

文章编号: 1002-0411(2001)01-041-05

不确定时变时滞组合系统的鲁棒分散控制

徐兆棣¹ 张嗣瀛²

(1. 沈阳师范学院数学计算机系 沈阳 110031; 2. 东北大学自动控制系 沈阳 110006)

摘要: 研究一类互联项与孤立子系统均含有时变状态时滞的不确定组合系统的状态反馈鲁棒分散控制问题, 利用线性矩阵不等式(LMI)方法设计出线性无记忆状态反馈分散控制器使受控系统在平衡点处渐近稳定. 最后给出的数值例子验证了所给结果的有效性.*

关键词: 组合系统; 时变时滞; 鲁棒分散控制

中图分类号: TP13

文献标识码: B

ROBUST DECENTRALIZED CONTROL FOR UNCERTAIN INTERCONNECTED SYSTEMS WITH TIME-VARYING DELAY

XU Zhao-di¹ ZHANG Siying²

(1. Department of Mathematics and Computer, Shenyang Normal University, Shenyang 110031;

2. Department of Automatic Control, Northeastern University, Shenyang 110006)

Abstract: In this paper, the problem of robust decentralized control is investigated for a class of uncertain interconnected system with time-varying delay. Using LMI, a type of memoryless linear controller is developed, which renders the closed-loop system asymptotically stable. Finally, a numerical example is presented to illustrate the results given in this paper and simulation shows that the method is very effective.

Keywords: interconnected systems, time-varying delay, robust decentralized control

1 引言(Introduction)

由于实际系统中元器件的老化, 灵敏度不够以及传输延误等因素的影响, 时滞现象广泛存在于各种实际系统之中. 而时滞的存在经常是许多物理系统不稳定的原因. 因此近年来, 不确定时滞系统鲁棒镇定问题的研究受到众多研究者的关注, 并且已经取得了不少结果^[1-4]. 但现有结果大多研究的是集中控制问题, 而分散控制的结果相对而言尚不多见. 文[5]讨论了一类时滞组合系统的分散镇定问题, 但其限制条件较强, 系统不含不确定性, 时滞是常数且仅出现于关联项中.

本文的目的是研究一类不确定时变时滞组合系统的状态反馈鲁棒分散镇定问题, 基于线性矩阵不等式(LMI)解矩阵的存在性, 应用泛函设计出一类分散线性无记忆状态反馈控制器使受控闭环系统渐近稳定.

2 系统描述及预备知识(Systems description and preliminaries)

考虑下述微分差分方程描述的不确定时变时滞组合系统

$$\begin{aligned} \dot{x}_i(t) &= [A_{i0} + \Delta A_{i0}(t)]x_i(t) + [A_{i1} + \Delta A_{i1}(t)]x_i(t - \tau(t)) + B_i u_i(t) + \sum_{j=1, j \neq i}^N H_{ij} x_j(t - \tau_j(t)) \\ x_i(t) &= \mathcal{Q}(t), \quad t \in [t_0 - h, t_0] \quad i = 1, 2, \dots, N \end{aligned} \quad (1)$$

其中 $x_i(t) \in R^{n_i}$ 是第 i 个子系统在时刻 t 的状态向量; $u_i(t) \in R^{m_i}$ 是第 i 个子系统在时刻 t 的控制输入向量; A_{i0}, A_{i1}, B_i 和 H_{ij} 是具有适当维数的常值矩阵; $\mathcal{Q}(t)$ 是连续的向量初值函数; $\Delta A_{i0}(t), \Delta A_{i1}(t)$ 是不确定的连续函数矩阵, 它们表示系统模型中的时变参数不确定性; $\tau(t) \geq 0, \tau_j(t) \geq 0 (j = 1, 2, \dots, N)$ 是有界函数, 且存在常数 h, k 和 $k_j (j = 1, 2, \dots, N)$ 使对任意 $t \geq t_0$ 有

* 收稿日期: 1999-12-14
基金项目: 国家自然科学基金(19970114)资助项目

$$0 \leq \tau(t), \tau_j(t) \leq h < +\infty, \quad \dot{\tau}(t) \leq k < 1, \quad \dot{\tau}_j(t) \leq k_j < 1 \quad j = 1, 2, \dots, N \quad (2)$$

