第 29 卷第 2 期
2000 年 4 月

信 息 与 控 制
Information and Control

Vol. 29, No. 2
Apr., 2000

文章编号: 1002-0411(2000)02-139-05

终端约束滚动时域控制的次优性分析

耿晓军　席裕庚
(上海交通大学自动化研究所　上海　200030)

摘　要: 讨论了有终端约束的滚动时域控制相对于传统最优控制的次优性问题. 首先考虑一般形式的非线性系统, 通过分析有限时域滚动优化的特点, 得到了滚动时域控制次优性的上界; 然后将结果进一步应用于线性系统, 得到一个量化的评价指标. °

关键词: 最优控制, 滚动时域控制, 次优性, 离散非线性系统
中图分类号: TP13　　　　文献标识码: B

1　引言

最优控制理论的形成促成和推动了现代控制理论的发展, 但在工业控制领域, 时变性、不确定性等因素限制了传统最优控制的应用. 而滚动时域控制(RHC)采用不断在线滚动优化, 并在优化过程中利用实测系统信息进行反馈校正, 使系统的鲁棒性得到增强, 适用于控制复杂工业生产过程.

Freeman 在文[1]中指出最优控制如果采用无穷时域优化性能指标, 是可以保证系统稳定的, 采用有限时域性能指标则无法保证; 而滚动时域控制采用有限时域滚动优化, 在一定条件下可以使系统稳定. 一种能实现稳定控制的策略—— 有终端约束滚动控制 CRHC(Receding Horizon Control with Terminal Constraints)受到人们的关注并广为研究. 这些研究可分为两类, 一类是基于系统输入输出特性, 要求控制系统输出跟踪一给定的期望输出; 另一类是基于系统状态方程, 要求控制系统状态趋于平衡点. 在前一类问题中若有系统可观测性假设, 那么可以看到这两类问题控制的本质是一致的. 为了更加有效地突出本文的研究内容, 下面仅讨论状态调节问题.

Kwon 和 Pearson[2,3]在 1978 年针对线性时变系统, 利用有终端约束 $x_T = 0$ 的有限时域滚动优化, 设计出一稳定的状态反馈控制器, 并根据 Riccati 方程解的性质解决了该控制律的次优性问题. 之后, Mayne 等[4]将这一思想引入连续非线性系统, 给出了该控制系统稳定的充分条件, 并在[5]中提出了对应的可实现的控制算法. Alamir 等[6]则研究了离散非线性系统, 在同样终端约束下得到该控制策略的稳定性结论. 最近, Meadows 等[7]又对其进行了扩展研究, 得出可反馈线性化系统的稳定性结果. 针对离散非线性系统, 本文将分析这一稳定的控制策略 CRHC 相对于最优控制的次优性.

显然, 最优控制从整个控制时域出发, 考虑的是性能的全局最优; 而 RHC 是滚动优化, 每一时刻得到的都是局部最优控制序列, 且只将第一步控制量作用于系统, 下一时刻重新优化求解, 这样得到的控制显然不能保证全局最优. 于是, CRHC 的次优性就成为人们关注的问题. 文章分为五节, 在第二节中给出有终端约束滚动时域控制的描述及其稳定性说明; 第三节给出次

° 收稿日期: 1999-03-05
基金项目: 国家自然科学基金资助

优性问题的描述, 分析了次优性的上界; 在第四节中将此结果应用于线性系统, 得到线性系统 CRHC 次优性的一个量化评价指标; 第五节是结束语.

2 有终端约束滚动时域控制的描述及稳定性

给定如下一般形式的离散时不变非线性系统

$$x(k+1) = f(x(k), u(k)) \tag{1}$$

$x(0)$ 已知, $x(k) R^n$, $u(k) \in R^m$, $f(0, 0) = 0$ 且 f 在原点连续.

