

文章编号: 1002-0411(2001)03-249-05

# 一种径向基函数神经网络在线训练算法及其在非 线性控制中的应用

王学雷<sup>1</sup> 邵惠鹤<sup>1</sup> 李亚芬<sup>2</sup>

(1. 上海交通大学自动化研究所 上海 200030; 2. 大连理工大学自动化系 116023)

**摘要:** 针对现有径向基函数(RBF)神经网络训练算法存在的问题,给出了 RBF 神经网络的一种在线训练算法,对这种在线训练算法所涉及到的各个方面进行了全面的分析.仿真表明所提出的算法是非常有效的,它克服了以往算法的不足并具有很大的实用性.进一步将 RBF 神经网络用于非线性控制,取得了良好的结果.

**关键词:** 径向基函数神经网络; 在线训练; 分组优化; 非线性控制

中图分类号: TP13

文献标识码: B

## AN ONLINE TRAINING ALGORITHM FOR RBF NEURAL NETWORK AND ITS APPLICATION IN NONLINEAR CONTROL

WANG Xue-lei<sup>1</sup> SHAO Hu-rhe<sup>1</sup> LI Ya-fen<sup>2</sup>

(1. Institute of Automation, Shanghai Jiaotong University, Shanghai 200030;

2. Department of Automation Dalian University of Technology 116023)

**Abstract:** A novel online training algorithm for RBF neural network is presented. Some problems related to the algorithm are discussed in detail. It is shown by simulations that the algorithm is very effective and can overcome the shortcomings existing in the so-called offline algorithm. Furthermore, the algorithm is used to train a RBF neural network so as to realize a control of the complex nonlinear system. The final result is excellent.

**Keywords:** RBF neural network, online training, optimization in groups, nonlinear control

### 1 引言(Introduction)

RBF 神经网络是一种两层局部式网络,与传统的 BP 神经网络相比具有许多明显的优越性.近些年, RBF 神经网络得到了非常深入的研究,出现了许多训练算法<sup>[1-4]</sup>. RBF 神经网络本身的优良性能与各种有效的训练算法相结合使其在解决各种实际问题的过程中获得了广泛的应用<sup>[5-6]</sup>.

但是,应该注意到,针对 RBF 神经网络的现有各种训练算法都是采用所谓的离线方式,即网络的训练过程在时间上被分成几个独立的阶段.首先要收集样本,其结束条件是已收集的样本必须含有足够的对象信息,这与样本数量的增加紧密相关;其次是采用不同形式的聚类方法从样本中获取建构 RBF 神经网络并对网络最终性能有密切影响的网络各隐单元“中心”;最后是校正网络输出层权值.

离线训练方式存在以下问题:

(1) 如果对象特性是时变的,孤立地收集对象输入输出数据将无法真正准确地捕捉对象的黑箱信息;

(2) 如果对象特性非时变,但由于某种原因,使得所收集的样本数据不是最充分的(在神经网络的应用中,这在某种程度上总是存在的),这时,如何及时地发现并弥补?对离线方式,这意味着要重新训练整个神经网络,显然,这将付出非常高的代价;

总之, RBF 神经网络的离线训练方式无法有效处理反映对象特性改变的样本数据,正是基于这种认识,进一步研究 RBF 神经网络的在线训练算法是有一定现实意义的.必须指出,所谓在线,是一种方式,而非一定是实时,它是指从样本数据的收集到网络的建构及网络的训练是同时进行的,没有时间

上的孤立。

文[7]对RBF神经网络的在线训练算法做了初步的研究,其核心内容是提出了一种在线隐单元分配策略,简述如下:

给定第*i*个样本 $[\bar{X}_i, \bar{Y}_i]$ ,其中 $\bar{X}_i$ 表示*N*维输入矢量, $\bar{Y}_i$ 表示*M*维输出矢量.如果同时满足如下条件则分配一个隐单元 $C_{P+1}$ :

A.  $\|\bar{E}_i\| > \epsilon$ ,  $\bar{E}_i$ 是网络输出误差矢量, $\|\cdot\|$ 代表某种范数运算(下同), $\epsilon > 0$ 是误差阈值;

B.  $\min\|\bar{X}_i - C_r\| > \eta(t)$ ,  $\eta(t) = \{\alpha\eta_{\max}, \eta_{\min}\}$ 是距离阈值, $0 < \alpha < 1$ ,而 $1 \leq r \leq P$ ,*P*是当前RBF神经网络的隐单元个数, $C_r$ 表示第*r*个隐单元的中心矢量.

