

# 岩样单轴压缩塑性变形及断裂能研究

王学滨

(辽宁工程技术大学 力学与工程科学系, 辽宁 阜新 123000)

**摘要:** 首先研究了应变软化阶段岩石试件轴向塑性变形。假设局部化开始于峰值强度而轴向塑性位移根源于局部化的剪切位移。剪切带的相对塑性剪切位移与应力水平及剪切带宽度有关, 剪切带宽度由梯度塑性理论确定。剪切带的相对塑性剪切位移在轴向的分量为轴向塑性压缩位移。研究表明: 剪切带倾角对相对应力-塑性变形曲线斜率有一定的影响; 若剪切带倾角存在尺寸效应, 不同高宽比试件的相对应力-塑性变形曲线不是一条严格直线, 而是一个狭窄的区域, 类似“马尾”。但是, 剪切带倾角对相对应力-塑性变形曲线斜率的影响是有限的, 峰后应力-塑性变形曲线的斜率基本上是常量, 这与前人的一些试验现象相符。然后, 研究了单轴压缩条件下岩石试件全部断裂能的尺度律。全部断裂能由峰前断裂能及峰后断裂能两部分构成。在峰值强度前, 采用 Scott 模型描述了材料的非线性弹性特征, 得到了峰前断裂能的解析解。结果表明: 峰前断裂能与试件的高度有关。在峰值强度后, 材料的剪切应力-塑性剪切应变的本构关系为线性应变软化, 采用梯度塑性理论计算了由于剪切带塑性剪切变形而消耗的断裂能。目前提出的关于全部断裂能尺寸效应的解析解的正确性被前人的试验结果的线性回归结果验证。增加试件高度, 全部断裂能增加。增加弹性模量, 全部断裂能降低。若不考虑剪切带倾角及抗压强度的尺寸效应, 全部断裂能存在尺寸效应的原因是: 峰前的均匀塑性变形。

**关键词:** 岩石力学; 梯度塑性理论; 峰后塑性变形; 全部断裂能; 尺寸效应; 局部化

**中图分类号:** TU 451

**文献标识码:** A

**文章编号:** 1000-6915(2005)10-1735-05

## ANALYSIS OF PLASTIC DEFORMATION AND FRACTURE ENERGY OF ROCK SPECIMEN IN UNIAXIAL COMPRESSION

WANG Xue-bin

(Department of Mechanics and Engineering Sciences, Liaoning Technical University, Fuxin 123000, China)

**Abstract:** Firstly, axial plastic deformation of rock specimen in uniaxial compression subjected to shear failure is investigated. Assumption is made that shear localization in the form of a single shear band is initiated at peak shear stress in shear plane and that axial plastic deformation stems from the plastic shear slip of shear band. Relative shear displacement along shear band depends on shear stress level and shear band thickness described by gradient-dependent plasticity. The relative displacement can be decomposed into axial and lateral parts. The former is equal to axial plastic compressive deformation at rock specimen end. Then, relation between the axial plastic deformation and the flow compressive stress is proposed. It is found that shear band inclination angle influences the slope of the relation curve. If the angle is not dependent on specimen length, then the relation curve is not a strict straight line; but a narrow zone like a horsetail. In fact, the influence of shear band inclination angle can be neglected so that the slope can be approximately regarded as a constant, as is in agreement with some experimental results. Secondly, the effect of specimen length on total fracture energy in uniaxial compression subjected to shear failure is analyzed. Total fracture energy is the sum of pre-peak fracture energy and post-peak fracture energy. In

**收稿日期:** 2003-08-11; **修回日期:** 2003-11-05

**基金项目:** 国家自然科学基金青年基金项目(50309004)

**作者简介:** 王学滨(1975-), 男, 博士, 1998年毕业于辽宁工程技术大学机械学院机械设计专业, 现任讲师, 主要从事岩石力学理论与岩土工程数值计算方面的教学与研究工作。E-mail: wxbbb@263.net.

pre-peak stage, Scott model is used to describe the nonlinear elastic stress-strain relation and analytical solution of pre-peak fracture energy is derived. The solution shows that the pre-peak fracture energy is related to specimen length. In strain-softening stage, linear strain-softening constitutive relation between shear stress and plastic shear strain is adopted. Analytical solution of post-peak fracture energy dissipated by localized plastic shear deformation is derived based on gradient-dependent plasticity. The reasonability of present analytical solution of total fracture energy for quasi-brittle materials is verified by linear regression on earlier experimental result. Longer length of specimen leads to higher total fracture energy, and bigger elastic modulus to lower the total fracture energy. If the size effects of compressive strength and inclination angle of shear band are neglected, the reason for size effect of total fracture energy is the uniform plastic compressive deformation in pre-peak stage.

