第 27 卷 第 4 期　　应用数学学报　　Vol. 27 No. 4
2004 年 11 月　　ACTA MATHEMATICAE APPLICATAE SINICA　　Nov., 2004

$\boldsymbol{H}$- 值半鞅测度的弱收敛

周 清
(中国科学院数学与系统科学研究院, 北京 100080)

摘 要 本文引进了 $\boldsymbol{H}$- 值半鞅测度, 研究了其基本性质和与之相联系的随机积分. 本文还引入了 $\boldsymbol{H}$- 值半鞅测度序列依分布弱收敛的概念, 建立了 $\boldsymbol{H}$- 值半鞅测度的极限定理, 给出了 $\boldsymbol{H}$- 值半鞅测度弱收敛的条件.

关键词 $\boldsymbol{H}$- 值半鞅测度, 随机积分, 极限定理

1 引言

随机过程极限定理的研究是近代概率论的一个重要分支. 自 1956 年 Prokhorov 和 Skorohod 发表了他们的论文 [1] 和 [2] 后, 随机过程极限定理的研究得到了飞速发展. 20 世纪 70 年代至 80 年代, 半鞅理论和随机分析的兴起, 给这一理论注入了崭新的内容和研究方法, 这一时期的成果已总结在 Jacod 和 Shiryeav 的著作 [3] 中.

Walsh[4] 提出了鞅测度的概念, 并研究了鞅测度的基本性质和随机积分. 1990 年, Karoui 和 Méléard 发表了关于鞅测度的论文 [5]. Thang[6] 引入了向量值随机测度序列弱收敛的概念, 并且对对称随机散射的向量值随机测度的极限定理进行了研究. Xie[7] 引入了局部平方可积鞅测度依分布弱收敛的概念, 给出了鞅测度依分布弱收敛的条件, 接着在 [8] 中引入了 Hilbert 空间值鞅测度依分布弱收敛的概念, 并给出鞅测度弱收敛的充分条件和独立增量的强正交鞅测度弱收敛的充要条件. 此后, Xie[9] 介绍和研究了半鞅测度的依分布弱收敛, 给出了半鞅测度弱收敛和半鞅测度随机积分弱收敛的条件. 以下 Hilbert 空间值简称为 $\boldsymbol{H}$- 值.

本文主要研究了 $\boldsymbol{H}$- 值半鞅测度序列的依分布弱收敛. 本文分为三节, 第一节简单介绍了背景知识, 第二节给出 $\boldsymbol{H}$- 值半鞅测度的定义, 探讨了其基本性质, 定义了 $\boldsymbol{H}$- 值 R- 半鞅测度的可料特征, 并且研究了其跳测度存在可料对偶投影的 $\boldsymbol{H}$- 值有独立增量的 R- 半鞅测度与其可料特征的关系. 在这一节中我们还研究了 $\boldsymbol{H}$- 值半鞅测度的随机积分及其性质. 第三节引入 $\boldsymbol{H}$- 值半鞅测度序列依分布弱收敛的概念, 建立了 $\boldsymbol{H}$- 值半鞅测度的极限定理, 给出 $\boldsymbol{H}$- 值特殊半鞅测度弱收敛的条件, 并且运用 $\boldsymbol{H}$- 值特殊 R- 半鞅测度的可料特征来刻划其弱收敛, 给出 $\boldsymbol{H}$- 值特殊 R- 半鞅测度序列收敛到独立增量的 $\boldsymbol{H}$- 值特殊 R- 半鞅测度的充分条件, 进一步给出独立增量的 $\boldsymbol{H}$- 值特殊 R- 半鞅测度序列弱收敛的充分条件.

本文 2002 年 11 月 25 日收到.