在选取隐单元的基础上,文[7]还给出了一种基于梯度下降的训练算法.本文对RBF神经网络的在线训练算法做了更进一步的研究.

## 2 分组优化策略(On the strategy of optimization in groups)

神经网络的训练在本质上是一个无约束优化的过程,因此,深入探讨更适合特定神经网络类型,如RBF神经网络的优化理论是非常有现实意义的.

设 $\hat{y}_i$ 为网络的第*i*个输出, $\hat{y}_i = \sum_{j=1}^P w_{ji} h_j$ ;  $w_{ji}$ 表示第*j*个隐单元到第*i*个输出的连接权值; $h_j$ 表示第*j*个隐单元的输出, $h_j = \exp(-\frac{\|X - C_j\|^2}{\sigma_j^2})$ ,其中, $C_j, \sigma_j$ 表示第*j*个隐单元的中心矢量和宽度,而 $\|X - C_j\|^2 = \sum_{k=1}^N (x_k^{(j)} - c_k^{(j)})^2$ .选取神经网络训练的目标函数:

$$J = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^M (y_i - \hat{y}_i)^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^M [y_i - \sum_{j=1}^P w_{ji} \exp(-\frac{\|X - C_j\|^2}{\sigma_j^2})]^2$$

可见,*J*是关于 $C_j, w_{ji}, \sigma_j$ 的非线性函数.在离线训练算法中,由于在神经网络的训练阶段,所有的隐单元“中心”已经定好,所以待调参数仅为输出层权值,这就成为一个非常简单得最小二乘问题.但是,在在线训练方式中,权值与各隐单元“中心”都是变动的需要调整的参数,故这时的RBF神经网络的训练成为一个无约束非线性优化问题.这里,引入一种分组优化策略,即在优化的过程中对参数矢量的不同部分分别进行寻优,整个优化过程交替进行,

直至得到优化解为止.在RBF神经网络的训练中,具体就是将输出层权值作为一组待寻优参数,将已分配的隐单元的“中心”和“宽度”作为另一组待寻优参数.注意,在优化的过程中,对不同的组可以选择不同的优化算法.

对上面所提到的分组优化有以下定理:

引理 在分组优化的过程中,与每一个分组矢量对应的目标函数值构成一个单调下降序列,与原参数矢量对应的目标函数值也构成一个单调下降序列

定理1 分组优化可以在同一次对各分组参数矢量寻优的过程中对每一分组参数矢量取得优化解

定理2 对无约束优化问题,分组优化取得的解是原问题优化解的充要条件,是各分组参数矢量的解为该分组参数矢量对应仅以该分组矢量为自变量的优化问题的优化解

以上定理的证明是很直接的,因此,详细证明过程从略.

## 3 改进的RBF神经网络在线训练算法(Improved training algorithm for RBFNN)

将分组优化策略引入到RBF神经网络的在线训练方式中,并注意到,网络输出对网络权值是一种线性关系,而仅对隐单元“中心”和“宽度”成非线性关系,这暗示着可以对两部分参数分别采用不同的优化方法进行处理将更加合适.

基于上面的分析,可以得到改进的RBF神经网络在线训练算法—G-RLS法(梯度下降法+RLS).

对网络各隐单元“中心”和“宽度”采用梯度下降法进行调整,为此,要给出目标函数*J*对隐单元“中心”矢量的各个分量和“宽度”的偏导数:

① 对“中心”:

$$\begin{aligned} \frac{\partial J}{\partial c_i^{(q)}} &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial c_i^{(q)}} \sum_{i=1}^M (y_i - \hat{y}_i)^2 = - \sum_{i=1}^M (y_i - \hat{y}_i) w_{ii} \frac{\partial}{\partial c_i^{(q)}} \exp[-\frac{\sum_{k=1}^N (x^{(k)} - c_i^{(k)})^2}{\sigma_i^2}] (-2)(x^{(q)} \\ &\quad - c_i^{(q)}) (-1) / \sigma_i^2 = - \frac{2(x^{(q)} - c_i^{(q)}) h_i}{\sigma_i^2} \sum_{i=1}^M (y_i - \hat{y}_i) w_{ii} \end{aligned} \quad (1)$$