下面给出 CRHC 策略的算法:

在 k 时刻, 已知系统状态 $x(k)$, 一个未来 N 步的控制信号序列记为 $\pi_N(k)$:

$$\pi_N(k) = \{v_0(k), v_1(k), \cdots, v_{N-1}(k)\}, \quad v_i(k) \in R^m$$

若在该时刻实施这一控制序列, 可得到各时刻的预测状态轨迹, 记为

$$\{z_0(k), z_1(k), \cdots, z_N(k)\}, \quad z_i(k) \in R^n$$

对应的有限时域性能指标为

$$J_1(k) \triangleq J(x(k), \pi_N(k)) = \sum_{j=0}^{N-1} L(z_j(k), v_j(k)) \tag{2}$$

优化问题描述为

$$\begin{aligned} &\min_{\pi_N(k)} J_1(k) \\ \text{s. t.} \quad & z_{j+1}(k) = f(z_j(k), v_j(k)) \\ & z_0(k) = x(k), z_N(k) = 0 \end{aligned} \tag{3}$$

这里 $z_j(k), v_j(k)$ 表示在滚动优化中考虑的预测状态和预测控制量. L 在 $(0, 0)$ 连续, 且满足如下条件[7]:

a) $L(0, 0) = 0$

b) 存在一非减函数 $\gamma: [0, \infty) \to [0, \infty)$, $\gamma(0) = 0$, 使得对于所有 $(x, u) \neq (0, 0)$ 成立:

$$0 < \gamma(\| x, u \|) \leqslant L(x, u) \qquad (\| \cdot \| \text{ 为 } R^n \times R^m \text{ 上的范数})$$

显然可以推知 L 具有如下性质:

c) $L(x, u) > 0; \quad \forall (x, u) \neq (0, 0)$

d) $L(x, u) \to 0 \quad \Rightarrow (x, u) \to 0$

e) $L(x, u) = 0 \quad \Rightarrow (x, u) = (0, 0)$

CRHC 是这样一种控制: 在 k 时刻得到上述问题的最优控制序列 $\pi_N^*(k) = (v_0^*(k), v_1^*(k), \cdots, v_{N-1}^*(k)\}$, 选取第一步控制量 $u(k) = v_0^*(k)$ 作用于系统后, 在 $k+1$ 时刻得到当前状态 $x(k+1)$, 并重新优化上面问题, 依次不断滚动. 该策略可以保证系统稳定, 有关定理可参见[6, 7].

3 非线性系统 CRHC 次优性问题的描述及分析

首先给出最优控制策略及最优性能指标如下:

对于系统(1)若能求解出一控制序列 $\{u(k), k = 0, 1, \cdots\}$, 使下面的性能指标

$$J_0 = \sum_{k=0}^{\infty} L(x(k), u(k)) \tag{4}$$

存在且极小, 那么该控制序列为最优控制. L 的选取与第 2 节中有限时域优化一致.

可以看到, 最优控制性能指标 $J_0^* = \sum_{k=0}^{\infty} L(x^*(k), u^*(k)) < \infty$, 而根据 L 的性质(c)有 $\lim_{k\to\infty} L(x^*(k), u^*(k)) = 0$, 于是有 $(x^*(k), u^*(k)) \to (0, 0)$, 该控制系统稳定.

为了分析 CRHC 策略的次优性, 就需设法得到上面的最优性能指标 J_0^* 和 CRHC 控制律对应的全局性能指标 J_{10} 之间的关系, $J_{10} = \sum_{k=0}^{\infty} L(x(k), u(k))$, 其中 $x(k), u(k)$ 是根据第二节的滚动控制过程中的实际状态量与控制量. 以此为出发点, 下面将给出离散非线性系统的主要结果.

通过求解 k 时刻的有限时域优化问题, 可得到 N 步最优控制策略 $\pi_N^*(k) = \{v_0^*(k), v_1^*(k), \cdots, v_{N-1}^*(k)\}$, 在其作用下状态轨迹为 $\{z_0^*(k), z_1^*(k), \cdots, z_N^*(k)\}$, 且有 $z_N^*(k) = 0$, 相应的最优性能指标为 $J_1^*(k)$.

由于采取滚动优化机制, 在 k 时刻只将其中的 $v_0^*(k)$ 取作为 $u(k)$ 予以实施, 即 $u(k) = v_0^*(k)$. 在其作用下, $k+1$ 时刻系统的状态改变为 $x(k+1) = f(x(k), v_0^*(k))$, 即为 $z_1^*(k)$. $k+1$ 时刻再重复上述过程, 求出 $\pi_N^*(k+1)$, 相应的最优性能指标记为 $J_1^*(k+1)$, 并将其中 $v_0^*(k+1)$ 作为 $u(k+1)$ 实施.

