第50卷第4期 数学学报中文版 Vol.50, No.4
2007年7月 ACTA MATHEMATICA SINICA, Chinese Series Jul., 2007

文章编号: 0583-1431(2007)04-0729-08 **文献标识码: A**

ρ- 混合序列部分和乘积的几乎处处极限定理

金敬森

台州学院数学系 临海 317000
E-mail: jinjingsen@tzc.edu.cn

王建峰

浙江省地方税务局 杭州 310007
E-mail: wangjf.zju@163.com

张立新

浙江大学数学系 杭州 310028

摘 要 设 $\{X_n, n \geq 1\}$ 是一严平稳的 ρ- 混合的正的随机变量序列, 且 $\mathsf{E}X_1 = \mu > 0$, $\mathrm{Var}(X_1) = \sigma^2$. 记 $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ 和 $\gamma = \sigma/\mu$. 在较弱的条件下, 证明了对任意的 x,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\log n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} I\left\{ \left(\frac{\prod_{j=1}^k S_j}{k!\mu^k} \right)^{1/(\gamma\sigma_1\sqrt{k})} \leq x \right\} = F(x), \quad \text{a.s.},$$

其中 $\sigma_1^2 = 1 + \frac{2}{\sigma^2} \sum_{j=2}^\infty \mathrm{Cov}(X_1, X_j)$, $F(\cdot)$ 是随机变量 $e^{\sqrt{2}\mathcal{N}}$ 的分布函数, $\mathcal{N}$ 是标准正态随机变量. 我们的结果推广了 i.i.d 时的情形.

关键词 几乎处处极限定理; 部分和乘积; ρ 混合
MR(2000) 主题分类 60F15, 60F05
中图分类 O211.4

An Almost Sure Limit Theorem of Products of Sums for ρ-Mixing Sequences

Jing Sen JIN

Department of Mathematics, Taizhou University, Linhai 317000*, P. R. China*
E-mail: jinjingsen@tzc.edu.cn

Jian Feng WANG

Zhejiang Local Taxation Bureau, Hangzhou 310007*, P. R. China*
E-mail: wangjf.zju@163.com

Li Xin ZHANG

Department of Mathematics, Zhejiang University, Hangzhou 310028*, P. R. China*

Abstract Let $\{X_n, n \geq 1\}$ be a strictly stationary ρ-mixing sequence of positive random variables with $\mathsf{E}X_1 = \mu > 0$ and $\mathrm{Var}(X_1) = \sigma^2$. Denote $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ and $\gamma = \sigma/\mu$.

收稿日期: 2005-05-18; 接受日期: 2006-06-06
基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (10471126)

Under suitable conditions, we show that for any x,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\log n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}I\left\{\left(\frac{\prod_{j=1}^{k}S_j}{k!\mu^k}\right)^{1/(\gamma\sigma_1\sqrt{k})}\le x\right\}=F(x),\quad \text{a.s.},$$

where $\sigma_1^2=1+\frac{2}{\sigma^2}\sum_{j=2}^{\infty}\mathrm{Cov}(X_1,X_j)$, $F(\cdot)$ is the distribution function of the random variable $e^{\sqrt{2}\mathcal{N}}$, $\mathcal{N}$ is a standard normal random variable. The result of Khurelbaatar and Rempała is a special case of ours.

Keywords almost sure limit theorem; products of sums; ρ-mixing
MR(2000) Subject Classification 60F15, 60F05
Chinese Library Classification O211.4

1 引言及结果

根据破产理论, 导致保险公司破产的往往是那些以小概率发生的大额索赔. 因此, 大额索赔的发生规律是破产理论的重要研究内容之一, 其中包括对记录值分布规律的研究. 设 $\{X_n,n\ge 1\}$ 是 i.i.d. 随机变量序列, 服从某个共同的连续的分布函数 $F(x)$. 称 X_k 是一个记录值, 当且仅当 $X_k>\max\{X_1,\dots,X_{k-1}\}$. 为方便起见, 约定 X_1 是一个记录值, 并将它记为 $X^{(1)}$. 令 $L_1=1$, $L_n=\min\{k>L_{n-1},\ X_k>X_{L_{n-1}}\}$ $(n\ge 2)$, 称 $\{X^{(n)}=X_{L_n},n\ge 1\}$ 为 $\{X_n,n\ge 1\}$ 的 "记录值序列". 我们关注记录值的部分和 $T_n=\sum_{j=1}^{n}X^{(j)}$. 1998 年, 文 [1] 证明了如果 X_1 服从 Gumbel 分布, 即 X_1 的分布函数为 $F_{X_1}(x)=1-e^{-e^x}$, $x\in R$, 则

$$\frac{T_n-(n+1)\log n+n}{\sqrt{2n}}\xrightarrow{\mathscr{D}}\mathcal{N}(0,1).\tag{1.1}$$