2 $\boldsymbol{H}$- 值半鞅测度的定义和基本性质

设 $\boldsymbol{H}$ 是实值 Hilbert 空间, 内积为 $x\cdot y$, 范数为 $\|\cdot\|$, $\{e_n\}_{n\geq 1}$ 是 $\boldsymbol{H}$ 的一个正交基, 记 $\boldsymbol{H}\widehat{\otimes}_1\boldsymbol{H}=\{y: y=\sum\limits_{i,j}\lambda_{ij}e_i\otimes e_j,\ \|y\|_1=\sum\limits_{i,j}|\lambda_{ij}|<\infty\}$, 那么 $\boldsymbol{H}\widehat{\otimes}_1\boldsymbol{H}$ 是一个范数为 $\|\cdot\|_1$ 的 Banach 空间. 记 $\boldsymbol{H}\widehat{\otimes}\boldsymbol{H}$ 为 $\boldsymbol{H}$ 与其自身的张量积, $x\otimes y$ 是 $x,y\in\boldsymbol{H}$ 的张量积. 如果 $x=y$, 我们记 $x\otimes x=x^{\otimes 2}$. 如无特别说明, 本文中的 $\boldsymbol{H}$ 均表示可分的实 Hilbert 空间. 设 $\boldsymbol{E}$ 是局部紧具有可数基的 Hausdorff 空间, 由 [10, 命题 5.7.3] 知 $\boldsymbol{E}$ 是 Polish 空间. $\mathcal{B}(\boldsymbol{E})$ 是 $\boldsymbol{E}$ 上的 Borel σ- 代数, $\mathcal{M}(\boldsymbol{E})$ 是 $\mathcal{B}(\boldsymbol{E})$ 上的所有 $\boldsymbol{H}$- 值有限测度的线性空间.

下面我们引入 $\boldsymbol{H}$- 值半鞅测度的定义.

定义 2.1 设 $(\Omega,\mathcal{F},\mathcal{F}_t,P)$ 是一 $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ 满足通常条件的概率空间, Y 是一随机过程, 满足:

(1) $\forall B\in\mathcal{B}(\boldsymbol{E})$, $\{Y_t(B)\}_{t\geq 0}$ 是一 $\mathcal{F}_t$- 适应的 $\boldsymbol{H}$- 值半鞅, 且 $Y_0(B)=0$,

(2) $\forall t\geq 0$, $\{B_n\}_{n\geq 1}\subset\mathcal{B}(\boldsymbol{E})$, 且 $B_n\cap B_m=\emptyset$, $m\neq n$, 有 $Y_t(\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}B_n)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}Y_t(B_n)$,

a.s., 那么称 Y 为 $\mathcal{F}_t$- 适应的 $\boldsymbol{H}$- 值半鞅测度.

为了更好的研究 $\boldsymbol{H}$- 值半鞅测度的性质, 我们先给出有价值的 $\boldsymbol{H}$- 值鞅测度的定义.

定义 2.2 设 M 是一 $\boldsymbol{H}$- 值鞅测度, 称 M 是有价值的, 如果 $\forall A\in\mathcal{B}(\boldsymbol{E})$, $M(A)$ 是 $\boldsymbol{H}$- 值局部平方可积鞅, 且存在 $\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{E}\times[0,\infty]$ 上的 $\boldsymbol{H}\widehat{\otimes}_1\boldsymbol{H}$- 值随机测度 K, 使得 $\forall, A,B\in\mathcal{B}(\boldsymbol{E})$, $s,t\geq 0$,

$$\big\|\ll M(A),M(B)\gg_{t+s}-\ll M(A),M(B)\gg_t\|_1\leq\|K\|_1(A\times B\times(t,t+s])<\infty,$$

其中 K 称为控制测度, $\|\cdot\|_1$ 是 $\boldsymbol{H}\widehat{\otimes}_1\boldsymbol{H}$ 空间的范数.

命题 2.3 正交的 $\boldsymbol{H}$- 值鞅测度是有价值的 $\boldsymbol{H}$- 值鞅测度.