若在 $k+1$ 时刻选取如下控制序列

$$\pi_N(k+1) = \{v_0(k+1), \cdots, v_{N-2}(k+1), v_{N-1}(k+1)\} = \{v_1^*(k), \cdots, v_{N-1}^*(k), 0\}$$

在这组控制下的状态轨迹为 $\{z_1(k+1), \cdots, z_N(k+1)\}$, 显然有 $z_1(k+1) = z_2^*(k), \cdots, z_{N-1}(k+1) = z_N^*(k) = 0$, $z_N(k+1) = f(z_{N-1}(k+1), v_{N-1}(k+1)) = f(0, 0) = 0$, 它符合终端约束条件, 可见 $\pi_N(k+1)$ 是 $k+1$ 时刻相应于式优化问题(3)的一个可行解. 记相应的性能指标为 $J_1(k+1)$, 则与该时刻的最优性能指标相比, 应有

$$J_1(k+1) \geqslant J_1^*(k+1)$$

注意到

$$J_1(k+1) = \sum_{j=0}^{N-1} L(z_j(k+1), v_j(k+1)) = \sum_{j=0}^{N-2} L(z_{j+1}^*(k), v_{j+1}^*(k))$$
$$= \sum_{j=0}^{N-1} L(z_j^*(k), v_j^*(k)) - L(z_0^*(k), v_0^*(k)) = J_1^*(k) - L(x(k), u(k))$$

从而可得

$$J_1^*(k) - J_1^*(k+1) \geqslant L(x(k), u(k)) \tag{5}$$

注意上式左端对应的是在滚动优化中计算的有限时域最优性能指标, 而右端则是实际实施过程中对应的性能指标项.

当滚动过程实施到第 k^* 步时, 将以前各步对应的式(5)相加, 可得

$$J_1^*(0) - J_1^*(k^*) \geqslant \sum_{i=0}^{k^*-1} L(x(k), u(k)) \tag{6}$$

当(6)式中 $k^* \to \infty$ 时, 由于 CRHC 策略是一种稳定控制策略[6,7], 应有 $\lim_{k^*\to\infty} J_1^*(k^*) = 0$, 所以有

$$J_1^*(0) \geqslant \sum_{k=0}^{\infty} L(x(k), u(k))$$

上式右端即为实施滚动控制后对应于最优控制的全局性能指标, 所以我们有下面的定理.

定理 1 对于一般形式的非线性离散系统, 有终端稳定约束的 CRHC 控制系统对应于最

优控制性能指标存在上界, 其值为第一步滚动优化的有限时域最优指标.

注: 实际控制系统的设计常常不仅要求闭环系统稳定, 而且要求闭环系统满足某些性能指标要求. 文献[8]中针对不确定性线性系统, 可以设计所谓保成本控制律, 使闭环性能指标 $J \leqslant x_0^{\mathrm{T}} P x_0$, x_0 为系统初值, P 为满足一定条件的正定阵, 而该式和本文得出的预测控制全局性能指标的次优性关系相似. 从这个角度我们也可以认为, CRHC 实际上实现了一种状态反馈保成本控制, 即使闭环成本值也就是全局性能指标不超过某个确定的界, 并且由下面的推论 1 可知, 通过选择优化时域长度, 我们可以来设定这一成本上界的值.

推论 1 CRHC 的次优性和优化时域 N 的选取有关, N 越大, 则其次优性越佳.

证明 当优化时域为 N 时, 求解第一步滚动优化过程, 得到最优控制序列为 $\pi_N^*(0)=\{v_0^*(0), \cdots, v_{N-1}^*(0)\}$, 实施该序列后的系统状态为 $\{z_0^*(0), z_1^*(0), \cdots, z_N^*(0)\}$, 最优性能指标记为 $J_{IN}^*(0)$.