定义

$$\psi(u)=F^{-1}(1-e^{-u})$$

(其中 $F^{-1}(y)=\sup\{x:F(x)\le y\}$), 可以证明 [1], 对任意的 n,

$$(X^{(1)},X^{(2)},\dots,X^{(n)})\overset{d}{=}\left(\psi(X_1^*),\psi(X_1^*+X_2^*),\dots,\psi\left(\sum_{i=1}^{n}X_i^*\right)\right),\tag{1.2}$$

其中 $\overset{d}{=}$ 表示同分布和 $X_1^*,X_2^*,\dots,X_n^*$ 是 i.i.d. 的服从标准 (即参数为 1 的) 指数分布的随机变量. 对于 Gumbel 分布, 我们有 $\psi(u)=\log u$. 因此, 从 (1.1) 和 (1.2) 式可得

$$\frac{\sum_{j=1}^{n}\log S_j-(n+1)\log n+n}{\sqrt{2n}}\xrightarrow{\mathscr{D}}\mathcal{N}(0,1),\tag{1.3}$$

其中 $S_j=\sum_{i=1}^{j}X_i^*$. 应用 Stirling 公式, (1.3) 式等价于

$$\left(\prod_{j=1}^{n}\frac{S_j}{j}\right)^{1/\sqrt{n}}\xrightarrow{\mathscr{D}}e^{\sqrt{2}\mathcal{N}}.\tag{1.4}$$

因此可以把对于记录值部分和 T_n 的极限分布的研究归结为研究部分和乘积的极限分布. 2002 年, 文 [2] 讨论了 i.i.d. 随机变量序列的部分和乘积的极限分布, 得到了

定理 A 设 $\{X_n,n\ge 1\}$ 是 i.i.d. 的正的随机变量序列, 且 $\mathsf{E}X_1=\mu>0$, $\mathrm{Var}(X_1)=\sigma^2<\infty$. 记 $S_n=\sum_{j=1}^{n}X_j$ 和 $\gamma=\sigma/\mu$. 则

$$\left(\frac{\prod_{j=1}^{n}S_j}{n!\mu^n}\right)^{1/(\gamma\sqrt{n})}\xrightarrow{\mathscr{D}}e^{\sqrt{2}\mathcal{N}}.\tag{1.5}$$

近来, 文 [3] 证明了关于 i.i.d. 随机变量部分和乘积 $\prod_{j=1}^{n} S_j$ 的几乎处处极限定理.

定理 B 设 $\{X_n, n \geq 1\}$ 是 i.i.d. 的正的随机变量序列, 且 $\mathsf{E}X_1 = \mu > 0$, $\mathrm{Var}(X_1) = \sigma^2 < \infty$. 记 $S_n = \sum_{j=1}^{n} X_j$ 和 $\gamma = \sigma/\mu$, 则对任意的 x

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\log n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} I\left\{ \left(\frac{\prod_{j=1}^{k} S_j}{k!\mu^k} \right)^{1/(\gamma\sqrt{k})} \leq x \right\} = F(x), \quad \text{a.s.} \tag{1.6}$$

这里及下文中, $I\{\cdot\}$ 表示示性函数和 $F(\cdot)$ 是随机变量 $e^{\sqrt{2}\mathscr{N}}$ 的分布函数, 即 $F(x) = \mathsf{P}(e^{\sqrt{2}\mathscr{N}} \leq x)$.

