

# 粗糙表面分形维数估算的改进立方体覆盖法

张亚衡<sup>1</sup>, 周宏伟<sup>1</sup>, 谢和平<sup>1,2</sup>

(1. 中国矿业大学(北京) 岩石力学与分形研究所, 北京 100083; 2. 四川大学, 四川 成都 610065)

**摘要:** 岩石断口表面形貌的定量描述是评价其力学行为的基础。在粗糙表面分形维数估算的立方体覆盖法基础上, 提出了估算粗糙表面分形维数的改进立方体覆盖法。进一步根据粗糙表面形貌的有关数据, 采用立方体覆盖法和改进的立方体覆盖法分别对同一粗糙表面估算其分形维数值, 并进行了对比分析, 发现改进的立方体覆盖法不仅具有直接覆盖法的优点, 其估算过程也更加直观和方便。

**关键词:** 岩石力学; 粗糙表面; 分形维数; 立方体覆盖法; 改进的立方体覆盖法

**中图分类号:** TU 311.2

**文献标识码:** A

**文章编号:** 1000-6915(2005)17-3192-05

## IMPROVED CUBIC COVERING METHOD FOR FRACTAL DIMENSIONS OF A FRACTURE SURFACE OF ROCK

ZHANG Ya-heng<sup>1</sup>, ZHOU Hong-wei<sup>1</sup>, XIE He-ping<sup>1,2</sup>

(1. *Institute of Rock Mechanics and Fractals, China University of Mining and Technology, Beijing 100083, China;*

2. *Sichuan University, Chengdu 610065, China*)

**Abstract:** Description of fracture surface of rock is the base of evaluating its mechanical behavior. Ways to determine the fractal dimensions of a fracture surface are essential for a better understanding of its complete topographic characteristics. Triangular prism surface area method, projective covering method and cubic covering method are three widely used methods at present. Both the triangular prism surface area and projective covering methods cannot avoid the problem of approximate estimation of the real area surrounded by four points on the fracture surface, because the four points considered seldom lie on a plane. Such approximate calculations will certainly result in error. However, the cubic covering method can assure that every step is accurate. Therefore, it can be regarded as a reliable method for direct determination of the fractal dimension of a fracture surface. In this paper, a laser profilometer is employed to measure the topography of a rock fracture surface. Based on cubic covering method for the fractal dimensions of a fracture surface of rock, a new method named improved cubic covering method is proposed. Cubic covering method and improved cubic covering method are applied to computing fractal dimensions of the same fracture surface of rock. The results show that the improved cubic covering method not only has the advantage of the cubic covering method, but also has more convenient computing process.

**Key words:** rock mechanics; fracture surface; fractal dimension; cubic covering method; improved cubic covering method

## 1 引言

分形几何在粗糙表面形貌描述领域已取得了很

多有意义的研究成果<sup>[1~6]</sup>, 但大多数研究成果都是对粗糙表面上剖线形貌进行分形描述, 对整个粗糙表面形貌的分形描述方法较少, 有些研究仅限于对一维问题的推广, Mandelbrot 本人也提出用剖线的

**收稿日期:** 2005-02-24; **修回日期:** 2005-04-17

**基金项目:** 国家重点基础研究发展规划(973)项目(2002CB412707); 国家自然科学基金资助项目(10372112, 50221402); 教育部优秀青年教师资助计划项目

**作者简介:** 张亚衡(1980-), 男, 2003年毕业于中国矿业大学北京校区力学与建筑工程学院土木工程专业, 现为硕士研究生, 主要从事岩石力学方面的研究工作。E-mail: zyhkoala@126.com.

维数加 1 来近似表示整个粗糙表面的维数<sup>[7]</sup>。由于粗糙表面的形貌非常复杂, 表现为空间分布上的变异性、各向异性和局域特征<sup>[8]</sup>, 采用粗糙表面上某条剖线的分形维数或若干剖线的平均分形维数无法描述整个表面的形貌特征。为了解决这一问题, 很多学者提出对粗糙表面进行直接分析测量<sup>[9-12]</sup>, 即直接测量粗糙表面的分形维数, 其值为 2~3。