证 若 M 是正交的, 那么由单调类定理知 $\forall A\in\mathcal{B}(\boldsymbol{E})$, $\pi\big([0,t]\times A\big)\equiv\ll M(A)\gg_t$ 可扩张成 $\boldsymbol{R}_+\times\boldsymbol{E}$ 上的一个随机测度. 对于 $f(x,t)=(x,x,t)$, $x\in\boldsymbol{E}$, $t\in\boldsymbol{R}_+$, $\Gamma\in\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{R}_+$, 定义 $K(\Gamma)=\pi(f^{-1}(\Gamma))$, 则 $\forall A,B\in\mathcal{B}(\boldsymbol{E})$, $s,t\geq 0$,

$$\begin{aligned}&\big\|\ll M(A),M(B)\gg_{t+s}-\ll M(A),M(B)\gg_t\|_1\\=&\Big\|\pi\big([0,t+s]\times(A\cap B)\big)-\pi\big([0,t]\times(A\cap B)\big)\Big\|_1\\\leq&\|K\|_1\big((t,t+s)\times A\times B\big)\end{aligned}$$

故 K 为控制测度, M 为有价值的. 证毕.

定义 2.4 设 Y 是一 $\boldsymbol{H}$- 值半鞅测度, 称 Y 为标准的, 如果 Y 可作如下分解: $Y=M+V$, 其中 $\forall B\in\mathcal{B}(\boldsymbol{E})$, $t\geq 0$, $V_t(B)=V\big([0,t]\times B\big)$, V 是 $\boldsymbol{R}_+\times\boldsymbol{E}$ 上的 σ- 有限的 $\boldsymbol{H}$- 值随机测度, 满足 $\|V\|\big([0,t]\times B\big)<\infty, M$ 是一个有价值的 $\boldsymbol{H}$- 值鞅测度.

定义 2.5 设 Y 是一 $\boldsymbol{H}$- 值半鞅测度, 称 Y 为特殊的, 如果 Y 可作如下分解: $Y=M+V$, 其中 V 是可料的 σ- 有限的 $\boldsymbol{H}$- 值随机测度, 满足 $\forall B\in\mathcal{B}(\boldsymbol{E})$, $t\geq 0$, $\|V\|\big([0,t]\times B\big)<\infty$, M 是一个正交的 $\boldsymbol{H}$- 值鞅测度.

由命题 2.3 可知: 特殊的 $\boldsymbol{H}$- 值半鞅测度为标准的.

命题 2.6 设 Y 为 $\boldsymbol{H}$- 值特殊半鞅测度, 则 Y 有如下唯一分解: $Y=M+V$, 其中 M 是一正交的 $\boldsymbol{H}$- 值鞅测度, V 是可料的 σ- 有限的 $\boldsymbol{H}$- 值随机测度, 满足 $\forall B\in\mathcal{B}(\boldsymbol{E})$, $t\geq 0$, $\|V\|\big([0,t]\times B\big)<\infty$.

证 由 [11, 定理 1.4.4] 易证.

2.7 定义 设 Y 为 $\boldsymbol{H}$- 值半鞅测度. 如果 $\forall A\in\mathcal{B}(\boldsymbol{E})$, $Y(A)$ 是一连续 $\boldsymbol{H}$- 值半鞅, 则称 Y 为连续的. 如果 Y(A) 是一右连左极 $\boldsymbol{H}$- 值半鞅, 则称 Y 为右连左极的.

定义 2.8 设 Y 为右连左极的 $\boldsymbol{H}$- 值半鞅测度, 称 Y 为 R- 半鞅测度, 如果 $\forall t>0$, $\omega\in\Omega$, $Y_t(\omega,\cdot)$ 和 $Y_{t-}(\omega,\cdot)$ 均在 $\mathcal{M}(\boldsymbol{E})$ 中.

$\boldsymbol{H}$- 值 R- 半鞅测度是一类非常重要的 $\boldsymbol{H}$- 值半鞅测度, 我们将在第三节中研究它的弱收敛性, 下面先给出 $\boldsymbol{H}$- 值 R- 半鞅测度跳测度的定义.

