ln Z_{n-1i}\ln Z_{ni}-E(\ln Z_{n-1i}\ln Z_{ni})\\ \ln Z_{1i}-E(\ln Z_{1i})\\ \vdots\\ \ln Z_{ni}-E(\ln Z_{ni})\end{pmatrix}\xrightarrow{L} N\Big(\underset{\sim}{0},\sum{}^{**}\Big)\qquad(m\to\infty),\tag{3.4}$$

其中 $\underset{\sim}{0}=(0,0,\cdots,0)'$, $\sum^{**}$ 如 (2.10) 所示．记

$$\beta'_{jk}=E(\ln Z_{ji}\ln Z_{ki})=\gamma^2+(1-\delta^2)\frac{\pi^2}{6},\ j\neq k,\ 1\leq j,\quad k\leq n,\quad 1\leq i\leq m,$$
$$\alpha'_j=E(\ln Z_{ji})=-\gamma,\quad 1\leq i\leq m,\ 1\leq j\leq n,$$

于是

$$\delta_T=(1-\delta^2)\frac{\pi^2}{6}=\frac{1}{C_n^2}\sum_{1\leq j<k\leq n}(\beta'_{jk}-\alpha'_j\alpha'_k).$$

记

$$\begin{aligned}\overline{M}&=\frac{\partial\delta_T}{\partial(\beta'_{12},\cdots,\beta'_{(n-1)n},\alpha'_1,\cdots,\alpha'_n)}=\frac{1}{C_n^2}\Big(1,\cdots,1,-\sum_{j\neq 1}\alpha'_j,\cdots,-\sum_{j\neq n}\alpha'_n\Big)\\&=\frac{1}{C_n^2}(1,\cdots,1,(n-1)\gamma,\cdots,(n-1)\gamma)\widehat{=}(D,E).\end{aligned}$$

其中 D 是每个元素都是 1 的 $\frac{n(n-1)}{2}$ 阶行向量，E 是每个元素都是 $(n-1)\gamma$ 的 n 阶行向量．所以

$$\overline{M}\sum{}^{**}\overline{M'}=\frac{1}{(C_n^2)^2}(1,\cdots,1,(n-1)\gamma,\cdots,(n-1)\gamma)(a'_{ij})\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\\ (n-1)\gamma\\ \vdots\\ (n-1)\gamma\end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}=&\Big[n(n-1)^2\gamma^2b_1+n(n-1)^3\gamma^2b_2+2n(n-1)^2\gamma b_3+n(n-1)^2(n-2)\gamma b_4\\&+\frac{n(n-1)}{2}b_5+n(n-1)(n-2)b_6+\frac{1}{4}n(n-1)(n-2)(n-3)b_7\Big]\cdot\frac{1}{(C_n^2)^2}\\=&\frac{n(n-1)}{(C_n^2)^2}\Bigg\{n(n-1)\Big(\frac{3}{2}\zeta(4)+\frac{\pi^4}{72}\Big)-(n-2)(n-3)\delta^2\Big[\frac{\pi^2}{8}\gamma+\frac{\pi^2}{8}\gamma^2+\frac{3}{4}\gamma^3(\gamma+1)\Big]\\&+\frac{\gamma}{4}(n-2)(n-3)\delta^3\Big(13\gamma^3+9\gamma^2+\frac{13}{6}\pi\gamma^2-2\pi^2\gamma-\frac{\pi^2}{2}\Big)\end{aligned}$$

$$- \delta^4 \bigg[\frac{3}{2}n(n-1)\zeta(4) - \frac{\pi^4}{72}(n^2-3n+3)$$
$$+ \frac{1}{4}(n-2)(n-3)(2\zeta(3)+14\gamma\zeta(3)+2\pi^2\gamma^2+7\gamma^4-\pi^2\gamma+\gamma^3)\bigg]\bigg\}. \tag{3.5}$$