对复杂的无规则曲线的分形维数计算, 码尺法和覆盖法是最常用方法。而对于粗糙表面, 就不可能用具有某一尺度的二维欧氏几何体如圆、正方形及三角形等来直接覆盖粗糙表面, 因此, 不得不采用间接覆盖的方法。目前在所有用于估算粗糙表面真实分形维数的计算方法中, 最具代表性的是三角形棱柱表面积法<sup>[9]</sup>、投影覆盖法<sup>[10, 11]</sup>和立方体覆盖法<sup>[12]</sup>。文[9]提出三角形棱柱表面积法用于计算粗糙表面分形维数。在文[9]提出三角形棱柱表面积法 7 a 后, 文[13]提出使用电子显微成像扫描的方法直接计算粗糙岩石表面分形维数。这就涉及到在平面网格的基础上计算真实粗糙表面分形维数的概念。文[10, 11]于 1998 年提出投影覆盖法, 这种方法被认为是修正的三角形棱柱法<sup>[14]</sup>。应用此种方法, 文[10, 11]计算出砂岩的粗糙表面分形维数值为 2.013~2.039。文[15]应用投影覆盖法分别计算柔性和脆性材料的表面分形维数, 发现这 2 种材料的分形维数值分别是 2.081 3 和 2.014 6。由于三角形棱柱表面积法和投影覆盖法都存在近似地测量粗糙表面面积的问题, 从而导致计算结果的偏差。针对这个问题, 文[12]提出立方体覆盖法, 该方法有效地避免了由于近似计算导致的计算偏差。文[12]应用该方法计算岩石粗糙表面分形维数, 发现当观测尺度  $\delta > 1.25$  mm 时, 粗糙表面根本不表现出分形性质; 只有当观测尺度  $\delta < 1.25$  mm 时粗糙表面才表现出分形性质。粗糙表面的分形维数存在于不同的尺度范围内, 并不存在一个超越尺度范围的普适的分形维数。在立方体覆盖法思想基础上, 本文提出了改进的立方体覆盖法, 并通过实验计算, 分析比较了立方体覆盖法和改进的立方体覆盖法计算结果的差异。

## 2 粗糙表面形貌测试

本次实验使用的实验仪器是大尺度激光扫描仪, 仪器精度为 0.1 mm, 量程为 300 mm(图 1)。



图 1 大尺度激光扫描仪(与天津大学联合研制)  
Fig.1 Large scale laser profilometer

本次实验使用的试件尺寸约 100 mm×100 mm(长×宽), 测量间距为 0.1 mm, 这样获取的数据点总数约为 1 000×1 000, 在 Winsurf 下生成的岩石粗糙表面形貌见图 2。

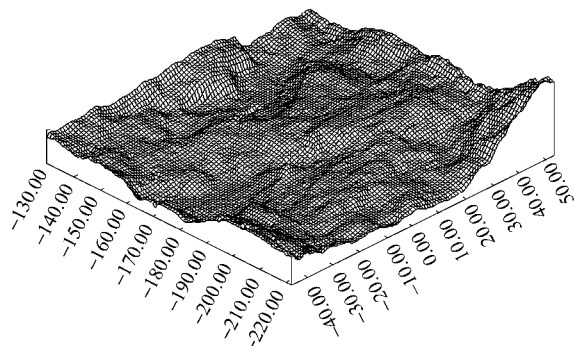


图 2 试件表面测量结果(单位: mm)  
Fig.2 Surface topography of a rock fracture measured by the large scale laser profilometer(unit: mm)

## 3 粗糙表面分形维数计算的立方体覆盖法

用立方体覆盖法估算的分形维数是纯几何意义上的分形维数, 就像用二维方形网格去覆盖无规则曲线一样, 在计算过程中没有近似的过程, 每个计算步骤都有精确的方法, 所以计算出的分形维数接近真实的分形维数。

立方体投影覆盖法的操作过程如下: 在平面  $XOY$  上存在一正方形网格, 网格中每格的尺寸是  $\delta$ , 正方形的 4 个角点处分别对应 4 个高度  $h(i, j)$ ,  $h(i, j+1)$ ,  $h(i+1, j)$  和  $h(i+1, j+1)$  ( $1 \leq i, j \leq n-1$ ,  $n$  为每个边的量测点数)。用边长为  $\delta$  的立方体对粗糙表面进行覆盖, 计算覆盖区域  $\delta \times \delta$  内的立方体个数,

即在第  $i, j$  个网格内, 覆盖粗糙面的立方体个数  $N_{i,j}$ <sup>[8]</sup>为

$$N_{i,j} = \text{INT}\{\delta^{-1} [\max(h(i, j), h(i, j+1), h(i+1, j), h(i+1, j+1)) - \min(h(i, j), h(i, j+1), h(i+1, j), h(i+1, j+1)))] + 1\} \quad (1)$$

