第16卷 第2期 物理学报 Vol. 16, No. 2
1960年2月 ACTA PHYSICA SINICA Feb., 1960

μ 介子与輕原子核散射时的反衝效应*

周光召 戴元本
(北京大学物理系) (数学研究所)

提 要

本文利用一簡单方法求得 μ 介子(电子)在自旋为零的原子核上散射时位势的反冲修正項. 所求得的位势对原子核的速度准确到一次近似，但对 μ 介子(电子)的速度沒有限制. 討論了反冲效应对相移和截面的修正,所得結果与 Foldy 等的論文作了比較.

一、引 言

通常处理电子的电磁散射时，把原子核看作静止的产生庫伦电場的源. 在考虑 μ 介子与輕原子核的电磁散射时,由于 μ 介子質量較大,原子核可以获得一定的动量. 原子核的运动不仅引起汉密頓量中动能項的变化,而且将产生一磁場,引起位能項的改变. 新增加的动能項及位能項对电子运动的影响称为核的反冲效应.

鉴于原子核比 μ 介子重得多,当 μ 介子的动能达到几百兆电子伏时,原子核在質心系中所得到的速度 v 比起光速 c 来仍然很小. 在以下的計算中,我們将只保留 v/c 的一級項,而考虑一个相对論的狄拉克粒子(μ 介子) 在非相对論准静止近似的原子核場中的运动.

当能量高的 μ 介子与重核散射时,不仅有反冲效应,而且有許多其他的效应，例如原子核到低激发态的非弹性散射等. 其他的这些效应目前还沒有很好的理論来說明，很难从实驗中区分出单独的反冲效应来.

Foldy, Ford 及 Yennie 在最近的一篇文章[1]中討論了高能电子与自旋为零的原子核散射时的反冲效应. 他們所用的方法在我們看来是不能令人滿意的. 他們先考虑一个自旋为 1/2 的原子核，用两个自旋为 1/2 的粒子間的 Breit 作用当作由反冲而新添的位能項,然后对原子核的运动量取非相对論近似,保留 v/c 的一級項，并扔掉所有含原子核自旋算符的項. 这样得到的位能便被認为是电子与自旋为零的原子核散射时的由反冲引起的位能. 我們知道，Breit 作用不仅对原子核的速度只准确到 v/c 的一級，而且对电子的速度 v_e 也只准确到 v_e/c 的一級. 由于在所討論的問題中,电子速度已接近光速,这样得到的位能不能認为是准确的. 此外，由自旋为 1/2 的原子核出发来求得自旋为零的原子核的反冲效应也不是十分合理的.

在本文中，我們将用一簡单的方法求得高能 μ 介子(或电子)与自旋为零的原子核散射时由反冲而产生的位阱，并根据它討論整个的反冲效应. 我們求得的位阱对核子速度保留到一級近似，但对任意的 μ 介子(或电子)的速度都是正确的. 我們的方法很容易推

* 1959年12月7日收到.

广到自旋不为零的其他原子核.

本文的第二节討論由反冲而新添的位能項，第三节討論反冲汉密頓量的径向方程．最后一节討論反冲方程的相移．

二、汉密頓量中的位能項

命 $|p\rangle$ 及 $|p'\rangle$ 代表原子核在始态及末态的状态矢量；p 及 p' 代表原子核在始态及末态上的动量；k 及 k' 为 μ 介子在始态及末态的动量．对电磁作用取二級微扰时，μ^+ 介子对原子核散射的 S 矩陣元可以表成下列形式：

$$\langle p'k'|S|pk\rangle = \delta^3(\mathbf{p}'-\mathbf{p})\delta^3(\mathbf{k}'-\mathbf{k}) - \\ - \frac{1}{(2\pi)^3}(2\pi)^4\delta^4(p'+k'-p-k)e\langle p'|j_\alpha(0)|p\rangle\frac{1}{q^2}\bar{u}(k')\gamma_\alpha u(k), \tag{1}$$

其中 $q=p-p'=k'-k$；$u(k)$ 代表 μ 介子的狄拉克波函数；$j_\alpha(x)$ 代表所有強作用粒子的电流密度．在(1)式中，$\langle p'|j_\alpha(0)|p\rangle$ 代表原子核的电流矩陣元；$\frac{1}{q^2}\langle p'|j_\alpha(0)|p\rangle$ 代表由原子核电流所产生的推迟場的富氏变換項.