**Key words:** rock mechanics; gradient-dependent plasticity; post-peak plastic deformation; total fracture energy; size effect; localization

## 1 引言

和其他试验方法相比, 单轴压缩试验是在实验室内获得准脆性材料力学性能的最常用手段<sup>[1-9]</sup>, 大量研究表明: 虽然在简单的单轴压缩试验条件下, 准脆性材料的变形、破坏也异常复杂。丰富的试验结果不仅有助于对破坏机制的深入理解, 还且也为检验理论模型的正确性提供了可能。在理论上, 分析准脆性材料在单轴压缩或三轴压缩试验条件下的力学行为的研究已有一些较好的研究成果<sup>[10-13]</sup>。虽然有些模型也能模拟出应变软化的宏观力学行为, 但不能预测在应变软化阶段, 准脆性材料的试件高度对力学性能的影响(尺寸效应问题); 而且, 有些理论模型虽然考虑了局部化, 但是局部化带并没有尺寸, 这一点与有关的试验结果并不相符; 另外, 有些模型更适于研究准脆性材料的单轴拉伸问题<sup>[14, 15]</sup>, 局部化带的法向与轴向一致, 这些模型用于研究单轴压缩问题并不适合。

文[16~20]基于剪切应变梯度塑性理论, 采用多种力学方法侧重研究准脆性材料的剪切局部化特征、稳定性及其宏观力学行为, 弥补了以往理论模型的若干缺陷, 如: 用具有一定尺寸的局部化带替代没有厚度的滑动面或滑移线; 用倾斜的局部化带替代水平的局部化带。然而, 上述理论研究并未涉及塑性轴向应变及断裂特性的研究。

本文首先对应应变软化阶段岩石试件轴向塑性变形进行了分析, 解释了前人的有关试验结果。然后, 采用 Scott 模型计算了峰前断裂能, 采用梯度理论计算了峰后断裂能。还将前人的一些试验结果与本文提出的理论结果进行了对比, 验证了所得到的

理论结果及所提出的力学模型的正确性。

## 2 轴向塑性变形分析

本文假设轴向塑性位移根源于局部化的塑性剪切位移。因此, 剪切带沿其切向错动引起的岩石试件轴向位移增量  $\delta_s$  可表示为

$$\delta_s = \frac{\sigma_c - \sigma}{c} w \sin \alpha \cos^2 \alpha \quad (1)$$

式中:  $\sigma_c$  为单轴抗压强度;  $\sigma$  为试样端部的压应力;  $c$  为软化模量;  $w$ ,  $\alpha$  分别为剪切带宽度、倾角, 由梯度塑性理论确定<sup>[16-20]</sup>。式(1)可改写为

$$\frac{d(\sigma/\sigma_c)}{d\delta_s} = -\frac{c}{w\sigma_c \sin \alpha \cos^2 \alpha} \quad (2)$$

由式(2)可见, 相对应力  $\sigma/\sigma_c$  - 塑性变形  $\delta_s$  曲线的斜率与流动应力  $\sigma$  无关。如果不同高宽比试件的本构参数(包括  $c$ ,  $w$  及  $\sigma_c$ ) 完全相同, 剪切带倾角  $\alpha$  也完全相同, 那么不同高宽比试件的相对应力 - 塑性变形曲线将严格是一条直线。

对于普通混凝土的单轴压缩试验, 抗压强度  $\sigma_c = 47.9$  MPa, 抗压强度所对应的应变为  $\varepsilon_c = 0.002$ 。根据  $E = 2G(1+\nu)$  计算剪切模量, 泊松比  $\nu = 0.2$ ,  $E = \sigma_c/\varepsilon_c$ 。内部长度取为  $l = 0.0243$  m, 剪切降模量  $\lambda = 3.8$  GPa。不同剪切带倾角下的理论结果见图 1, 文[2]的试验结果见图 2。

通过对比发现, 本文的理论解与有关的试验结果比较吻合, 理论解正确的反应了试验结果的“先窄后宽”现象, 类似“马尾”, 即当相对应力较大时, 试验结果比较集中, 因此数据区域较狭窄; 然而, 当相对应力较小时, 试验结果比较分散, 因此数据区域较宽阔。