不失一般性, 假定系统(1)中的不确定项 ΔA_{i0} 和 ΔA_{i1} 满足条件

$$\Delta A_{i0} = D_{i0} F_{i0}(t) E_{i0}, \quad \Delta A_{i1} = D_{i1} F_{i1}(t) E_{i1} \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (3)$$

其中 $D_{i0}, D_{i1}, E_{i0}, E_{i1}$ 是具有适当维数的常值矩阵, $F_{i0}(t), F_{i1}(t)$ 是具有 Lebesgue 可测元素的未知矩阵, 且满足条件

$$F_{i0}^T(t) = F_{i0}(t) \leq I, \quad F_{i1}^T(t) F_{i1}(t) \leq I \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (4)$$

本文所要研究的问题是: 对给定的不确定时变时滞组合系统(1), 设计分散线性无记忆状态反馈控制器

$$u_i = -K_i x_i \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (5)$$

使得对任意允许的不确定性, 闭环系统

$$\begin{aligned} \dot{x}_i(t) = & [A_{i0} - B_i K_i + \Delta A_{i0}(t)] x_i(t) + [A_{i1} + \Delta A_{i1}(t)] x_i(t - \tau(t)) \\ & + \sum_{j=1, j \neq i}^N H_{ij} x_j(t - \tau_j(t)) \quad i = 1, 2, \dots, N \end{aligned} \quad (6)$$

是渐近稳定的. 令

$$A_0 = \text{block diag}(A_{10}, A_{20}, \dots, A_{N0}), \quad A_1 = \text{block diag}(A_{11}, A_{21}, \dots, A_{N1}),$$

$$B = \text{block diag}(B_1, B_2, \dots, B_N), \quad D_0 = \text{block diag}(D_{10}, D_{20}, \dots, D_{N0}),$$

$$D_1 = \text{block diag}(D_{11}, D_{21}, \dots, D_{N1}), \quad F_0(t) = \text{block diag}(F_{10}(t), F_{20}(t), \dots, F_{N0}(t)),$$

$$F_1(t) = \text{block diag}(F_{11}(t), F_{21}(t), \dots, F_{N1}(t)), \quad E_0 = \text{block diag}(E_{10}, E_{20}, \dots, E_{N0}),$$

$$E_1 = \text{block diag}(E_{11}, E_{21}, \dots, E_{N1}), \quad K = \text{block diag}(K_1, K_2, \dots, K_N)$$

H 表示以 H_{ij} 为第 i 行第 j 列元素构成的分块矩阵, $x = [x_1^T \ x_2^T \ \dots \ x_N^T]^T$, 则闭环系统(6)可写为

$$\dot{x}(t) = [A_0 - BK + D_0 F_0(t) E_0] x(t) + [A_1 + D_1 F_1(t) E_1] x(t - \tau) + H x_\tau \quad (7)$$

其中 $x_\tau = [x_1^T(t - \tau_1) \ x_2^T(t - \tau_2) \ \dots \ x_N^T(t - \tau_N)]^T$

引理 2.1 设 $x, y \in R^n$ 为任意两个向量, ϵ 为任意一个正常数, 则

$$2x^T y \leq \epsilon x^T x + \epsilon^{-1} y^T y \quad (8)$$

引理 2.2 对任意分块矩阵 $H = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} & \dots & H_{1N} \\ H_{21} & H_{22} & \dots & H_{2N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ H_{N1} & H_{N2} & \dots & H_{NN} \end{bmatrix}_{n \times n}$, 其中 $H_{ii} \in R^{n_i \times n_i}$ ($n = \sum_{i=1}^N n_i$), 存在矩阵 H_l (l

$= 1, 2, \dots, m, m \leq N$) 使得 $H = \sum_{l=1}^m H_l$ 且 $\sum_{l=1}^m H_l H_l^T$ 是块对角矩阵, 其第 i 块为 $n_i \times n_i$ 矩阵.