本文将要讨论关于 ρ- 混合随机变量序列的部分和乘积的几乎处处极限定理. 设 $\{X_n, n \geq 1\}$ 是定义在概率空间 $(\Omega, \mathscr{F}, \mathsf{P})$ 上的实值随机变量序列. 记 $\mathscr{F}_a^b = \sigma(X_i, a \leq i \leq b)$. 序列 $\{X_n, n \geq 1\}$ 说是 ρ- 混合的, 若

$$\rho(n) := \sup_{k\geq 1,\, X\in L^2(F_1^k),\, Y\in L^2(F_{k+n}^{\infty})} |\mathrm{Corr}(X, Y)| \to 0, \quad n \to \infty;$$

序列 $\{X_n, n \geq 1\}$ 说是 φ- 混合的, 若

$$\varphi(n) := \sup_{k\geq 1,\, A\in F_1^k,\, B\in F_{k+n}^{\infty},\, P(A)\neq 0} |P(B|A) - P(B)| \to 0, \quad n \to \infty.$$

我们得到了下面的结果.

定理 设 $\{X_n, n \geq 1\}$ 是严平稳的 ρ- 混合的正的随机变量序列, 且 $\mathsf{E}X_1 = \mu > 0$, $\mathrm{Var}(X_1) = \sigma^2 < \infty$. 记 $S_n = \sum_{j=1}^{n} X_j$ 和 $\gamma = \sigma/\mu$. 假设

(C1) 对某个 $\epsilon > 2$, $\rho(n) = O(n^{-1}(\log n)^{-\epsilon})$;

(C2) $\sigma_1^2 := 1 + \frac{2}{\sigma^2} \sum_{j=2}^{\infty} \mathrm{Cov}(X_1, X_j) > 0$,

则对任意的 x,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\log n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} I\left\{ \left(\frac{\prod_{j=1}^{k} S_j}{k!\mu^k} \right)^{1/(\gamma\sigma_1\sqrt{k})} \leq x \right\} = F(x), \quad \text{a.s.} \tag{1.7}$$

注 1 (i) 显然地, 定理 B 是定理的特殊情形.

(ii) 由下面的引理 2.1 和条件 (C1) 和 $\mathrm{Var}(X_1) < \infty$ 可知

$$0 < \sigma_1^2 \leq 1 + \frac{8}{\sigma^2} \sum_{i=1}^{\infty} \rho(i) \mathsf{E}X_1^2 < \infty.$$

既然 φ- 混合序列是 ρ- 混合的且 $\rho(n) \leq 2\varphi^{1/2}(n)$. 因此, 我们立即获得关于 φ- 混合随机变量序列的部分和乘积的几乎处处极限定理.

推论 设 $\{X_n, n \geq 1\}$ 是严平稳的 φ- 混合的正的随机变量序列, 且 $\mathsf{E}X_1 = \mu > 0$, $\mathrm{Var}(X_1) = \sigma^2 < \infty$. 记 $S_n = \sum_{j=1}^{n} X_j$ 和 $\gamma = \sigma/\mu$. 假设 $\varphi(n) = O(n^{-2}(\log n)^{-2\epsilon})$, 某个 $\epsilon > 2$ 和 $\sigma_1^2 > 0$, 则对任意的 x,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\log n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} I\left\{ \left(\frac{\prod_{j=1}^{k} S_j}{k!\mu^k} \right)^{1/(\gamma\sigma_1\sqrt{k})} \leq x \right\} = F(x), \quad \text{a.s.} \tag{1.8}$$

2 定理的证明

令 $b_{k,n} = \sum_{i=k}^{n} 1/i$, 当 $k \leq n$; $b_{k,n} = 0$, 当 $k > n$. 记 $\tilde{S}_n = \sum_{k=1}^{n} Y_k$ 和 $S_{n,n} = \sum_{k=1}^{n} b_{k,n} Y_k$, 其中 $Y_k = (X_k - \mu)/\sigma$, $k \geq 1$. 令 $\sigma_n^2 = \mathrm{Var}(S_{n,n})$, C 表示一个正常数, 其值在不同的地方可以取不同的值和 $a \wedge b = \min(a, b)$.

定理的证明需要下面的引理.

引理 2.1 设 $\{X_n, n \geq 1\}$ 是 ρ- 混合随机变量序列, $X \in L_p(F_1^k)$, $Y \in L_q(F_{k+n}^\infty)$, $p, q > 1$ 且 $1/p + 1/q = 1$, 那么 $|\mathsf{E}XY - \mathsf{E}X\mathsf{E}Y| \leq 4[\rho(n)]^{\frac{2}{p}\wedge\frac{2}{q}}||X||_p||Y||_q$, 其中 $||X||_p = [\mathsf{E}|X|^p]^{1/p}$.

证明 参见文 [4, 引理 1.2.7].