定义 2.9 设 Y 为 $\boldsymbol{H}$- 值 R- 半鞅测度, $Y\big(\{t\}\times\mathrm{d}x\big)\triangleq Y_t-Y_{t-}$. 令

$$\alpha(\mathrm{d}t,\mathrm{d}y)=\sum_{s>0}I_{\{Y(\{s\}\times\mathrm{d}x)\neq0\}}\mathcal{E}_{(s,Y(\{s\}\times\mathrm{d}x))}(\mathrm{d}t,\mathrm{d}y)$$

称 $\alpha(\mathrm{d}t,\mathrm{d}y)$ 为 Y 的跳跃随机测度, 它定义在 $\mathcal{B}_+\times\mathcal{B}\big(M(\boldsymbol{E})\big)$ 上, 其中 $\mathcal{B}\big(M(\boldsymbol{E})\big)$ 是 $\mathcal{M}(\boldsymbol{E})$ 的 Borel σ- 代数.

本文仅考虑其跳测度 α 是整值随机测度且存在可料对偶投影 β 的 $\boldsymbol{H}$- 值 R- 半鞅测度.

定理 2.10[11] 设 M 是 $\mathcal{F}_t$- 适应的 $\boldsymbol{H}$- 值正交鞅测度, 则存在 $\mathcal{B}_+\times\mathcal{B}(\boldsymbol{E})$ 上可料的 σ- 有限正测度 $\nu(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x)$ 及 $\mathcal{P}\times\mathcal{B}(\boldsymbol{E})$- 可测的 $\boldsymbol{H}\widehat{\otimes}_1\boldsymbol{H}$- 值过程 $Q(s,x)$, 使得 $\forall A\in\mathcal{B}(\boldsymbol{E})$, 过程 $\nu([0,t]\times A)_{t\geq0}$ 和 $\int_0^{\cdot}\int_A Q(s,x)\nu(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x)$ 可料, 并且满足: $\forall t>0$, $A\in\mathcal{B}(\boldsymbol{E})$,

$$\begin{aligned}&\nu([0,t]\times A)=\langle M(A)\rangle_t,\\&\int_0^t\int_A Q(s,x)\nu(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x)=\ll M(A)\gg_t,\ P-\text{a.s.}\end{aligned}$$

如果记 $\nu=\langle M\rangle$, $\bar{\nu}=\ll M\gg$, 则显然有 $\nu=Tr\,\bar{\nu}$, Q 称为与 M 相联系的 $\boldsymbol{H}\widehat{\otimes}_1\boldsymbol{H}$- 值可料过程.

有了以上准备, 我们可以给出 $\boldsymbol{H}$- 值特殊 R- 半鞅测度的可料特征的定义.

定义 2.11 设 Y 是一 $\boldsymbol{H}$- 值特殊 R- 半鞅测度, 分解为 $Y=M+V$, β 是 Y 的跳跃随机测度的可料对偶投影, $\nu=\langle M\rangle$, $\bar{\nu}=\ll M\gg$, 称 $(V,\bar{\nu},\beta)$ 为 Y 的可料特征.

定义 2.12 设 Y 是一 $\boldsymbol{H}$- 值特殊半鞅测度. 称 Y 为可积的, 如果 $\boldsymbol{E}\big((\nu+\|V\|)(\boldsymbol{R}_+\times\boldsymbol{E})\big)<\infty$. 称 Y 为局部可积的, 如果存在一列紧子集 $K_n\subset\boldsymbol{E}$, $K_n\uparrow\boldsymbol{E}$, 和一列停时 $T_n\uparrow\infty$, 使得 $E\big((\nu+\|V\|)([0,T_n]\times K_n)\big)<\infty$, $\forall n\geq1$. 称 Y 为局部平方可积的, 若 $Y=M+V$, M 是局部平方可积的.