根据普遍的对称性質，自旋为零的原子核的电流矩陣元具有下列形式：

$$\langle p'|j_\alpha(0)|p\rangle = \frac{Ze}{2M}F(q^2)(p+p')_\alpha, \tag{2}$$

其中M为原子核的質量；$F(q^2)$ 为一标量函数，它的富氏变換正好是原子核的电荷分布函数.

如对原子核取非相对論准靜止近似时，我們只需保留到 $\frac{\mathbf{p}}{M}$ 及 $\frac{\mathbf{p}'}{M}$ 的一級項，此时

$$P_0 \simeq P_0' \simeq M, \quad q_0 \simeq 0. \tag{3}$$

在 q^2 中忽略 q_0^2 相当于忽略掉推迟效应，即在原子核产生的場中只保留靜止的庫伦場及似稳的磁場．很明显，其他的項都具有 v^2/c^2 或更小的数量級.

如果在質心系中認为 (1) 式的 S 矩陣元看作由 μ 介子与原子核相互作用的位阱产生的，則有

$$\langle p'k'|S|pk\rangle = \delta^3(\mathbf{p}'-\mathbf{p})\delta^3(\mathbf{k}'-\mathbf{k}) - \\ - i\frac{1}{(2\pi)^3}(2\pi)^4\delta^4(p'+k'-p-k)u^*(k')V(\mathbf{q}^2)u(k), \tag{4}$$

其中

$$V(\mathbf{q}^2) = \int V(r)e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}}dV, \tag{5}$$

$V(r)$ 为相互作用的位阱.

在質心系中比較(4)及(1)，即得

$$V(\mathbf{q}^2) = \frac{Ze^2}{\mathbf{q}^2}F(\mathbf{q}^2) - \frac{Ze^2}{2M}\left[\boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{p}'\frac{F(\mathbf{q}^2)}{\mathbf{q}^2} + \frac{F(\mathbf{q}^2)}{\mathbf{q}^2}\boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{p}\right] \tag{6}$$

或

$$V(r) = V_0(r) + V'(r); \tag{7}$$

其中

$$V_0(r) = \frac{Ze^2}{(2\pi)^3}\int \frac{1}{\mathbf{q}^2} F(\mathbf{q}^2) e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} d^3\mathbf{q} = Ze^2 \int \frac{\rho(r')}{4\pi|r-r'|} dV'_r; \tag{8}$$

$$\rho(r) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int F(\mathbf{q}^2) e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} d^3\mathbf{q}; \tag{9}$$

$$V'(r) = -\frac{1}{2M}[\boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{p}V_0(r) + V_0(r)\boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{p}]. \tag{10}$$

在(10)式中，$\mathbf{p}$ 应了解为 $-i\nabla_r$.

很明显 $V_0(r)$ 代表 μ 介子与原子核之間的庫伦作用，而 $V'(r)$ 代表它們之間的磁的相互作用. 和[1]中所得到的公式(11)比較，我們所得的公式不仅更为正确，而且要簡单得多.

上面的公式是对 μ^+ 介子的散射求的，对 μ^- 介子的散射，我們需要改变 $V_0(r)$ 和 $V'(r)$ 的符号.

在質心系中准确到 $\frac{P}{M} = (v/c)$ 的总汉密頓量为

$$H = -\boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{p} - \beta m + V_0(r) + \frac{1}{2M}[p^2 - (\boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{p}V_0(r) + V_0(r)\boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{p})], \tag{11}$$

其中 α 及 β 为 μ 介子的狄拉克算符；$\mathbf{p}$ 为質心系中的相对动量；m 为 μ 介子的質量.

三、径向方程的分离

在本节中，我們采用标准的方法[2]，将波动方程

$$H\psi = E\psi \tag{12}$$

中的与角度有关的部分分离出来，以便求得径向方程.