引理 2.2 设 $\{X_n, n \geq 1\}$ 是同分布的 ρ- 混合随机变量序列, 且 $\mathsf{E}X_1 = 0$, $\mathsf{E}|X_1|^p < \infty$, $1 \leq p < 2$. 记 $S_n = \sum_{j=1}^n X_j$. 假设 $\sum_{n=1}^\infty \rho(2^n) < \infty$, 那么 $n^{-1/p}S_n \to 0$ a.s. $n \to \infty$.

证明 参见著作 [4, 推论 8.4.2].

引理 2.3 设 $\{X_n, n \geq 1\}$ 是 ρ- 混合随机变量序列, 且 $\mathsf{E}X_n = 0$ 和 $\sum_{n=1}^\infty \rho(2^n) < \infty$. 设 $\{a_{ni}, 1 \leq i \leq n\}$ 是一实数列且满足

$$\sup_n \sum_{i=1}^n a_{ni}^2 < \infty \quad 和 \quad \max_{1\leq i\leq n} |a_{ni}| \to 0 \quad (n \to \infty).$$

假设 $\{X_n^2\}$ 一致可积和 $\mathrm{Var}(\sum_{i=1}^n a_{ni}X_i) = 1$, 那么

$$\sum_{i=1}^n a_{ni}X_i \xrightarrow{\mathscr{D}} \mathscr{N}(0,1).$$

证明 参见文 [5, 定理 2.2].

引理 2.4 在定理的条件下, 我们有 $\frac{\sigma_n^2}{2n-b_{1,n}} \to \sigma_1^2$, $n \to \infty$.

证明 易知 $\{Y_n\}$ 仍是一严平稳的 ρ- 混合序列, 且 $\mathsf{E}Y_1 = 0$, $\mathsf{E}Y_1^2 = 1$. 首先

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n b_{k,n}^2 &= \sum_{k=1}^n b_{k,n} \sum_{i=k}^n 1/i = b_{1,n} + \sum_{i=2}^n \sum_{k=1}^i b_{k,n}/i \\ &= b_{1,n} + \sum_{i=2}^n \frac{1}{i}\left[\sum_{k=1}^i \sum_{j=k}^n 1/j\right] = b_{1,n} + \sum_{i=2}^n \frac{1}{i} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^{j\wedge i} \frac{1}{j} \\ &= b_{1,n} + \sum_{i=2}^n \left[\sum_{j=1}^{i-1} \frac{1}{i} + \sum_{j=i}^n 1/j\right] = b_{1,n} + 2\sum_{i=2}^n \sum_{j=1}^{i-1} \frac{1}{i} = 2n - b_{1,n}. \end{aligned} \tag{2.1}$$

再由平稳性和 $\mathsf{E}Y_1^2 = 1$ 可知

$$\begin{aligned}\frac{\sigma_n^2}{2n-b_{1,n}} &= \frac{1}{2n-b_{1,n}} \sum_{i=1}^n b_{i,n}^2 \mathsf{E}Y_i^2 + \frac{2}{2n-b_{1,n}} \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n b_{i,n}b_{j,n}\mathrm{Cov}(Y_i, Y_j) \\ &= 1 + \frac{2}{2n-b_{1,n}} \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{n-i} b_{i,n}b_{i+j,n}\mathrm{Cov}(Y_1, Y_{j+1}) \\ &= 1 + \frac{2}{2n-b_{1,n}} \sum_{j=2}^{n} \sum_{i=1}^{n+1-j} b_{i,n}b_{i+j-1,n}\mathrm{Cov}(Y_1, Y_j) \\ &= 1 + \frac{2}{2n-b_{1,n}} \sum_{j=2}^{n} \left[\sum_{i=1}^{n} - \sum_{i=n-j+2}^{n}\right] b_{i,n}[b_{i,n} - b_{i,i+j-2}]\mathrm{Cov}(Y_1, Y_j) \\ &= 1 + \frac{2}{2n-b_{1,n}} \sum_{j=2}^{n} \sum_{i=1}^{n} b_{i,n}^2 \mathrm{Cov}(Y_1, Y_j) - \frac{2}{2n-b_{1,n}} \sum_{j=2}^{n} \sum_{i=n-j+2}^{n} b_{i,n}^2 \mathrm{Cov}(Y_1, Y_j) \\ &\quad - \frac{2}{2n-b_{1,n}} \sum_{j=2}^{n} \sum_{i=1}^{n+1-j} b_{i,n}b_{i,i+j-2}\mathrm{Cov}(Y_1, Y_j). \end{aligned} \tag{2.2}$$