式中: INT 为取整函数。

则覆盖整个粗糙表面所需的立方体总数  $N(\delta)$  为<sup>[8]</sup>

$$N(\delta) = \sum_{i,j=1}^{n-1} N_{i,j} \quad (2)$$

改变观测尺度再次覆盖, 再计算覆盖整个粗糙表面所需的立方体总数, 若粗糙表面具有分形性质, 按分形理论, 立方体总数  $N(\delta)$  与尺度  $\delta$  之间应存在如下关系:

$$N(\delta) \sim \delta^{-D} \quad (3)$$

式中:  $D$  为粗糙表面自相似分形维数。

采用试件的扫描实验数据, 将立方体覆盖法的计算过程编写程序, 建立  $N(\delta)$  与  $\delta$  之间的关系, 计算数据见表 1, 反映  $N(\delta)$  与  $\delta$  关系的双对数坐标图见图 3。

表 1 立方体法计算得到的  $\delta$  与  $N(\delta)$  关系

Table 1 Relation between  $N(\delta)$  and  $\delta$  estimated by the cubic covering method

$\delta/\text{mm}$	$N(\delta)$
0.1	298 059
0.2	67 474
0.4	16 648
0.8	4 147
1.6	1 032
3.2	256
6.4	64
12.8	16
25.6	4
51.2	1

由表 1 和图 3 可知, 当  $\delta$  的范围为 0.1~1.6 mm 时, 试件粗糙表面的分形维数为 2.143; 当  $\delta$  的范围为 1.6~51.2 mm 时, 试件粗糙表面的分形维数精确到 2.000。因此, 可得到以下结论: 当测量尺度大于 1.6 mm 时, 粗糙表面不表现出分形性; 只有当测量尺度小于 1.6 mm 时, 粗糙表面才表现分形性。

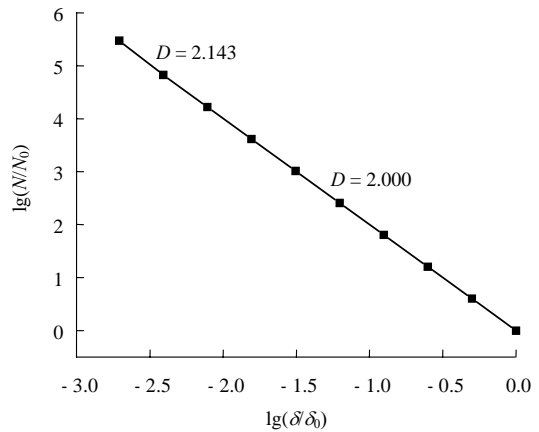


图 3 立方体法计算粗糙表面分形维数结果

Fig.3 lg-lg plot of  $N(\delta)$  and  $\delta$  estimated by the cubic covering method

## 4 粗糙表面分形维数估算的改进立方体覆盖法

由式(1)可知, 在第  $i, j$  个网格内, 覆盖的立方体个数是由这个网格 4 个角点的最高值减去最低值, 除以立方体单位边长再加 1 取整得到的。这意味着覆盖总是从网格的最低角点处的高度开始。不同的网格由于最低角点的高度不同, 覆盖起始点有就各不相同。这样覆盖不利于体现粗糙表面的复杂性和真实性。针对这个问题, 提出了改进的立方体覆盖法。

改进的立方体覆盖法与立方体覆盖法最大的区别是在每个网格中, 覆盖的起始位置不是从最低角点的高度处开始, 而是从一个统一的高度开始覆盖, 覆盖粗糙面的立方体个数  $N_{i,j}$  为

$$N_{i,j} = \text{INT}\{\delta^{-1} [\max(h(i, j), h(i, j+1), h(i+1, j), h(i+1, j+1)))] + 1\} - \text{INT}\{\delta^{-1} [\min(h(i, j), h(i, j+1), h(i+1, j), h(i+1, j+1)))]\} \quad (4)$$

图 4 所示以粗糙平面的一段剖面曲线为例, 分别采用立方体覆盖法和改进的立方体覆盖法, 覆盖粗糙表面的情况。其中深色的方格代表覆盖的立方体, 白色粗曲线代表粗糙平面的剖面曲线。由图可见, 立方体法用 14 个小立方体覆盖完这段曲线; 改进的立方体法用 19 个小立方体覆盖完这段曲线, 2 种覆盖方法得到的覆盖立方体数目差 5 个, 覆盖结果差异明显。