考虑优化时域为 $M>N$ 时, 记最优性能指标记为 $J_{IN}^*(0)$, 若在 0 时刻选取 M 步序列 $\pi_M(0)=\{v_0^*(0), \cdots, v_{N-1}^*(0), 0, \cdots, 0\}$, 同前所述该序列为可行解. 于是有

$$J_{IN}^* = \min \sum_{i=1}^{N-1} L(z_i, v_i) \geqslant J_{IM}^* = \min \sum_{i=1}^{M-1} L(z_i, v_i)$$

即优化时域越大, 第一步有限时域最优性能指标值越小, CRHC 控制律的次优性越佳.

推论 2 有终端约束的滚动时域控制对于全局优化控制有充分的逼近能力.

证明 记 $J_{10}=\sum_{k=0}^{\infty} L(x(k), u(k))$, 由定理 1 可知

$$J_1^*(0) \geqslant J_{10} \geqslant J_0^* \tag{7}$$

其中 J_0^* 为全局最优解. 当 $N\to\infty$ 时, $J_1^*(0)\to J_0^*$, 即对于任一 $\epsilon>0$, 存在 N^*, 当 $N>N^*$ 时, 有 $|J_1^*(0)-J_0^*|<\epsilon$. 由式(7)有

$$|J_{10}-J_0^*| \leqslant |J_1^*(0)-J_0^*| < \epsilon$$

即 J_{10} 可充分接近 J_0^*, 当 $N\to\infty$ 时两者性能指标等价.

4 线性系统预测控制算法的次优性

将定理 1 的结果应用于如下离散线性系统

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \qquad (A, B) \text{ 可控}$$

有限时域优化性能指标为

$$\min J_1 = \min \sum_{i=0}^{N-1} \{z^{\mathrm{T}}(i) Q z(i) + v^{\mathrm{T}}(i) R v(i)$$

$$\text{s.t.} \quad z(0) = x(k)$$

$$z(N) = 0$$

$$z(k+1) = Az(k) + Bv(k)$$

根据线性系统知识, 对于 $x(0)=x_0$ 有

$$J_1^*(x_0) = x_0^{\mathrm{T}} P(0) x_0$$

其中 $P(0)$ 为离散 Riccati 方程

$$\begin{aligned} P_k &= A^{\mathrm{T}} P_{k+1} A - A^{\mathrm{T}} P_{k+1} B (B^{\mathrm{T}} P_{k+1} B + R)^{-1} B^{\mathrm{T}} P_{k+1} A + Q \\ P_N &= \infty \end{aligned} \tag{8}$$

逆向积分的解. 在实际求解中 $P(T)=\infty$ 无法计算, 可令 $P(t)=K(t)^{-1}$进行求解计算(参见文[3]). 另一方面对于最优控制有 $J_0^*(x_0)=x_0^{\mathrm{T}}Px_0$, 记 $x_0^{\mathrm{T}}Px_0=\|x_0\|_P^2$, P 为 Riccati 方程的代数解. 根据 Riccati 方程解的单调性质, 有

$$\|x_0\|_P^2<\|x_0\|_{P(0)}^2$$

根据定理 1, 可得

$$J_0(x_0)\leqslant J_1^*(x_0)=\|x_0\|_{P(0)}^2$$

综上所述有下面定理成立:

定理 2 对于线性离散系统带终端约束的预测控制策略, 对应于最优控制的性能指标存在上界, 其值为$\|x_0\|_{P(0)}^2$, 其中 x_0 为系统状态初值, $P(0)$为离散 Riccati 方程(8)的解.

推论 1 针对线性系统设计的有终端约束 RHC 控制律的全局性能 J_{10}, 满足如下不等式:

$$\|x_0\|_{P(0)}^2\geqslant J_{10}\geqslant\|x_0\|_P^2$$

并且该策略相对于最优控制的次优性可用比值 $J_{10}/J_0^*=\|x_0\|_{P(0)}^2/\|x_0\|_P^2$来评价. P 为式(8)中令 $P_k=P_{k+1}=p$ 的解.

上述结果与 Kwon 等早在 1978 年利用 Riccati 方程解的性质推出的结果[3]是一致的, 而后者的方法只适用于线性系统, 因此, 本文的结果具有更广的适用性.