综合上面两式可得

$$\begin{aligned}\left|\frac{\sigma_n^2}{2n-b_{1,n}}-\sigma_1^2\right| &\le \frac{2}{2n-b_{1,n}}\sum_{j=2}^{n}\sum_{i=n-j+2}^{n} b_{i,n}^2|\mathrm{Cov}(Y_1,Y_j)| \\ &\quad +\frac{2}{2n-b_{1,n}}\sum_{j=2}^{n}\sum_{i=1}^{n+1-j} b_{i,n}b_{i,i+j-2}|\mathrm{Cov}(Y_1,Y_j)|+2\sum_{j=n+1}^{\infty}|\mathrm{Cov}(Y_1,Y_j)| \\ &:= I_1+I_2+I_3. \end{aligned} \tag{2.3}$$

利用引理 2.1, 条件 (C1) 和 $b_{i,n}\le C\log n$, $i\ge 1$, $n\ge 1$, 对某个 $\epsilon>2$, 有

$$I_1\le \frac{C(\log n)^2}{2n-b_{1,n}}\sum_{j=2}^{n}(j-1)|\mathrm{Cov}(Y_1,Y_j)|\le C\frac{n(\log n)^{2-\epsilon}}{2n-b_{1,n}}\to 0\quad (n\to\infty) \tag{2.4}$$

和

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{2}{2n-b_{1,n}}\sum_{j=2}^{n}\left[\sum_{i=1}^{n+1-j} b_{i,i+j-2}\sum_{k=i}^{n}1/k\right]|\mathrm{Cov}(Y_1,Y_j)| \\ &= \frac{2}{2n-b_{1,n}}\sum_{j=2}^{n}\left[\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k\wedge(n+1-j)} b_{i,i+j-2}\right]|\mathrm{Cov}(Y_1,Y_j)| \\ &= \frac{2}{2n-b_{1,n}}\sum_{j=2}^{n}\left[\sum_{k=1}^{n-j}\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} b_{i,i+j-2}+\sum_{k=n+1-j}^{n}\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{n+1-j} b_{i,i+j-2}\right]|\mathrm{Cov}(Y_1,Y_j)| \\ &:= \frac{2}{2n-b_{1,n}}\sum_{j=2}^{n}[I_{21}+I_{22}]|\mathrm{Cov}(Y_1,Y_j)|, \end{aligned}$$

其中

$$I_{21}=\sum_{k=1}^{n-j}\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\sum_{l=i}^{i+j-2}1/l\le \sum_{k=1}^{n-j}\frac{1}{k}\sum_{l=1}^{k+j-2}(j-1)/l\le C\sum_{k=1}^{n-j}\frac{j-1}{k}\log(k+j-2)$$

和

$$I_{22}=\sum_{k=n+1-j}^{n}\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{n+1-j}\sum_{l=i}^{i+j-2}1/l\le \sum_{k=n+1-j}^{n}\frac{1}{k}\sum_{l=1}^{n-1}(j-1)/l\le C\sum_{k=n+1-j}^{n}\frac{j-1}{k}\log n.$$

因此

$$I_2\le \frac{C}{2n-b_{1,n}}\sum_{j=2}^{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{j-1}{k}\log n|\mathrm{Cov}(Y_1,Y_j)|\le C\frac{n(\log n)^{2-\epsilon}}{2n-b_{1,n}}\to 0\quad (n\to\infty). \tag{2.5}$$

再次利用引理 2.1 和条件 (C1) 得到

$$I_3\le 8\sum_{j=n}^{\infty}\rho(j)\to 0\quad (n\to\infty). \tag{2.6}$$

结合 (2.3)–(2.6) 式, 引理得证.