② 对“宽度”:

$$\frac{\partial J}{\partial \sigma_i} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \sigma_i} \sum_{i=1}^M (y_i - \hat{y}_i)^2 = -2 \sum_{i=1}^M (y_i - \hat{y}_i) w_{ii} \frac{\partial}{\partial \sigma_i} \exp[-\frac{\sum_{k=1}^N (x^{(k)} - c_i^{(k)})^2}{\sigma_i^2}]$$

$$\begin{aligned}
 & - \hat{y}_i) w_{ii} \exp[-\frac{\|X - C_i\|^2}{\sigma_i^2}] \frac{\|X - C_i\|^2}{\sigma_i^3} \\
 & = - \frac{2\|X - C_i\|^2}{\sigma_i^3} h_i \sum_{i=1}^M (y_i - \hat{y}_i) w_{ii} \quad (2)
 \end{aligned}$$

由此, 令  $S_{c_i^{(q)}}(k-1) = -\frac{\partial J}{\partial c_i^{(q)}(k-1)}$ ,  $S_{\sigma_i}(k-1) = -\frac{\partial J}{\partial \sigma_i(k-1)}$  则可以得到对“中心”矢量的各个分量和各个隐单元“宽度”的梯度下降调整算法:

$$c_i^{(q)}(k) = c_i^{(q)}(k-1) + \gamma S_{c_i^{(q)}}(k-1) \quad (3)$$

$$\sigma_i(k) = \sigma_i(k-1) + \gamma S_{\sigma_i}(k-1) \quad (4)$$

其中,  $\gamma > 0$  是步长, 并取为一个比较小的值。

对于网络权值的训练, 注意到, 网络输出矢量  $\bar{y} = H^T W$ , 与网络权值是一种线性关系, 其中  $H = [h_1, h_2, \dots, h_p]^T$  为隐单元输出矢量(在对权值校正的过程中可以看作常量),  $W = [w_1, w_2, \dots, w_p]$  是权值矢量阵,  $w_i = [w_{1i}, w_{2i}, \dots, w_{pi}]^T$  是与第  $i$  个网络输出相关的权值矢量. 由此可以采用成熟而有效的递推最小二乘法(RLS)<sup>[8]</sup>, 得到 RBF 神经网络权值校正的 RLS 计算公式:

$$\begin{aligned}
 \hat{W}(k) &= \hat{W}(k-1) + K(k)[y(k) \\
 & - H^T(k)\hat{W}(k-1)] \quad (5)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 K(k) &= P(k-1)H(k)[H^T(k)P(k-1) \\
 & - 1]H(k) + \frac{1}{\mu}]^{-1} \quad (6)
 \end{aligned}$$

$$P(k) = \frac{1}{\lambda}[I - K(k)H^T(k)]P(k-1) \quad (7)$$

网络训练的不同阶段,  $\mu, \lambda$  可取不同的值:

训练阶段,  $\mu = \lambda = 1$ , 即常规的最小二乘法;

应用阶段, 若对象无时变, 数据可信度无变化,

$\mu = 1, \lambda = 1$ ;

若对象无时变, 数据可信度增高,  $\mu < 1, \lambda = 1$ ;

若对象有时变, 取  $\mu = 1/\lambda, 0.95 \leq \lambda \leq 1$ ;

采用最小二乘法有一个初值选取问题, 考虑到本文所讨论的是一种在线训练方式, 即网络是一个逐步建构的过程, 从第一个隐单元分配开始, 每分配一个隐单元, 就出现一次初值选取问题, 因此网络权值校正的初值选择问题就转化为分配一个隐单元后的初值选择, 可以如下进行:

$\hat{w}_{(p+1)i}(0) = e_i, e_i = y_i - \hat{y}_i$  是第  $i$  个输出的网络映射误差;

$P_{(p+1)i}(0) = P_0 I, P_0$  是一个足够大的值,  $I$  是单位阵, 维数是新增权值的个数, 也即网络输出的维数.

注: 在 RBF 神经网络的训练中之所以可以采用

在线方式, 是由于它是一种局部式神经网络, 新分配隐单元代表了一个新模式的出现, 且网络规模的扩大对网络的原有性能影响较小的缘故. 而对网络“中心”和“宽度”的校正过程实质上是一个调整各“中心”的位置与基函数形状的过程, 其中隐含了离线训练方式中的聚类操作.