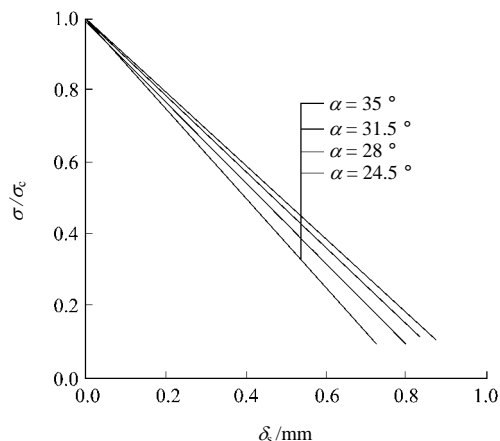


图 1 不同剪切带倾角下的相对应力-塑性变形的理论结果

Fig.1 Present theoretical results for relative stress-plastic deformation at different inclination angle of shear band

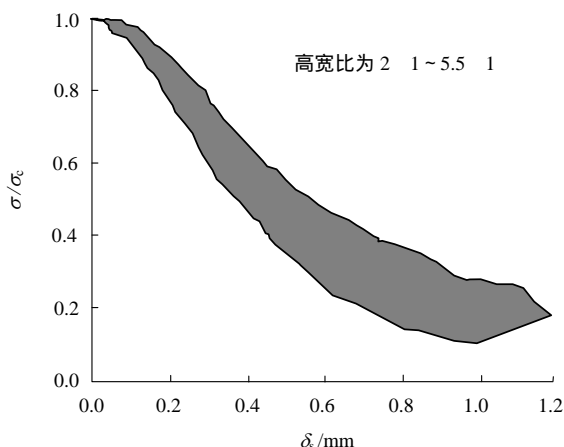


图 2 文[2]相对应力-塑性变形的试验结果

Fig.2 Experimental results of Ref.[2] for relative stress-plastic deformation

### 3 断裂能理论分析

自 1976 年 Hillerborg 等提出了虚拟裂纹模型，并定义了混凝土的断裂能(断裂混凝土单位面积所消耗的表面能)以来，由于问题的重要性及复杂性，包括混凝土材料在内的准脆性材料的断裂能研究一直吸引着研究人员的广泛兴趣<sup>[2, 21, 22]</sup>。然而，以往的研究主要集中在试验方面。基于不同的试验方法，对断裂能的尺寸效应问题有着较大的分歧。

断裂能理论研究方面大幅度落后于试验方面的主要原因在于：传统弹、塑性理论及断裂力学理论的本构方程中都没有长度量纲的参数，因此不能确定局部化带或剪切带的宽度。故不能对不同尺寸试

件(在应变软化阶段，由剪切带及带外弹性体构成)的应变软化阶段的响应(即应力-位移关系)进行预测，因此无法计算不同尺寸试件的断裂能。

#### 3.1 模型简化、基本假设及峰后断裂能 $A_{post}$ 计算

假设当试件所受的压应力为抗压强度  $\sigma_c$  时，将其按弹性模量  $E$  卸载。经过上述简化就可以在以  $\delta$  (试件端部位移)为横坐标，以轴线 2 为纵坐标的坐标系下，将上述应力-变形曲线简化为弹性阶段和应变软化阶段，见图 3。为计算峰后断裂能  $A_{post}$  简便，在峰后，假设准脆性材料的剪切本构关系线性应变软化。

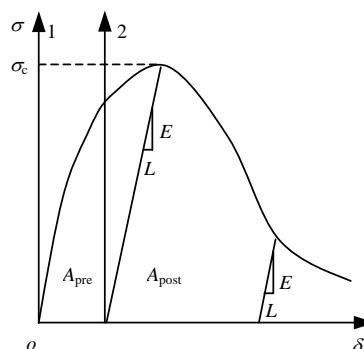


图 3 应力峰值前、后断裂能

Fig.3 Pre-peak and post-peak fracture energy

由于剪切带内部塑性应变分布规律的不均匀性，定义等效(或平均)塑性剪应变  $\bar{\gamma}^p$  为

$$\bar{\gamma}^p = \frac{\tau_c - \tau}{c} \tag{3}$$

式中： $\tau_c = 0.5\sigma_c \sin 2\alpha$  为剪切强度， $\tau = 0.5\sigma \sin 2\alpha$  为剪切带受到的剪应力。由于剪切带产生了塑性剪切变形，需要消耗的能量可以表示为

$$V = \frac{A_0 w}{\sin \alpha} \int \tau d\bar{\gamma}^p = -\frac{A_0 w}{c \sin \alpha} \int_{\tau_c}^{\tau} \tau d\tau = \frac{A_0 w}{2c \sin \alpha} (\tau_c^2 - \tau^2) \tag{4}$$