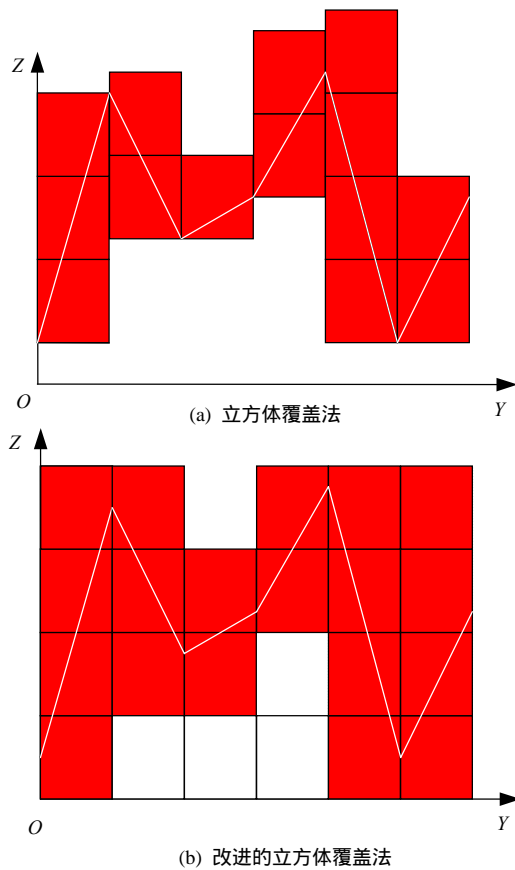


图4 改进的立方体法与立方体法覆盖的区别

Fig.4 Difference of covering process between improved cubic covering method and cubic covering method

采用试件的扫描实验数据，将改进的立方体覆盖法的计算过程编写程序，建立  $N(\delta)$  与  $\delta$  之间的关系，计算数据见表2，反应  $N(\delta)$  与  $\delta$  关系的双对数坐标图见图5。

表2 改进的立方体法计算得到的  $\delta$  与  $N(\delta)$  关系  
Table 2 Relation between  $N(\delta)$  and  $\delta$  estimated by the improved cubic covering method

$\delta/\text{mm}$	$N(\delta)$
0.1	416 921
0.2	92 620
0.4	21 834
0.8	5 271
1.6	1 302
3.2	325
6.4	66
12.8	16
25.6	4
51.2	1

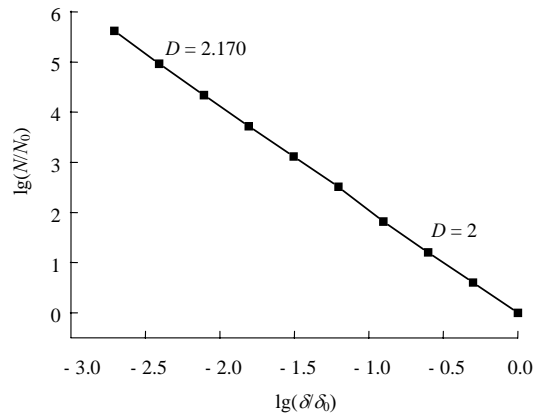


图5 改进的立方体法计算粗糙表面分形维数结果  
Fig.5 lg-lg plot of  $N(\delta)$  and  $\delta$  estimated by the improved cubic covering method

由表2和图5可知，当  $\delta$  的范围为 0.1 ~ 6.4 mm 时，试件粗糙表面的分形维数是 2.170，当  $\delta$  的范围为 6.4 ~ 51.2 mm 时，试件粗糙表面的分形维数精确到 2.000。因此，可以得到以下结论：当测量尺度大于 6.4 mm 时，粗糙表面不表现出分形性；只有当测量尺度小于 6.4 mm 时，粗糙表面才表现出分形性。

## 5 讨论与结论

由2种方法的计算结果可知，当采用立方体法计算分形维数时，测量尺度  $\delta > 1.6$  mm 时，粗糙表面分形维数  $D$  等于 2.000，即粗糙表面不表现出分形性；当  $\delta < 1.6$  mm 时，粗糙表面才表现出分形性；当采用改进的立方体法计算分形维数时，测量尺度  $\delta > 6.4$  mm 时，粗糙表面分形维数  $D$  等于 2.000，即粗糙表面不表现出分形性；当  $\delta < 6.4$  mm 时，粗糙表面才表现出分形性。岩石粗糙表面的分形维数在所有尺度上并不存在一个普适值，较小的测量尺度计算出的分形维数比较大尺度计算出的分形维数大，当尺度  $\delta$  越趋于 0，计算出的分形维数越接近真实值。

改进的立方体覆盖法继承了立方体覆盖法每个计算步骤都有精确方法的优点，其理论基础与立方体覆盖法完全一致。它与立方体覆盖法最大的区别是改进了覆盖模式，从统一的基准平面开始覆盖。这种覆盖方法与计算复杂曲线的盒子数覆盖法极其