#### 4 在线训练算法中相关参数的选取(The method to choose parameters related to training algorithm)

文[7]虽给出了 RBF 神经网络的在线训练算法, 但却没有给出算法中相关参数, 如  $\alpha, \eta_{max}, \eta_{min}, \epsilon$  等的选取方法. 对于其所给出的仿真实例, 采用与其同样的算法但选取不同的参数进行仿真, 最终的训练结果迥异, 甚至失败, 这无疑使 RBF 神经网络的训练结果无法保证, 对其应用将产生极大的困难.

这里给出一个参数选取的经验公式. 由于同网络训练一样, 参数的选取是以样本的归一化为基础的, 所以先给出样本的归一化算法:

$$x' = K \frac{x - x_{min}}{x_{max} - x_{min}} \quad (8)$$

再设样本数据中输入矢量的维数是  $N$ , 则选取公式如下:

$$a. \eta_{max} = K \sqrt{N}; \quad (9)$$

$$b. \eta_{min} = \eta_{max}/10; \quad (10)$$

c.  $\epsilon$  由希望达到的训练精度决定;

$$d. \alpha \in [0.95, 1.0].$$

经过大量的仿真, 根据以上原则选取网络训练参数都取得了满意的结果, 这说明所提出的选取方法是合适的, 这使得 RBF 神经网络的在线训练算法的实际应用具有更大的可操作性.

#### 5 仿真(Simulations)

仿真一: 拟合 hermite 函数

由于 RBF 神经网络属于静态、前向神经网络类型. 无论将其用于静态系统还是动态系统, 都是利用其函数逼近能力, 因此, 衡量其性能可以通过其对函数的逼近能力来考察.

同[7]一样, 选择 hermite 函数作为仿真对象.

Hermite 函数形式如下:

$$y = 1.1 * (1 - x + 2x^2) \exp(-\frac{1}{2}x^2)$$

归一化处理中  $K$  取 10, 在线训练中各参数按照公式确定如下:

$$\eta_{max} = K \sqrt{N} = 10.0, \eta_{min} = \eta_{max}/10 = 1.0,$$

$$\alpha = 0.99, \epsilon = 0.05, \text{步长 } \gamma = 0.05.$$

网络训练精度是以均方根误差 RSME 来度量的, 该指标定义如下:

$$RSME = \frac{1}{NUM} \sum_{i=1}^{NUM} \sum_{j=1}^M e_{ij}^2$$

$$= \frac{1}{NUM} \sum_{i=1}^{NUM} \sum_{j=1}^M (y_{ij} - \hat{y}_{ij})^2$$

同[7], 在[-4.0, 4.0]之间产生80个随机信号作为  $x$ , 进而得到相应的函数值  $y$ , 由此获取神经网络样本集, 其中, 取前40组数据作为训练样本集, 后40组数据作为测试样本集.

采用在线训练方式, 固定训练次数为300次, 在训练的过程中, 网络被逐步建构起来, 最终的RBF神经网络有4个隐单元. 对[0, 10]区间的归一化数据, 最终的RSME值是0.191272, 其RSME- $t$ 曲线如图1所示; 对未经归一化的训练样本集的RSME为0.036303; 对未经归一化的测试样本集的RSME为0.040820. 可见, 网络的训练精度和泛化能力都是非常好的.