式中： $d\bar{\gamma}^p = -d\tau/c$ ， $A_0 w / \sin \alpha$  为剪切带的体积， $A_0 / \sin \alpha$  为剪切带的面积， $A_0$  为试件横截面面积。

在软化阶段，试件弹性体及剪切带内部弹性变形不消耗能量。剪切带由于要发生塑性剪切变形，因此要消耗能量，剪切带变形在单位面积上所需要吸收的能量，即为剪切断裂能。由于单轴压缩试件发生的是剪切破坏，因此，通过测量应力-应变曲线而得到的峰后断裂能即为此剪切断裂能，即

$$A_{post} = V / A_0 \tag{5}$$

本文未考虑由于轴向劈裂的断裂能。其原因在

于：(1) 轴向承载能力的降低，根源于试件内部的剪切变形<sup>[7]</sup>；(2) 轴向劈裂不会改变宏观的连续应力场<sup>[23]</sup>。因此，通过测量轴向应力-轴向应变曲线而得到的峰后断裂能不包含轴向劈裂断裂能。

最终可得

$$A_{\text{post}} = \frac{w \sin \alpha \cos^2 \alpha (\sigma_c^2 - \sigma^2)}{2c} \quad (6)$$

### 3.2 峰前断裂能 $A_{\text{pre}}$ 计算

在峰值强度之前，Scott 模型<sup>[24]</sup>的表达式为

$$\sigma = \sigma_c \left[ \frac{2\varepsilon}{\varepsilon_c} - \left( \frac{\varepsilon}{\varepsilon_c} \right)^2 \right] \quad (7)$$

式中： $\varepsilon$  为轴向应变， $\varepsilon_c$  为应力峰值强度所对应的应变。由式(7)可见，当  $\varepsilon = 0$  时， $\sigma = 0$ ；当  $\varepsilon = \varepsilon_c$  时， $\sigma = \sigma_c$ 。将式(7)中  $\sigma$  对  $\varepsilon$  求导，可得

$$\frac{d\sigma}{d\varepsilon} = \sigma_c \left( \frac{2}{\varepsilon_c} - \frac{2\varepsilon}{\varepsilon_c^2} \right) \quad (8)$$

当  $\varepsilon = 0$  时，有

$$E = \frac{d\sigma}{d\varepsilon} = \frac{2\sigma_c}{\varepsilon_c} \quad (9)$$

如图 4 所示，设应力峰值强度时试样具有的弹性应变能密度设为  $U_e$ ，则有

$$U_e = \frac{\sigma_c^2}{2E} = \frac{\sigma_c \varepsilon_c}{4} \quad (10)$$

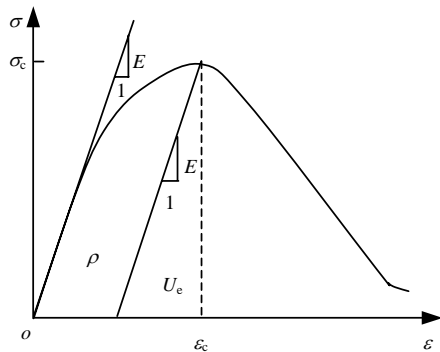


图 4 峰前断裂能密度及 Scott 模型

Fig.4 Density of pre-peak fracture energy and Scott model

应力峰值强度前断裂能密度(单位体积的断裂能)  $\rho$  可以表示为

$$\rho = \int_0^{\varepsilon_c} \sigma d\varepsilon - U_e \quad (11)$$

利用式(7)，(11)可得

$$\rho = 5\sigma_c \varepsilon_c / 12 \quad (12)$$

又由于  $\rho$  与  $A_{\text{pre}}$  的关系为

$$A_{\text{pre}} = L\rho \quad (13)$$

式中： $L$  为试件高度。因此， $A_{\text{pre}}$  的理论公式为

$$A_{\text{pre}} = 5L\sigma_c \varepsilon_c / 12 \quad (14)$$

### 3.3 全部断裂能计算

设全部断裂能为  $G_F$ ，因此有

$$G_F = A_{\text{post}} + A_{\text{pre}} \quad (15)$$

$$G_F = A + BL \quad (16)$$

式中： $A$  为峰后断裂能  $A_{\text{post}}$ ， $B = 5\sigma_c \varepsilon_c / 12$ 。

图 5 中数据点是文[2]对普通混凝土的全部断裂能的试验结果，该结果比较分散，其中  $\sigma / \sigma_c = 33\%$ 。图中实直线是作者对试验结果的线性回归结果，可见：全部断裂能与试件高度成正比。因此，试验结果的回归结果与理论结果是一致的。