证 不妨假定矩阵 H 的前 m 行均含有非零矩阵块, 后 $N - m$ 行均为零矩阵块. 取 H_l ($1 \leq l \leq m$) 为与矩阵 H 具有相同第 l 行矩阵块, 其余均为零矩阵块的 $n \times n$ 矩阵, 则显然引理结论成立.

3 主要结果(The main results)

定理 1 若存在正常数 $\epsilon_0, \epsilon_1, \epsilon_2$ 和 γ 使得 Riccati 矩阵不等式

$$P A_0 + A_0^T P + P(-\gamma B B^T + M)P + Q < 0 \quad (9)$$

存在对称正定解矩阵 $P = \text{block diag}(P_1, P_2, \dots, P_N)$ ($P_i \in R^{n_i \times n_i}$), 则分散线性无记忆状态反馈控制器

$$u = -Kx \quad K = \frac{\gamma}{2} B^T P \quad (10)$$

使闭环系统(7)渐近稳定. 其中

$$\begin{aligned} Q = & \epsilon_0^{-1} E_0^T E_0 + \epsilon_2^{-1} E_1^T E_1 + (\epsilon_1^{-1} + 1)I \\ M = & \epsilon_0 D_0 D_0^T + \frac{1}{1-k} (\epsilon_1 A_1 A_1^T + \epsilon_2 D_1 D_1^T) + \frac{m}{1-\bar{k}} \sum_{l=1}^m H_l H_l^T \end{aligned}$$

H_l 满足引理 2.2 的条件, $\bar{k} = \max\{k_j\}$.

证 考虑 Lyapunov 泛函

$$V(x_t) = x^T P x + \int_{-\tau}^t x^T(\sigma) \epsilon_1^{-1} I + \epsilon_2^{-1} E_1^T E_1 x(\sigma) d\sigma + \sum_{j=1}^N \int_{-\tau_j}^t x_j^T(\sigma) x_j(\sigma) d\sigma$$

显然 $V(x_t)$ 是正定的, $V(x_t)$ 沿闭环系统(7) 轨迹的导数为

$$\begin{aligned} \dot{V}(x_t) = & x^T(t) \{ P A_0 + A_0^T P - \mathcal{Y} P B B^T P + \epsilon_2^{-1} E_1^T E_1 + (\epsilon_1^{-1} + 1) I \} x(t) + 2x^T(t) P \{ D_0 F_0(t) E_0 x(t) \\ & + [A_1 + D_1 F_1(t) E_1] x(t - \tau) + H x_\tau \} - (1 - \bar{\tau}) x^T(t - \tau) (\epsilon_1^{-1} I + \epsilon_2^{-1} E_1^T E_1 x(t - \tau) \\ & - \sum_{j=1}^N (1 - \bar{\tau}_j) x_j^T(t - \tau_j) x_j(t - \tau_j) \end{aligned} \quad (11)$$

利用引理 2.1 的不等式可得

$$2x^T(t) P D_0 F_0(t) E_0 x(t) \leq \epsilon_0 x^T(t) P D_0 D_0^T P x(t) + \epsilon_0^{-1} x^T(t) E_0^T E_0 x(t)$$

$$2x^T(t) P A_1 x(t - \tau) \leq \frac{\epsilon_1}{1 - k} x^T(t) P A_1 A_1^T P x(t) + (1 - k) \epsilon_1^{-1} x^T(t - \tau) x(t - \tau)$$

$$2x^T(t) P D_1 F_1(t) E_1 x(t - \tau) \leq \frac{\epsilon_2}{1 - k} x^T(t) P D_1 D_1^T P x(t) + (1 - k) \epsilon_2^{-1} x^T(t - \tau) E_1^T E_1 x(t - \tau)$$

再由引理 2.1 的不等式及引理 2.2 可得

$$\begin{aligned} 2x^T(t) P H x_\tau &= 2x^T(t) P \sum_{i=1}^m H_i x_\tau \leq \sum_{i=1}^m \left\{ \frac{m}{1 - \bar{k}} x^T(t) P H_i H_i^T P x(t) + \frac{1 - \bar{k}}{m} x_\tau^T x_\tau \right\} \\ &= \sum_{i=1}^m \frac{m}{1 - \bar{k}} x^T(t) P H_i H_i^T P x(t) + \sum_{j=1}^N (1 - \bar{k}) \| x_j^T(t - \tau_j) \|^2 \end{aligned}$$