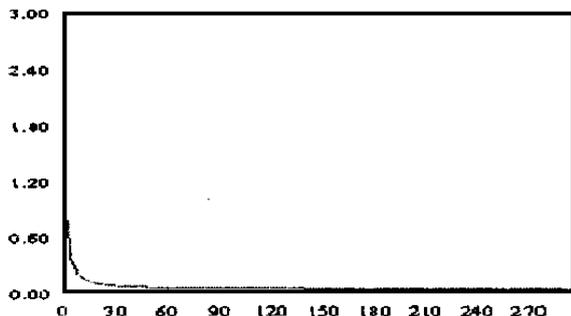


图1 RSME-训练次数曲线

Fig. 1 RSME-the times of training

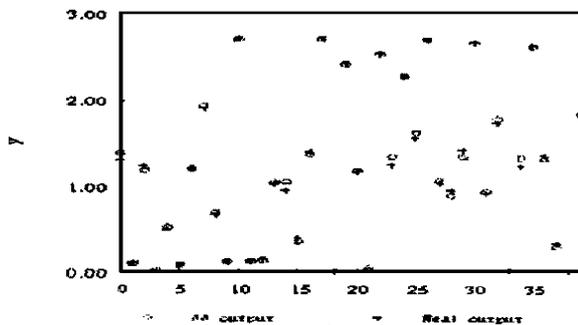


图2 训练样本集拟合情况

Fig. 2 The result of fitting on sample point

仿真结论: 由前面的RSME- $t$ 曲线可以看出, 网络的训练速度是很快的, 在最初30次的时候训练

就已经达到了比较高的精度. 对此, 传统的BP神经网络是不可能的, 较[7]的结果也有明显的提高, 如更低的RSME值和更简单的网络结构. 这表明本文所提出的在线训练算法及参数选取策略是有效的.

仿真二: 非线性控制. 非线性对象的动态特性由如下的非线性差分方程表示,

$$y(k+1) = \frac{y(k)y(k-1)[y(k)+2.0]}{1+y^2(k)+y^2(k+1)} + u(k)$$

这里假设该对象初始处于一个稳态:  $u(k) = 0, y(k-1) = y(k) = y(k+1) = 1.0$ . 在该工作点, 分别施加正阶跃信号  $u(k) = 0.5$  和负阶跃信号  $u(k) = -0.5$ , 其阶跃响应曲线如图4所示.

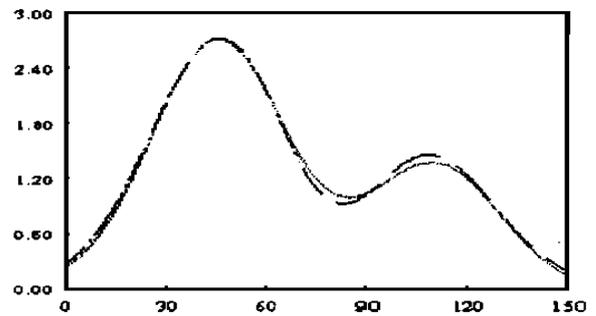


图3 Hermite拟合曲线

Fig. 3 The curve of Hermite function

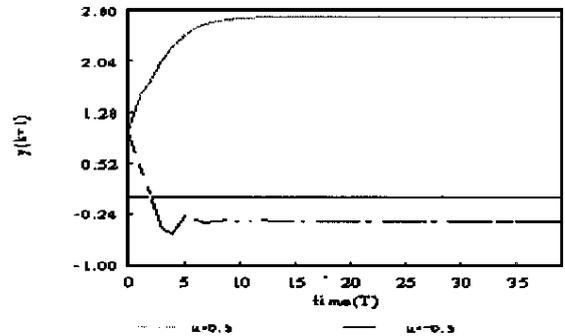


图4 非线性对象阶跃响应

Fig. 4 The step response of nonlinear system

可见, 该对象具有严重的非线性动态特性. 对这样一个非线性系统, 要想在大的范围内对其实现有效的控制, 一般的控制器是无法实现的. 本文采用RBF神经网络并使用在线训练方式建立该对象的逆向模型, 进而实现所谓的逆模控制.

该对象的逆模RBF神经网络是一个3输入, 1输出网络. 在前述工作点上, 用  $u \in [0.5, 0.5]$  的随机信号激励系统, 获取其输入、输出数据, 进而得到神经网络训练样本集. 这里的训练样本集由200组数据构成. 按照阈值参数选取的经验公式,

$$\eta_{max} = 1.732, \eta_{min} = 1.732,$$

$$\alpha = 0.99, \epsilon = 0.05, \gamma = 0.05$$

采用本文所提出的在线训练方式, 经过 400 次训练, 对未经归一化处理的训练样本集的 RSME 是 0.022009. (注: 训练样本集的均方根值是 0.422067, 两者之比约为 0.052)

得到该对象的神经网络逆模型后, 就可以实施逆模控制, 其中的神经网络作为控制器使用. 为考察其随动性能, 该控制系统的设定值取为方波信号, 周期  $T$  取为 20 个采样周期. 另外, 为避免控制作用过于强烈, 设定值经过一低通滤波器后再加入系统, 这里的低通滤波系数取为 0.9. 控制结果如图 6 所示.