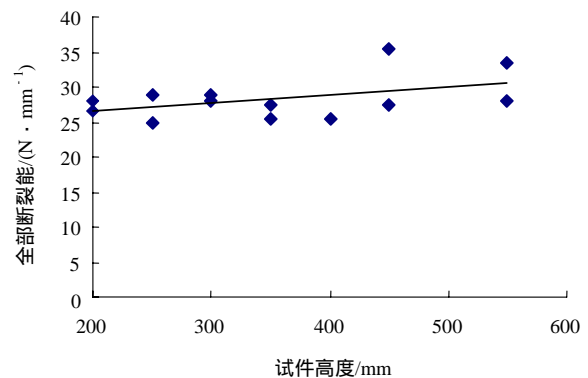


图 5 文[2]关于全部断裂能的试验结果及线性回归结果

Fig.5 Experimental results of Ref.[2] on total fracture energy obtained by Jansen et al. and linear regression

## 4 结 论

若剪切带倾角存在尺寸效应，不同高宽比试件的相对应力-塑性变形曲线是一个狭窄的区域，类似“马尾”。但是，剪切带倾角对相对应力-塑性变形曲线斜率的影响有限，峰后应力-塑性变形曲线的斜率基本上是常量，这与前人的一些试验现象相符。

不同试件高度的相对应力-塑性变形曲线斜率基本上是常量，该斜率可看作岩石应变软化的本构关系。全部断裂能具有尺寸效应，原因是峰前的均匀塑性变形。若不考虑剪切带倾角及抗压强度的尺寸效应，峰后局部化变形不产生断裂能的尺寸效应。