将以上不等式代入(11), 利用条件(9) 可得

$$\dot{V}(x_t) < - (k - \bar{\tau}) x^T(t - \tau) (\epsilon_1^{-1} I + \epsilon_2^{-1} E_1^T E_1) x(t - \tau) - \sum_{j=1}^N (\bar{k} - \bar{\tau}_j) \| x_j(t - \tau_j) \|^2$$

由(2) 式及 $\epsilon_1^{-1} I + \epsilon_2^{-1} E_1^T E_1 > 0$ 有 $\dot{V}(x_t) < 0$. 由此定理得证.

考虑不等式(9), 因为 P 是正定矩阵, 故存在矩阵 $\bar{P} = P^{-1}$. 将不等式(9) 两端分别左乘和右乘矩阵 \bar{P} , 则不等式(9) 化为下面的矩阵不等式:

$$A_0 \bar{P} + \bar{P} A_0^T - \mathcal{Y} B B^T + M + \bar{P} G G^T \bar{P} < 0 \quad (12)$$

其中 $G = \begin{bmatrix} \epsilon_0^{-1} E_0^T & \epsilon_1^{-1} E_1^T & \epsilon_1^{-1} I & I \end{bmatrix}$.

定理 2 若存在正常数 $\epsilon_0, \epsilon_1, \epsilon_2$ 和 \mathcal{Y} 使得线性矩阵不等式(LMI)

$$\begin{vmatrix} A_0 \bar{P} + \bar{P} A_0^T - \mathcal{Y} B B^T + M & \bar{P} E_0^T & \bar{P} E_1^T & \bar{P} & \bar{P} \\ E_0 \bar{P} & -\epsilon_0 I & 0 & 0 & 0 \\ E_1 \bar{P} & 0 & -\epsilon_2 I & 0 & 0 \\ \bar{P} & 0 & 0 & -\epsilon_1 I & 0 \\ \bar{P} & 0 & 0 & 0 & -I \end{vmatrix} < 0 \quad (13)$$

存在对称正定解矩阵($\bar{P} = \text{block diag}(\bar{P}_1, \bar{P}_2, \dots, \bar{P}_N)$ ($\bar{P}_i \in R^{n_i \times n_i}$), 则分散线性无记忆状态反馈控制器

$$u = - K x \quad K = \frac{\mathcal{Y}}{2} B^T \bar{P}^{-1} \quad (14)$$

使闭环系统(7) 渐近稳定.

证 利用 Schur 分解方法可知式(12) 与(13) 是等价的, 因此定理得证.

注 1: LMI 方法与 Riccati 方程方法相比较, 其优越性在于不需要预先对参数作任何调整即可一次性得出问题的解(如果解存在). 这对求解含有多个参数的 Riccati 矩阵不等式是非常方便的.

显然文[5] 所讨论的系统

$$\dot{x}(t) = A_i x_i(t) + B_i u_i(t) + \sum_{j=1, j \neq i}^N H_{ij} x_j(t - \tau) \quad (\tau \text{ 为常数}) \quad (15)$$

是本文所讨论系统的特殊情况.

推论 1 若存在正常数 ϵ 和 γ 使得 Riccati 矩阵不等式

$$PA_0 + A_0^T P + P(-\gamma BB^T + m \sum_{l=1}^m H_l H_l^T)P + I < 0 \quad (16)$$

存在对称正定解矩阵 $P = \text{block diag}(P_1, P_2, \dots, P_N)$ ($P_i \in R^{n_i \times n_i}$), 则分散线性无记忆状态反馈控制器(10)使闭环系统(10)和(15)渐近稳定.