引理 2.5 在定理的条件下, 对任意的 x,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\log n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}I\{S_{k,k}/(\sqrt{2k}\sigma_1)\le x\}=\Phi(x),\quad \text{a.s.} \tag{2.7}$$

证明 注意 $\{Y_n\}$ 是严平稳的 ρ- 混合序列, 且 $\mathsf{E}Y_1=0$, $\mathsf{E}Y_1^2=1$. 我们首先证明

$$\frac{S_{n,n}}{\sqrt{2n}\sigma_1}\xrightarrow{\mathscr{D}}\mathscr{N}(0,1)\qquad n\to\infty. \tag{2.8}$$

令 $a_{ni}=b_{i,n}/\sigma_n$, $1\le i\le n$, $n\ge 1$. 显然地, $\mathrm{Var}(\sum_{k=1}^n a_{nk}Y_k)=1$ 和 $\sum_{n=1}^\infty\rho(2^n)<\infty$. 应用引理 2.4 可得 $\sigma_n^2=(2n-b_{1,n})\sigma_1^2(1+o(1))$. 因此, 由 (2.1) 式可知

$$\sup_n\sum_{i=1}^n a_{ni}^2=\sup_n\frac{2n-b_{1,n}}{(2n-b_{1,n})\sigma_1^2(1+o(1))}<\infty$$

和

$$\max_{1\le i\le n}|a_{ni}|\le C\log n/\sqrt{(2n-b_{1,n})\sigma_1^2(1+o(1))}\to 0\qquad n\to\infty.$$

故应用引理 2.3 和引理 2.4, (2.8) 式成立.

令 $f(x)$ 是一个有界的 Lipschitz 函数. 由 (2.8) 式可得

$$\mathsf{E}f(S_{n,n}/(\sqrt{2n}\sigma_1))\to\mathsf{E}f(\mathscr{N}(0,1)),\quad n\to\infty. \tag{2.9}$$

另一方面, 从文 [6, 第二节] 和文 [7, 定理 7.1] 可知, (2.7) 式等价于

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\log n}\sum_{k=1}^n\frac{1}{k}f(S_{k,k}/(\sqrt{2k}\sigma_1))=\mathsf{E}f(\mathscr{N}(0,1)),\quad \text{a.s.} \tag{2.10}$$

因此, 为了证明 (2.7) 式, 我们只需证明

$$T_n:=\frac{1}{\log n}\sum_{k=1}^n\frac{1}{k}[f(S_{k,k}/(\sqrt{2k}\sigma_1))-\mathsf{E}f(S_{k,k}/(\sqrt{2k}\sigma_1))]\to 0,\quad \text{a.s.} \tag{2.11}$$

记 $\xi_k=f(S_{k,k}/(\sqrt{2k}\sigma_1))-\mathsf{E}f(S_{k,k}/(\sqrt{2k}\sigma_1))$, $1\le k\le n$. 我们有

$$\begin{aligned}\mathsf{E}T_n^2&=\frac{1}{\log^2 n}\mathsf{E}\Big(\sum_{k=1}^n\xi_k/k\Big)^2\\&\le\frac{1}{\log^2 n}\sum_{\substack{1\le k<l\le n\\2k\ge l}}|\mathsf{E}\xi_k\xi_l|/(kl)+\frac{1}{\log^2 n}\sum_{\substack{1\le k<l\le n\\2k<l}}|\mathsf{E}\xi_k\xi_l|/(kl):=I_1+I_2.\end{aligned} \tag{2.12}$$

既然 f 是有界的

$$I_1\le\frac{C}{\log^2 n}\sum_{k=1}^n\sum_{l=k+1}^{2k}1/(kl)\le C\log^{-1}n. \tag{2.13}$$

现在估计 I_2. 如果 $l>2k$, 我们有

$$\begin{aligned}S_{l,l}-S_{2k,2k}&=(b_{1,l}Y_1+b_{2,l}Y_2+\cdots+b_{l,l}Y_l)-(b_{1,2k}Y_1+b_{2,2k}Y_2+\cdots+b_{2k,2k}Y_{2k})\\&=b_{2k+1,l}\tilde{S}_{2k}+(b_{2k+1,l}Y_{2k+1}+\cdots+b_{l,l}Y_l)\end{aligned}$$

和

$$\begin{aligned}|\mathsf{E}\xi_k\xi_l|&=|\mathrm{Cov}(f(S_{k,k}/(\sqrt{2k}\sigma_1)),f(S_{l,l}/(\sqrt{2l}\sigma_1)))|\\&\le|\mathrm{Cov}(f(S_{k,k}/(\sqrt{2k}\sigma_1)),f(S_{l,l}/(\sqrt{2l}\sigma_1))-f((S_{l,l}-S_{2k,2k}-b_{2k+1,l}\tilde{S}_{2k})/(\sqrt{2l}\sigma_1)))|\\&\quad+|\mathrm{Cov}(f(S_{k,k}/(\sqrt{2k}\sigma_1)),f((S_{l,l}-S_{2k,2k}-b_{2k+1,l}\tilde{S}_{2k})/(\sqrt{2l}\sigma_1)))|.\end{aligned}$$