本文所提出的全部断裂能解析解，可以考虑多种因素对全部断裂能的影响。增加抗压强度，全部断裂能增加。全部断裂能与局部化带宽度成正比，而与软化模量成反比。

## 参考文献(References) :

- [1] Hudson J A , Crouch S L , Fairhurst C. Soft , stiff and servo-controlled testing mechanics : a review with reference to rock failure[J]. *Engrg. Geol.* , 1972 , 6(3) : 155 – 189.
- [2] Jansen D C , Shah S P. Effect of length on compressive strain softening of concrete[J]. *Journal of Engineering Mechanics* , ASCE , 1997 , 123(1) : 25 – 35.
- [3] Van Mier J G M , Shah S P , Arnaud M. Strain-softening of concrete in uniaxial compression[J]. *Materials and Structures* , 1997 , 30 : 195 – 209.
- [4] Choi S , Thienel K C , Shah S P. Strain softening of concrete in compression under different end constraints[J]. *Magazine of Concrete Research* , 1996 , 48 : 103 – 115.
- [5] Wawersik W R , Fairhurst C. A study of brittle rock fracture in laboratory compression experiments[J]. *Int. J. Rock Mech. Min. Sci. & Geomech. Abstr.* , 1970 , 7(5) : 561 – 575.
- [6] He C , Okubo S , Nishimatsu Y. A study on the class behaviour of rock[J]. *Rock Mechanics and Rock Engineering* , 1990 , 23(4) : 261 – 273.
- [7] 尤明庆. 岩样单轴压缩的失稳破坏和试验机加载性能[J]. *岩土力学* , 1998 , 19(3) : 43 – 49.(You Mingqing. Instability failure of rock specimen in uniaxial compression and the loading behavior of testing machine[J]. *Rock and Soil Mechanics* , 1998 , 19(3) : 43 – 49.(in Chinese))
- [8] 陈四利, 冯夏庭, 李邵军. 岩石单轴抗压强度与破裂特征的化学腐蚀效应[J]. *岩石力学与工程学报* , 2003 , 22(4) : 547 – 551.(Chen Sili , Feng Xiating , Li Shaojun. Effects of chemical erosion on uniaxial compressive strength and meso-fracturing behaviors of rock[J]. *Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering* , 2003 , 22(4) : 547 – 551.(in Chinese))
- [9] 李 炼, 徐 钺, 李启光, 等. 花岗岩板渐进破坏过程的微观研究[J]. *岩石力学与工程学报* , 2002 , 21(7) : 940 – 947.(Li Lian , Tsui Y , Lee P K K , et al. Progressive cracking of granite plate under uniaxial compression[J]. *Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering* , 2002 , 21(7) : 940 – 947.(in Chinese))
- [10] Zhou G L , Tham L G , Lee P K K , et al. A phenomenological constitutive model for rocks with shear failure mode[J]. *Int. J. Num. Anal. Methods. Geomech.* , 2001 , 25(4) : 391 – 414.
- [11] 李 宏, 朱浮声, 王泳嘉, 等. 岩石统计细观损伤与局部弱化失稳的尺寸效应[J]. *岩石力学与工程学报* , 1999 , 18(1) : 28 – 32.(Li Hong , Zhu Fusheng , Wang Yongjia , et al. Size effects of statistical meso-damage and local softening instability of rock[J]. *Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering* , 1999 , 18(1) : 28 – 32.(in Chinese))
- [12] Schreyer H L. Analytical solutions for nonlinear strain-gradient softening and localization[J]. *Journal of Applied Mechanics* , ASCE , 1990 , 57(3) : 522 – 528.
- [13] 李兆霞, 肖力光, 余颖禾. 脆性固体损伤和局部软化的有限元分析[J]. *计算结构力学及其应用* , 1996 , 13(3) : 279 – 286.(Li Zhaoxia , Xiao Liguang , She Yinghe. Finite element analysis of strain softening response for damaged materials[J]. *Computational Structural Mechanics and Application* , 1996 , 13(3) : 279 – 286.(in Chinese))
- [14] de Borst R , Muhlhaus H B. Gradient-dependent plasticity : formulation and algorithmic aspects[J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* , 1992 , 35(3) : 521 – 539.
- [15] 潘一山, 徐秉业, 王明洋. 岩石塑性应变梯度与 类岩石变形行为研究[J]. *岩土工程学报* , 1999 , 21(4) : 472 – 474.(Pan Yishan , Xu Bingye , Wang Mingyang. The study of plastic strain gradient and class behavior of rock[J]. *Chinese Journal of Geotechnical Engineering* , 1999 , 21(4) : 472 – 474.(in Chinese))
- [16] 王学滨, 潘一山, 杨小彬. 准脆性材料试件应变软化尺度效应理论研究[J]. *岩石力学与工程学报* , 2003 , 22(2) : 188 – 191.(Wang Xuebin , Pan Yishan , Yang Xiaobin. Size effect analysis on strain softening quasi-brittle materials considering strain gradient effect[J]. *Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering* , 2003 , 22(2) : 188 – 191.(in Chinese))
- [17] Hillerborg A , Modeer M , Petersson P E. Analysis of crack formation and crack growth in concrete by means of fracture mechanics an finite element[J]. *Cement. and Concrete Research* , 1976 , 6(6) : 773 – 782.
- [18] Navalurkar R K , Hsu C T , Kim S K. True fracture energy of concrete[J]. *ACI Materials Journal* , 1999 , 96(2) : 213 – 225.
- [19] Hillerborg A. Results of three comparative test series for determining the fracture energy GF of concrete[J]. *Materials and Structures* , 1985 , 18(107) : 407 – 413.
- [20] Jenq Y S , Shah S P. Two parameter fracture model for concrete[J]. *Journal of Engineering Mechanics* , ASCE , 1985 , 111(10) : 1 227 – 1 241.
- [21] Markeset G , Hillerborg A. Softening of concrete in compression localization and size effects[J]. *Cement. and Concrete Research* , 1995 , 25(4) : 702 – 708.
- [22] 徐世烺, 赵国藩, 黄承逵. 混凝土大型试件断裂能 GF 及缝端应变场[J]. *水利学报* , 1991 , (11) : 17 – 25.(Xu Shilang , Zhao Guofan , Huang Chengkui. Fracture energy and strain field near the tip of a notch in huge concrete specimen under compact tension[J]. *Journal of Hydraulic Engineering* , 1991 , (11) : 17 – 25.(in Chinese))
- [23] Bazant Z P , Xiang Y Y. Size effect in compression fracture : splitting crack band propagation[J]. *Journal of Engineering Mechanics* , 1997 , 123(2) : 162 – 171.
- [24] Mendis P , Pendyala R , Setunge S. Stress-strain model to predict the full-range moment curvature behavior of high-strength concrete sections[J]. *Magazine of Concrete Research* , 2000 , 52(4) : 227 – 234.