类似定理 2, 推论 1 的结果可用线性矩阵不等式(LMI)描述如下:

推论 2 若存在正常数 γ 使得线性矩阵不等式(LMI)

$$\begin{bmatrix} A_0 \bar{P} + \bar{P} A_0^T - \gamma BB^T + m \sum_{l=1}^m H_l H_l^T & \bar{P} \\ \bar{P} & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (17)$$

存在对称正定解矩阵 $\bar{P} = \text{block diag}(\bar{P}_1, \bar{P}_2, \dots, \bar{P}_N)$ ($\bar{P}_i \in R^{n_i \times n_i}$), 则分散线性无记忆状态反馈控制器(14)使闭环系统(14)和(15)渐近稳定.

注 2: 由于一般情况下实际控制系统中控制输入的数量要比系统状态数量少(即输入矩阵的列数比行数小), 因此文[5]所得状态反馈控制的结果(定理 1)对许多实际控制系统难于应用(其中的不等式(8)不成立).

4 例子(Example)

考虑下面的不确定时变时滞组合系统

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 + r_{10} & -4 + s_{10} \end{bmatrix} x_1(t) + \begin{bmatrix} 0.2 + r_{11} & 1 \\ s_{11} & 0.5 \end{bmatrix} x_1(t - \tau(t)) \\ &\quad + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u_1(t) + \begin{bmatrix} 0.3 & 0.5 \\ 0.5 & 0 \end{bmatrix} x_2(t - \tau_2(t)) \\ \dot{x}_2(t) &= \begin{bmatrix} -3 + r_{20} & -1 + s_{20} \\ 1 & 2 \end{bmatrix} x_2(t) + \begin{bmatrix} 0.2 & 0.2 + r_{21} \\ 0.6 & 1 + s_{21} \end{bmatrix} x_2(t - \tau_1(t)) \\ &\quad + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u_2(t) + \begin{bmatrix} 0.4 & 0.2 \\ -1 & 0.3 \end{bmatrix} x_1(t - \tau_1(t)) \end{aligned}$$

其中 $\tau(t) = 0.2(4 + \sin t)$, $\tau_1(t) = 0.3(2 + \sin t)$, $\tau_2(t) = 0.3(2 + \cos t)$, r_{ij}, s_{ij} 是不确定参数, 满足条件 $|r_{ij}| \leq 0.2, |s_{ij}| \leq 0.2$ ($i=1, 2, j=0, 1$).

$$\begin{aligned} \text{取 } \Delta A_{10} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ r_{10} & s_{10} \end{bmatrix}, \Delta A_{11} = \begin{bmatrix} r_{11} & 0 \\ s_{11} & 0 \end{bmatrix}, \Delta A_{20} = \begin{bmatrix} r_{20} & s_{20} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \Delta A_{21} = \begin{bmatrix} 0 & r_{21} \\ 0 & s_{21} \end{bmatrix}, D_{10} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0.2 & 0.2 \end{bmatrix}, \\ D_{20} &= \begin{bmatrix} 0.2 & 0.2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, E_{11} = \begin{bmatrix} 0.2 & 0 \\ 0.2 & 0 \end{bmatrix}, E_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0.2 \\ 0 & 0.2 \end{bmatrix}, F_{ij} = \begin{bmatrix} 5r_{ij} & 0 \\ 0 & 5s_{ij} \end{bmatrix} \quad (i=1, 2, j=0, 1), \end{aligned}$$

$D_{11} = D_{21} = E_{10} = E_{20} = I$, 则条件(3)和(4)成立.

再取 $m=2, k=0.4, \bar{k}=0.3$, 由 LMI(13)可解得 $\bar{P} = \text{block diag}(\bar{P}_1, \bar{P}_2)$, $\gamma = 22.8994$, 其中

$$\bar{P}_1 = \begin{bmatrix} 0.5135 & 1.0149 \\ 1.0149 & 3.3361 \end{bmatrix}, \quad \bar{P}_2 = \begin{bmatrix} 1.6124 & -0.04 \\ -0.04 & 1.0816 \end{bmatrix}$$

由(14)可得使闭环系统渐近稳定的分散无记忆线性状态反馈控制器

$$u_1 = -38.8986x_{11} + 8.4011x_{12}, \quad u_2 = -0.2627x_{21} - 10.5956x_{22}$$

取初始条件 $[x_{11}(0) x_{12}(0) x_{21}(0) x_{22}(0)] = [2 \quad -1 \quad 2 \quad -3]$, $r_{ij} = 0.2 \sin t$, $s_{ij} = 0.2 \cos t$ ($i=1, 2, j=0, 1$) 进行数值仿真, 其结果见图 1 和图 2.