既然 f 是有界的, 利用引理 2.1 得到

$$|\mathrm{Cov}(f(S_{k,k}/(\sqrt{2k}\sigma_1)),f((S_{l,l}-S_{2k,2k}-b_{2k+1,l}\tilde{S}_{2k})/(\sqrt{2l}\sigma_1))|\le C\rho(k).$$

由引理 2.1, 条件 (C1) 和 (2.1) 式可知

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(S_{2k,2k}) &= \sum_{i=1}^{2k} b_{i,2k}^2 \mathsf{E}Y_i^2 + 2\sum_{j=1}^{2k-1}\sum_{i=j+1}^{2k} b_{i,2k}b_{j,2k}\mathrm{Cov}(Y_i,Y_j)\\ &\le 4k - b_{1,2k} + 2\sum_{j=1}^{2k-1} b_{j,2k}^2 \sum_{i=j+1}^{2k}|\mathrm{Cov}(Y_i,Y_j)|\\ &\le 4k + C\sum_{j=1}^{2k-1} b_{j,2k}^2\sum_{i=1}^{\infty}\rho(i) \le Ck.\end{aligned}$$

类似地

$$\mathrm{Var}(\tilde{S}_{2k}) \le Ck.$$

既然 f 是一个有界的 Lipschitz 函数, 利用 Hölder 不等式可得

$$\begin{aligned}&|\mathrm{Cov}(f(S_{k,k}/(\sqrt{2k}\sigma_1)), f(S_{l,l}/(\sqrt{2l}\sigma_1)) - f((S_{l,l}-S_{2k,2k}-b_{2k+1,l}\tilde{S}_{2k})/(\sqrt{2l}\sigma_1)))|\\ &\le C\mathsf{E}\frac{|S_{2k,2k}+b_{2k+1,l}\tilde{S}_{2k}|}{\sqrt{2l}\sigma_1}\\ &\le C(\mathrm{Var}(S_{2k,2k}))^{1/2}/(\sqrt{2l}\sigma_1) + Cb_{2k+1,l}(\mathrm{Var}(\tilde{S}_{2k}))^{1/2}/(\sqrt{2l}\sigma_1)\\ &\le C(2k/l)^{1/2} + C(2k/l)^{1/2}\log\frac{l}{2k}.\end{aligned}$$

因此如果 $l > 2k$, 对某个 $0<\theta<1/2$

$$|\mathsf{E}\xi_k\xi_l| \le C(2k/l)^{\theta} + C\rho(k).$$

综合得到

$$I_2 \le \frac{C}{\log^2 n}\sum_{l=2}^{n}\sum_{k=1}^{l-1}\frac{1}{k^{1-\theta}l^{1+\theta}} + \frac{C}{\log^2 n}\sum_{l=2}^{n}\frac{1}{l}\sum_{k=1}^{l-1}\rho(k)/k \le C\log^{-1} n. \tag{2.14}$$

结合 (2.12), (2.13) 和 (2.14) 式, 我们有

$$\mathsf{E}T_n^2 \le C\log^{-1} n. \tag{2.15}$$

令 $n_k = e^{k^{\tau}}$, 其中 $\tau > 1$, 我们有

$$\sum_{k=1}^{\infty}\mathsf{E}T_{n_k}^2 < \infty.$$

应用 Borel–Cantelli 引理: $T_{n_k}\to 0,$ a.s. $k\to\infty$. 注意

$$\frac{\log n_{k+1}}{\log n_k} = \frac{(k+1)^{\tau}}{k^{\tau}} \to 1 \qquad k\to\infty.$$

既然 f 是有界的, 对 $n_k < n \le n_{k+1}$,

$$\begin{aligned}|T_n| &\le \frac{1}{\log n_k}\left|\sum_{i=1}^{n_k}\xi_i/i\right| + \frac{1}{\log n_k}\sum_{i=n_k}^{n_{k+1}}|\xi_i|/i\\ &\le |T_{n_k}| + C\left(\frac{\log n_{k+1}}{\log n_k}-1\right) \to 0, \quad \text{a.s.} \quad (n\to\infty).\end{aligned}$$

引理得证.