仿真结论: 由图可见, 控制效果是非常好的, 这从另一方面说明网络的训练算法是有效的, 网络训练的精度也是比较高的. 这说明本文所提出的在线训练算法可以用于非线性控制当中.

必须指出, 本文仿真仍采用固定样本数据和循环训练方法, 但其训练方式却是在线的, 体现了在线训练算法的本质, 本文所有仿真都可以采用在线收集数据, 在线训练的方式进行.

### 6 结论(Conclusions)

本文提出了一种 RBF 神经网络的在线训练算法. 该算法的提出是基于 RBF 网络特性和一种分组优化策略. 在对原有 RBF 神经网络训练算法进行改进的同时, 对相关阈值参数的选取给出了一个经验公式, 从而使训练结果能够得以保证, 也使 RBF 神经网络的在线训练算法更具操作性, 这对实际应用是非常重要的. 仿真表明, 本文所提出的算法是有效的, 并在非线性系统的控制中取得了非常好的结果.

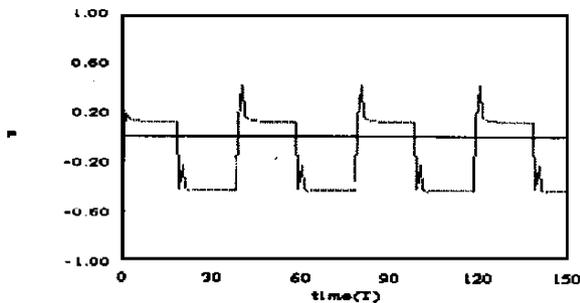


图 5 RBF 神经网络控制器输出

Fig. 5 The output of RBFNN controller

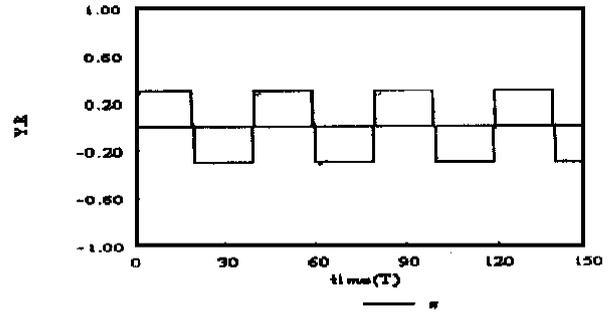


图 6 IMC 控制非线性对象的输出

Fig. 6 The output of nonlin based on RBFNN controller

### 参 考 文 献 (References)

- 1 Moody J, Darken C. Fast Learning in Networks of Locally-tuned Processing Units, *Neural Computation*, 1989, (1): 281 ~ 294
- 2 Chen S, Grant P M, Cowar C F N. Orthogonal Least Square Algorithms for Training Radial Basis Function Networks, *IEE Proceeding-F* 1992, **139**(6): 378 ~ 384
- 3 Chen S, Grant P M, Cowar C F N. Orthogonal Least Square Algorithms for Training Radial Basis Function Networks, *IEE Trans. on Neural Networks*, 1991, **2**(2): 302~ 309
- 4 Chen S, Billing S A, Grant P M. Recursive Hybrid Algorithm for Nonlinear System Identification using Radial Function Network, *Int. J Control*, 1992, **55**(5): 1051 ~ 1070
- 5 王旭东, 邵惠鹤. RBF 神经网络及其在控制中的应用, *信息与控制*, 1997, **23**(4): 272~ 284
- 6 王旭东, 邵惠鹤. RBF 神经网络及其在非线系统建模中的应用, *控制理论与应用*, 1997, **14**(1): 59~ 66
- 7 John Platt, Resource Allocation Network for Function Interpolation, *Neural Computation*, 1991, (3): 213~ 225
- 8 方崇智, 萧德云. 过程辨识. 清华大学出版社, 北京

### 作者简介

王学雷(1973- ), 男, 上海交通大学博士研究生. 研究领域为神经网络及其应用, 工业系统建模等.

邵惠鹤(1936- ), 男, 教授, 博士生导师. 研究领域为工业过程先进控制、优化, 神经网络及其工业应用, 现场总线等.

李亚芬(1958- ), 女, 副教授. 研究领域为神经网络理论.