令

$$\alpha_r = r^{-1}\boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{r}, \quad P_r = \mathbf{p}\cdot(\mathbf{r}/r) = r^{-1}\mathbf{r}\cdot\mathbf{p} - ir^{-1},$$

并定义矩陣 k，便得

$$\boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{p} = \alpha_r p_r + ir^{-1}\alpha_r\beta k.$$

在不影响所采用的准确度下，可在(11)式中作下列替代：

$$\begin{aligned} P^2 &\to -M^2 + (V_0 - E)^2 - i\alpha_r dV_0/dr \\ \boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{p}V_0 + V_0\boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{p} &\to 2(-\beta m + V_0 - E)V_0 \end{aligned} \tag{13}$$

利用(13)，我們得到下列近似的汉密頓量：

$$\begin{aligned} H = &-\alpha_r p_r - ir^{-1}\alpha_r\beta k - \beta m + V_0 + \\ &+ \frac{1}{2M}\left(E^2 - V_0^2 - m^2 + 2\beta m V_0 - i\alpha_r\frac{dV}{dr}\right). \end{aligned} \tag{14}$$

取表象

$$i\alpha_r = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \psi = \begin{pmatrix} r^{-1}F \\ r^{-1}G \end{pmatrix} \quad ip_r = \frac{d}{dr}$$

代入(12)中，可得径向方程

$$\begin{aligned} &\left[E + m - V_0 - \frac{1}{2M}(-V_0^2 + E^2 - m^2 + 2mV_0)\right]F - \\ &- \left(\frac{d}{dr} + kr^{-1} - \frac{1}{2M}\frac{dV_0}{dr}\right)G = 0, \end{aligned} \tag{15}$$

$$\left[E - m - V_0 - \frac{1}{2M}(-V_0^2 + E^2 - m^2 - 2mV_0)\right]G + \\ + \left(\frac{d}{dr} - kr^{-1} - \frac{1}{2M}\frac{dV_0}{dr}\right)F = 0. \tag{16}$$

作下列变换：

$$\begin{aligned} F &= e^{\frac{1}{2M}V_0}F', \\ G &= e^{\frac{1}{2M}V_0}G', \\ \varepsilon &= E - \frac{1}{2M}(E^2 - m^2); \end{aligned} \tag{17}$$

并将(17)式代入(16)中，得到

$$\left[\varepsilon + m - V_0 + \frac{1}{2M}(V_0^2 - 2mV_0)\right]F' - \left(\frac{d}{dr} + kr^{-1}\right)G' = 0, \tag{18}$$

$$\left[\varepsilon - m - V_0 + \frac{1}{2M}(V_0^2 + 2mV_0)\right]G' + \left(\frac{d}{dr} - kr^{-1}\right)F' = 0. \tag{19}$$

(18)和(19)即为求得之径向方程．鉴于 $V_0(r)$ 在 $r \to \infty$ 远时趋于零，故在无穷远处 $F = F'$，$G = G'$，我們可以直接由(17)及(18)中求出散射的相移．

如果象[1]中一样，忽略掉 V_0^2 的項，对电子来讲又忽略去与 m 成正比的項，則所有的反冲效应都归結为将 E 換成 $\varepsilon = E - \frac{1}{2M}(E^2 - m^2)$．

四、反冲方程的相移

引进下列无因次的量：

$$\begin{aligned} &\epsilon = \frac{\varepsilon}{m}, && v = \frac{V_0}{m}, && \mu = \frac{m}{M}, \\ &x = mr(\epsilon^2 - 1)^{1/2}, && f = \frac{1}{2}(\epsilon + 1)^{1/2}F', && g = \frac{1}{2}(\epsilon - 1)^{1/2}G'. \end{aligned} \tag{20}$$

将(20)代入(19)及(18)中，可得到无因次的反冲方程

$$\frac{dg}{dx} = -kx^{-1}g + \left(1 - \frac{(1+\mu)v - \frac{1}{2}\mu v^2}{\epsilon + 1}\right)f, \tag{21}$$

$$\frac{df}{dx} = kx^{-1}f - \left(1 - \frac{(1-\mu)v - \frac{1}{2}\mu v^2}{\epsilon - 1}\right)g. \tag{22}$$