相似，因此，改进的立方体覆盖法可视为盒子数覆盖法<sup>[16]</sup>由二维向三维，由计算曲线分形维数向曲面分形维数的扩展。

对比立方体覆盖法和改进的立方体覆盖法，可以发现，改进的立方体覆盖法计算的分形维数比立方体法计算的分形维数值稍大。这是因为改进的立方体覆盖法从统一的基准面开始覆盖，有效避免了覆盖过程中的人为因素，更加真实地反映了断裂表面的粗糙信息；更详尽地提取粗糙信息的细节数据；更好地体现了粗糙岩石形貌的复杂性。另外，当尺度  $\delta > 6.4 \text{ mm}$  时改进的立方体覆盖法计算的分形维数值才精确等于 2，而立方体法的这个临界值为 1.6 mm。这也说明，改进的立方体法能够更详尽地提取粗糙表面信息的细节数据，在更大的分形测量尺度下仍然适用。改进的立方体覆盖法在立方体覆盖法的理论上改进了覆盖模式，其计算结果与立方体覆盖法相比更接近真实分形维数值，是一种适用范围更广，更可靠的分形维数计算方法。

#### 参考文献(References)：

- [1] 夏元友, 朱瑞庚. 关于分形理论在结构岩体的应用研究[J]. 岩石力学与工程学报, 1997, 16(4) : 362 - 367. (Xia Yuanyou, Zhu Ruigeng. Application of fractal theory to structure of rock[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 1997, 16(4) : 362 - 367. (in Chinese))
- [2] 白武明, 方 华. 某些砂岩孔隙结构的分形特征[J]. 岩石力学与工程学报, 1998, 17(4) : 446 - 452. (Bai Wuming, Fang Hua. Fractal character of porous structure in sandstone[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 1998, 17(4) : 446 - 452. (in Chinese))
- [3] 连建发, 慎乃齐, 张杰坤. 分形理论在岩体质量评价中的应用研究[J]. 岩石力学与工程学报, 2001, 20(增 1) : 1 695 - 1 698. (Lian Jianfa, Shen Naiqi, Zhang Jiekun. Application of fractal theory to evaluation of rock quality[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2001, 20(Supp.1) : 1 695 - 1 698. (in Chinese))
- [4] 王金安, 谢和平, 田晓燕, 等. 岩石断裂表面分形测量的尺度效应[J]. 岩石力学与工程学报, 2000, 19(1) : 11 - 17. (Wang Jin an, Xie Heping, Tian Xiaoyan, et al. Scaling effect of estimation of the fractal dimensions of a fracture surface of rock[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2000, 19(1) : 11 - 17. (in Chinese))
- [5] Zhou H W, Xie H, Kwasniewski M A. Developments in characterization of surface topography of rock joint[J]. Progress in Natural Science, 2001, 11(7) : 481 - 489.
- [6] Zhou H W, Xie H. Anisotropic characterization of rock fracture surfaces subjected to profile analysis[J]. Physics Letters A, 2004, 325(5/6) : 355 - 362.
- [7] Mandelbrot B B. The Fractal Geometry of Nature[M]. New York : Freeman W H, 1982.
- [8] Xie H, Wang J A, Xie W H. Fractal effect of surface roughness on the mechanical behavior of rock joints[J]. Chaos, Solitons and Fractals, 1997, 8(2) : 221 - 252.
- [9] Clark K C. Computation of the fractal dimension of topographic surfaces using the triangular prism surface area method[J]. Computers and Geoscience, 1986, 12(5) : 713 - 722.
- [10] Xie H, Wang J A, Stein E. Direct fractal measurement and multifractal properties of fracture surface [J]. Physics Letters A, 1998, A242 : 41 - 50.
- [11] Xie H, Wang J A, Kwasniewski M A. Multifractal characterization of rock fracture surfaces[J]. Int. J. Rock Mech. Min. Sci., 1999, 35(1) : 19 - 27.
- [12] Zhou H W, Xie H. Direct estimation of the fractal dimensions of a fracture surface of rock[J]. Surface Review and Letters, 2003, 10(5) : 751 - 762.
- [13] Friel J J, Pande C S. Direct determination of fractal dimension of fracture surfaces using scanning electron microscopy and stereoscopy[J]. Journal of Materials Research, 1993, 8(1) : 100 - 104.
- [14] Xie H, Zhou H W, Feng Z. Further research on the Projective Covering Method[J]. International Journal of Solids and Structures, 2000, 37(33) : 4 627 - 4 630.
- [15] Stach S, Cybo J, Chmiela J. Fracture surface-fractal or multifractal[J]. Materials Characterization, 2001, 46(2/3) : 163 - 167.
- [16] Feder J. Fractals[M]. New York : Plenum Press, 1988.