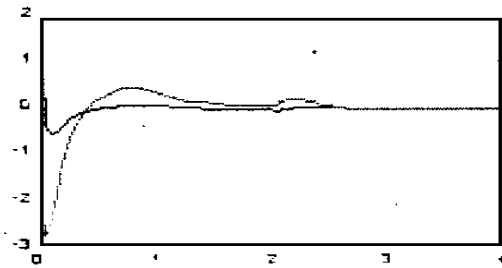


图1 第一个子系统的状态响应曲线\

Fig.1 The state response curves of the first subsystem

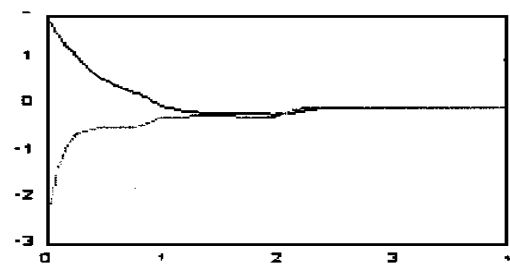


图2 第二个子系统的状态响应曲线

Fig.2 The state response curves of the second subsystem

注3: 对文[5]的例子, 容易验证文[5]中的(8)式不成立, 因此无法用其定理1构造状态反馈控制器. 而由本文推论2, 取 $m=2$, 由 LM I(17) 可解得 $\bar{P} = \text{block diag}(\bar{P}_1, \bar{P}_2)$, $\gamma = 3.8398$, 其中

$$\bar{P}_1 = \begin{bmatrix} 1.5914 & 1.2861 \\ 1.2861 & 1.7801 \end{bmatrix}, \quad \bar{P}_2 = \begin{bmatrix} 1.0397 & 0.0393 & -0.4764 \\ 0.0393 & 2.7797 & -0.3609 \\ -0.4764 & 0.3609 & 0.8628 \end{bmatrix}$$

由此可得保证闭环系统渐近稳定的状态反馈分散控制器

$$u_1 = -3.7036x_{11} + 1.5971x_{12}, \quad u_2 = \begin{bmatrix} -2.6556x_{21} - 0.8919x_{22} - 1.8394x_{23} \\ -1.7506x_{21} - 1.8727x_{22} - 3.9749x_{23} \end{bmatrix}$$

注4: 文[5]所给例子中, 第一个子系统的互联项系数矩阵有误(原文为 $\begin{bmatrix} 0 & 0.5 \\ 0.5 & 0 \end{bmatrix}$), 在上面的计算中将其改为 $\begin{bmatrix} 0 & 0.5 & 1 \\ 0.5 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

参 考 文 献 (References)

- 1 Wu H, Mizukami K. Linear and Nonlinear Stabilizing Continuous Controllers of Uncertain Dynamical Systems Including State Delay, IEEE Trans. Automat. Contr., 1996, 41(1): 116~121
- 2 Wu H. Robust Output Feedback Controllers for Dynamical Systems Including Delayed Perturbations. Int. J. Syst. Sci., 1999, 30(2): 211~218
- 3 曹登庆. 不确定时滞线性系统的镇定条件. 控制理论与应用, 1997, 14(1): 85~89
- 4 俞立, 褚健. 具有滞后输入的不确定系统的鲁棒镇定. 控制理论与应用, 1998, 15(2): 277~280
- 5 Hu Z. Decentralized Stabilization of Large Scale Interconnected Systems with Delays, IEEE Trans. Automat. Contr., 1994, 39(1): 180~182

作者简介

徐兆棣(1955-), 沈阳师范学院数学计算机系副教授, 在读博士. 研究领域为复杂控制系统结构性研究及鲁棒控制.

张嗣瀛(1925-), 东北大学自动控制系教授, 博士生导师, 中国科学院院士. 研究领域为对策论及复杂控制系统结构分析.