5 小结

最优控制求得的控制策略是全局最优的, 而预测控制是有限时域的滚动优化, 其得到的控制律相对于全局的最优控制是次优的. 本文在此意义下针对一般离散非线性系统, 给出了有限时域滚动控制次优性的上界, 并得出优化时域和次优性的关系. 然后将上述结果应用于线性系统, 得到了评价次优性的量化表达式. 线性系统的这一结果与 Kwon 在 1978 年的结果是一致的. 这些结果对预测控制的理论和实践都具有一定的意义.

参 考 文 献

1 Freeman, P V. Kokotovic. Inverse Optimality in Robust Stabilization. SIMA J. Control and Optimization, 1996, **34**(4): 1365~1391

2 Kwon W H, A E Pearson. A Modified Quadratic Cost Problem and Feedback Stabilization of a Linear System. IEEE Trans. Automat. Contr, 1977, **22**(5): 838~842

3 Kwon W H, A E Pearson. On Feedback Stabilization of Time-varying Discrete Linear Systems. IEEE Trans Automat Contr, 1978, **23**(3): 479~481

4 Mayne D Q, H Michalska. Receding Horizon Control of Nonlinear Systems, IEEE Trans. on Automa. Contr., 1990, **35**(7): 814~824

5 Mayne D Q, H Michalska. An Implementable Receding Horizon Control for Stabilization of Nonlinear Systems, The 29th IEEE Conference on Decision and Control, 1990: 3396~3397

6 Alamir M, Bornard G. On the Stability of Receding Horizon Control of Nonlinear Discrete-time Systems. Systems & Control Letters, 1994, **23**(3): 291~296

7 Edward S, Meadows Michael A H, *etc*. Receding Horizon Control and Discontinuous State Feedback Stabilization. Int J Control, 1995, **62**(5): 1217~1299

8 Petersen I R, D C Mcfarlane. Optimal Guaranteed Cost Control and Filtering for Uncertain Linear Systems, IEEE Trans. on Automa. Contr., 1994, **39**(9): 1971~1977

SUBOPTIMALITY ANALYSIS OF RECEDING HORIZON CONTROL WITH TERMINAL CONSTRAINTS

GENG Xiao-jun XI Yu-geng

(*Institute of Automation, Shanghai Jiao Tong University, Shanghai* 200030)

Abstract: This paper deals with the problem of suboptimality of RHC (receding horizon control) with Terminal Constraints for nonlinear discrete systems. Using the properties of receding finite-horizon optimization, we derive the upper bound of suboptimality of RHC for nonlinear systems. Then, a quantitative measure of suboptimality compared with traditional optimal control is obtained. when the result above is applied to linear systems.

Keywords: receding horizon control, optimal control, suboptimality, discrete nonlinear systems

作者简介

耿晓军(1972-), 女, 博士生. 主要从事非线性预测控制的研究.

席裕庚(1946-), 男, 博士, 现为上海交通大学自动化系教授, 博士生导师. 主要研究领域是复杂工业过程的优化控制及智能机器人控制.

本刊加入《中国学术期刊(光盘版)》, "中国期刊网"和万方数据(ChinaInfo)系统科技期刊群的声明

为适应我国信息化建设的需要, 扩大作者学术交流渠道, 我刊现已加入《中国学术期刊(光盘版)》, "中国期刊网"和"万方数据(ChinaInfo)系统科技期刊群". 凡向本刊投稿并录用的稿件文章, 将一律由编辑部统一纳入上述各系统, 进入光盘及因特网提供信息服务, 凡有不同意者, 请另投它刊. 本刊所付稿酬包含作者著作权使用费.

《中国学术期刊(光盘版)》已在全国各地建立检索站, 读者和作者可到检索站查询和检索本刊内容及文章被引用的情况.

万方数据(ChinaInfo)系统科技期刊群截止 1998 年底已有 200 种期刊全文上网(网址: http://www.chinainfo.gov.cn/periodical), 将在近年内增至 1000 种科技期刊, 本刊全文内容按照统一格式制作编入万方数据(ChinaInfo)系统, 读者可上因特网进入万方数据(ChinaInfo)系统免费(一年后开始酌情收费)查询检索本刊内容, 也欢迎各界朋友通过万方数据(ChinaInfo)系统对我刊提出宝贵意见、建议, 或征订本刊.

《信息与控制》编辑部

1999 年 10 月