在(21)及(22)中将 $\mu = 0$，即得到无反冲效应的散射方程，令其解为 f_0 及 g_0．在 $x \to \infty$ 时，我們选择归一化因子使得 $f_0 \to \cos\varphi_0$，$g_0 \to \sin\varphi_0$，其中 $\varphi_0 = x + \gamma\ln x - \frac{1}{2}\pi l + \eta_0$，$\eta_0$ 为无反冲效应的庫伦相移．在 $x \to \infty$ 时，f 和 g 亦趋于类似 f_0 和 g_0 的形式，只是此时相移 η 变了．

由方程(21)及(22)可得

$$\frac{d}{dx}(f_0g - g_0f) = -\frac{\mu}{\epsilon+1}\left(v - \frac{1}{2}v^2\right)f_0f + \frac{\mu}{\epsilon-1}\left(v + \frac{1}{2}v^2\right)g_0g =$$

$$= -\frac{\mu}{\epsilon(1-\epsilon^{-2})}\left[\left(\frac{1}{2\epsilon}v^2 + v\right)(f_0f - g_0g) - \left(\frac{1}{2}v^2 + \frac{1}{\epsilon}v\right)(f_0f + g_0g)\right]. \quad (23)$$

由(23)及无穷远处渐近条件,并忽略 μ^2 数量級的項,将 f, g 換成 f_0 及 g_0, 可得反冲效应引起的相移修正:

$$\eta - \eta_0 = -\frac{\mu}{\epsilon(1-\epsilon^{-2})}\int_0^\infty\left[(f_0^2 - g_0^2)\left(v + \frac{1}{2\epsilon}v^2\right) - (f_0^2 + g_0^2)\left(\frac{1}{2}v^2 + \frac{1}{\epsilon}v\right)\right]dx. \quad (24)$$

由 (24) 可以看到: 由反冲引起的相移修正的数量級 $\sim (\alpha Z)(m/M)(m/\varepsilon)$ 或 $(\alpha Z)^2(m/M)(m/\varepsilon)$. (24) 中的主要項第一項与[1]中的(41)式的最后一項是一致的,如[1]中所指出的,由于(18)和(19)式在下列变換下保持不变:

$$m \to -m, \quad k \to -k, \quad F' \to G', \quad G' \to -F'. \quad (25)$$

对 μ 介子質量的最低級近似而言,此項对散射截面的貢献抵消了. 因此反冲效应对散射截面的修正 $\frac{\Delta\sigma}{\sigma}$ 的数量級約为 $r_1(m/M)(m/\varepsilon)^2$ 或 $r_2(\alpha Z)(m/M)(m/\varepsilon)$, 其中 r_1, r_2为两个数量因子.

就反冲效应的数量級来講,我們的結果和[1]中得到的結果是相似的. 但由于[1]的作者采用的討論反冲效应的方法不完全可靠,他們得到的公式不仅是比較复杂的,而且不是完全正确的.

参 考 文 献

[1] Foldy, L. L., Ford, K. W. and Yennie, D. R., *Phys Rev.* **113** (1959), 1147.
[2] Schiff, L. I., Quantum Mechanics (1949), p. 322.

THE EFFECT OF RECOIL ON THE SCATTERING OF μ-MESONS BY LIGHT NUCLEI

CHOU KUANG-CHAO (*Peking University*)
DAI YUEN-BEN (*Institute of Mathematics*)

ABSTRACT

The correction of the recoil to the potential in the scattering of μ-mesons (or electrons) by zero-spin nuclei is derived by means of a simple method. The potential obtained is corrected to first order in the velocity of the nuclei but without restriction on the velocity of the μ-mesons (or electrons). The effect of recoil on the phase-shift and cross section is discussed. The results are compared with those of Foldy, Ford and Yennie. It is pointed out that the method used in the latter's work is not perfect, because it makes use of Breit's interaction which is valid only for small velocities.