定理的证明 令 $C_i = S_i/(\mu i)$, $i \geq 1$. 我们有

$$\frac{1}{\gamma\sqrt{2k}\sigma_1}\sum_{i=1}^{k}(C_i-1) = \frac{1}{\gamma\sqrt{2k}\sigma_1}\sum_{i=1}^{k}\left(\frac{S_i}{\mu i}-1\right) = \frac{1}{\sqrt{2k}\sigma_1}\sum_{i=1}^{k} b_{i,k}Y_i = S_{k,k}/(\sqrt{2k}\sigma_1).$$

因此对任意的 x, (2.7) 式等价于

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\log n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}I\left\{\frac{1}{\gamma\sqrt{2k}\sigma_1}\sum_{i=1}^{k}(C_i-1)\leq x\right\} = \Phi(x), \quad \text{a.s.} \tag{2.16}$$

另一方面, 为了证明 (1.7) 式, 只需证明对任意的 x,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\log n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}I\left\{\frac{1}{\gamma\sqrt{2k}\sigma_1}\sum_{i=1}^{k}\log C_i\leq x\right\} = \Phi(x), \quad \text{a.s.} \tag{2.17}$$

应用引理 2.2, 对 $4/3 < p < 2$, 当 $i \to \infty$ 时, 有

$$|C_i - 1| \leq C i^{\frac{1}{p}-1}, \quad \text{a.s.}$$

同时易知, 当 $|x| < 1$ 时, $\log(1+x) = x - R(x)$, 且 $\lim_{x\to 0} R(x)/x^2 = 1/2$. 因此

$$\left|\sum_{i=1}^{k}\log C_i - \sum_{i=1}^{k}(C_i-1)\right| \leq C\sum_{i=1}^{k}(C_i-1)^2 \leq Ck^{\frac{2}{p}-1}, \quad \text{a.s.}$$

因此, 对任意小的 $\varepsilon > 0$, 存在一个正整数 $N := N(\varepsilon)$, 使得当 $k > N$ 时, 对任意的 x,

$$\begin{aligned} I\left\{\frac{1}{\gamma\sqrt{2k}\sigma_1}\sum_{i=1}^{k}(C_i-1)\leq x-\varepsilon\right\} &\leq I\left\{\frac{1}{\gamma\sqrt{2k}\sigma_1}\sum_{i=1}^{k}\log C_i\leq x\right\} \\ &\leq I\left\{\frac{1}{\gamma\sqrt{2k}\sigma_1}\sum_{i=1}^{k}(C_i-1)\leq x+\varepsilon\right\}. \end{aligned}$$

因此由 (2.16) 式可得 (2.17) 式. 定理证毕.

感谢 审稿人一些有益的建议令本文增色不少, 作者在此表示衷心的感谢.

参 考 文 献

[1] Arnold B. C., Villaseñor J. A., The asymptotic distribution of sums of records, *Extremes*, 1998, **1**(3): 351–363.
[2] Rempała G., Wesołowski J., Asymptotics for products of sums and U-statistics, *Electronic Communications in Probability*, 2002, **7**(2): 47–54.
[3] Khurelbaatar G., Rempała G., A note on the almost sure limit theorem for the product of partial sums, *Appl. Math. Lett.*, 2006, **19**(2): 191–196.
[4] Lu C. R., Lin Z. Y., Limit theory for mixing dependent random variables, Beijing: Science Press, 1997 (in Chinese).
[5] Peligrad M., Utev S., Central limit theorem for linear processes, *Ann. Probab.*, 1997, **25**(1): 443–456.
[6] Lacey M. T., Philipp W., A note on the almost sure central limit theorem, *Statist. Probab. Lett.*, 1990, **9**(3): 201–205.
[7] Billingsley P., Convergence of probability measures, New York: Wiley, 1968.
[8] Brosamler G. A., An almost everywhere central limit theorem, *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.*, 1988, **104**: 561–574.
[9] Hu Z. S., Su C., Wang D. C., The asymptotic distributions of sums of record values for distributions with lognormal-type tails, *Science in China A*, 2002, **45**(2): 1557–1566 (in Chinese).
[10] Peligrad M., Shao Q. M., A note on the almost sure central limit theorem, *Statist. Probab. Lett.*, 1995, **22**(2): 131–136.
[11] Schatte P., On strong versions of the central limit theorem, *Math. Nachr.*, 1988, **137**(1): 249–256.