由 Delta 法 (见 [4]) 得 $\sqrt{m}(\hat{\delta}_T-\delta_T) \xrightarrow{L} N(0,\sigma^2_{\delta_T}), m\to\infty$, 其中 $\sigma^2_{\delta_T}=\bar{M}\sum^{**}\bar{M}'$. 容易看到 $\sigma^2_{\delta_T}$ 仅与 δ 有关. 依照上述公式可算得 $n=2,3,4$ 情况下关于 $\hat{\delta}_T$ 的渐近方差:

2 维: $\sigma^2_{\delta_T}=6\zeta(4)+\frac{\pi^4}{18}-\frac{\pi^4}{18}\delta^2+\big(\frac{\pi^4}{36}-6\zeta(4)\big)\delta^4$,

3 维: $\sigma^2_{\delta_T}=6\zeta(4)+\frac{\pi^4}{18}-\frac{2\pi^4}{27}\delta^2+\big(\frac{\pi^4}{36}-6\zeta(4)\big)\delta^4$,

4 维: $\sigma^2_{\delta_T}=6\zeta(4)+\frac{\pi^4}{18}-\frac{2}{3}\delta^2\big[\frac{\pi^2}{8}\gamma+\frac{\pi^2}{8}\gamma^2+\frac{3}{4}\gamma^3(\gamma+1)\big]+\frac{\gamma\delta^3}{6}\big(13\gamma^3+9\gamma^2+\frac{13}{6}\pi\gamma^2-2\pi\gamma-\frac{\pi^2}{2}\big)$
$+\frac{\delta^4}{3}\big[\frac{7}{72}\pi^4-18\zeta(4)-\zeta(3)-7\gamma\zeta(3)-\pi^2\gamma^2-\frac{7}{2}\gamma^4+\frac{\pi^2}{2}\gamma-\frac{\gamma^3}{2}\big]$.

由 $\delta_T=(1-\delta^2)\frac{\pi^2}{6}$ 得 $\delta=\sqrt{1-\frac{6\delta_T}{\pi^2}}\hat{=}g(\delta_T)$, $\delta'=g'(\delta_T)=-\frac{3}{\pi^2\delta}$.

我们提出 δ 的如下估计

$$\hat{\delta}=g(\hat{\delta}_T)=\sqrt{1-\frac{6\hat{\delta}_T}{\pi^2}}. \tag{3.6}$$

由 Delta 法得

$$\sqrt{m}(\hat{\delta}-\delta)=\sqrt{m}(g(\hat{\delta}_T)-g(\delta_T)) \xrightarrow{L} N(0,\sigma^2_{\delta}), \quad m\to\infty, \tag{3.7}$$

其中 $\sigma^2_\delta=[g'(\delta_T)\cdot\sigma_{\delta_T}]^2$. 又由矩估计的性质容易知道，估计 $\hat{\delta}$ 是 δ 的强相合估计. 归纳以上讨论便可获得如下定理.

定理 3.1 设总体 $(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 服从生存函数为 (1.1) 的多维指数分布，$(X_{1i},\cdots,X_{ni})$ $(i=\overline{1,m})$ 是来自总体 $(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 的样本，那么由 (3.6) 定义的估计 $\hat{\delta}$, (1) 是 δ 的强相合估计; (2) 具有渐近正态性 $\sqrt{m}(\hat{\delta}-\delta)\xrightarrow{L}N(0,\sigma^2_\delta)$ $m\to\infty$, 其中 σ^2_δ 如 (3.7) 所示.

由此我们可以算得 $n=2,3,4$ 情况下 $\hat{\delta}$ 的渐近方差:

2 维: $\sigma^2_\delta=\frac{1}{20\delta^2}(22-10\delta^2-7\delta^4)$,

3 维: $\sigma^2_\delta=\frac{1}{20\delta^2}(22-\frac{40}{3}\delta^2-7\delta^4)$,

4 维: $\sigma^2_\delta=\frac{11}{10\delta^2}-\frac{6}{\pi^4}\Big[\frac{\pi^2}{8}\gamma+\frac{\pi^2}{8}\gamma^2+\frac{3}{4}\gamma^3(\gamma+1)\Big]+\frac{\gamma\delta}{2\pi^4}\Big(13\gamma^3+9\gamma^2+\frac{13}{6}\pi\gamma^2-2\pi\gamma-\frac{\pi^2}{2}\Big)$
$+\frac{3}{\pi^4}\delta^2\Big[\frac{7}{72}\pi^4-18\zeta(4)-\zeta(3)-7\gamma\zeta(3)-\pi^2\gamma^2-\frac{7}{2}\gamma^4+\frac{\pi^2}{2}\gamma-\frac{\gamma^3}{2}\Big]$.

4 模拟结果

根据 (2.5) 式,我们在计算机中产生容量为 100 的 3 维指数分布的伪随机样本 (X_{1i},X_{2i},X_{3i}) $(i=1,2,\cdots,100)$. 产生这组样本时取 $\theta_1=0.8,\theta_2=0.6,\theta_3=0.7$, δ 分别取 0.1–0.9. 于是由这 9 组样本按 (3.2) 和 (3.6) 对每一个 δ 各产生一个估计. 将上述过程重复 20 次. 第 l 次获得的估计记为 $\hat{\delta}_l$, 又记 $\hat{\delta}=\frac{1}{20}\sum\limits_{l=1}^{20}\hat{\delta}_l$, 将 δ, 估计值 $\hat{\delta}$ 和 “偏” $\hat{\delta}-\delta$ 列表如下. 从表中的数据可以看出，本文提出的 δ 的估计其性质是好的.

δ	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
$\hat{\delta}$	0.174390	0.191192	0.298686	0.402848	0.491682
$\hat{\delta}-\delta$	0.074390	−0.008808	−0.001314	0.002848	−0.008318

δ	0.6	0.7	0.8	0.9
$\hat{\delta}$	0.609156	0.692481	0.800120	0.901267
$\hat{\delta}-\delta$	0.009156	−0.007519	0.000120	0.001267

参 考 文 献

[1] Gumbel E J. Bivariate exponential distribution. *JASA*, 1960, **55**: 698–707.

[2] Hougaard P A. Class of multivariate failure time distribution. *Biometrika*, 1986, **73**(3): 671–678.

[3] 叶慈南. GBVE 分布相关参数的矩型估计. 应用数学学报, 2003, **26**(1): 62–71.

[4] Rao C R. Linear Statistical Inference and Its Application, New York: John Wiley & Son, 1973.

[5] Lee L. Multivariate distribution having weibull properties. *Journal of Multivariate Analysis*, 1979, **9**: 267–277.

[6] 陈希孺. 《数理统计引论》. 北京：科学出版社, 1981.

[7] 叶慈南. GBVE 分布的参数估计. 系统科学与数学, 1995, **15**(1): 39–49.

[8] 茆诗松, 王静龙, 濮晓龙. 《高等数理统计》. 北京：高等教育出版社, 施普林格出版社, 1998.

ESTIMATORS OF PARAMETERS FOR A CLASS OF MULTIVARIATE EXPONENTIAL DISTRIBUTION

Xu Dongyuan Ye Cinan Wang Meichen

(*College of Science, University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai* 200093)

Abstract In this paper, the authors consider a class of multivariate exponential distributions with survival function

$$\overline{F}(x_1,x_2,\cdots,x_n)=P\{X_1>x_1,\cdots,X_n>x_n\}=\exp\left\{-\left[\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i}{\theta_i}\right)^{\frac{1}{\delta}}\right]^{\delta}\right\},$$

where $0<x_i<\infty$, $0<\delta\le 1$, $0<\theta_i<\infty$, $i=\overline{1,n}$. The density function is given and its properties are discussed. The estimator $\hat{\delta}$ of the parameter δ is proposed, its consistence and asymptotic normality are established, and the asymptotic variance σ_{δ}^2 is derived. Some simulation results are provided.

Key words Multivariate exponential distribution, parameters estimation, correlation parameter, asymptotic property.