设 Y 是一 $\boldsymbol{H}$- 值特殊半鞅测度, $Y=M+V$, $\ll M\gg=\bar{\nu}$, 下面建立关于 Y 的随机积分.

设 $\mathcal{E}\big(L(\boldsymbol{H},\boldsymbol{H})$ 是形如

$$h(\omega,t,x)=\sum_{i=1}^n u_iI_{F_i\times(s_i,t_i]\times B_i}(\omega,t,x),\qquad F_i\in\mathcal{F}s_i,\ \ \mathcal{B}_i\in\mathcal{B}(\boldsymbol{E}),\ \ u_i\in\mathcal{L}(\boldsymbol{H},\boldsymbol{H})$$

且满足

$$E\Big(\int_{\boldsymbol{R}_+\times\boldsymbol{E}}\mathrm{Tr}\,(h\circ Q_M\circ h^*)\big(\nu+\|V\|\big)(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x)\Big)<\infty$$

的随机过程组成的空间, 其中 Q_M 是与 M 相联系的 $\boldsymbol{H}\widehat{\otimes}_1\boldsymbol{H}$- 值可料过程.

$\Lambda^2(\boldsymbol{H},\boldsymbol{H})$ 是由满足如下条件的随机过程 X 组成的空间:

(1) $\forall(\omega,t,x)\in\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{R}_+\times\boldsymbol{E}$, $X(\omega,t,x)\in\mathcal{L}(\boldsymbol{H},\boldsymbol{H})$,

(2) $\forall h\in\boldsymbol{H}$, $X(h)$ 是 $\boldsymbol{H}$- 值 $\mathcal{P}\times\mathcal{B}(\boldsymbol{E})$- 可测,

(3) $E\left(\int_{\boldsymbol{R}_+\times\boldsymbol{E}}\mathrm{Tr}\,(X\circ Q_M\circ X^*)(\nu+\|V\|)(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x)\right)<\infty$, 则显然 $\mathcal{E}\big(L(\boldsymbol{H},\boldsymbol{H})\big)$ 在 $\Lambda^2(\boldsymbol{H},\boldsymbol{H})$ 中稠密.

对任意的 $h\in\mathcal{E}\big(\mathcal{L}(\boldsymbol{H},\boldsymbol{H})$, 定义

$$h\cdot Y_t(A)=\sum_{i=1}^n I_{F_i}\big[u_i\big(Y_{t_i\wedge t}(B_i\cap A)-Y_{s_i\wedge t}(B_i\cap A)\big)\big],$$

则此定义是合理的, 且 $h\cdot Y$ 是一 $\boldsymbol{H}$- 值特殊半鞅测度. 线性映射

$$h\to\big\{h\cdot Y_t(A),\ t\geq 0,\ \forall A\in\mathcal{B}(\boldsymbol{E})\big\}$$

可以扩张到 $\Lambda^2(\boldsymbol{H},\boldsymbol{H})$ 上. 如果 $f\in\Lambda^2(\boldsymbol{H},\boldsymbol{H})$, 则称 $f\cdot Y$ 为 f 关于 Y 的随机积分.

性质 2.13 设 Y 是一 $\boldsymbol{H}$- 值特殊半鞅测度, $Y=M+V$, $\langle M\rangle=\nu$, $\ll M(A)\gg_t=\int_0^t\int_A Q_M(s,x)\nu(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x)$, $\forall A\in\mathcal{B}(\boldsymbol{E})$, $t>0$.

(1) 设 $f\in\Lambda^2(\boldsymbol{H},\boldsymbol{H})$, 则 $f\cdot Y$ 是 $\boldsymbol{H}$- 值特殊半鞅测度, 并且当 Y 连续时, $f\cdot Y$ 也连续,

(2) 若 $f,g\in\Lambda^2(\boldsymbol{H},\boldsymbol{H})$, $A,B\in\mathcal{B}(\boldsymbol{E})$, Y 连续, 则

$$\langle f\cdot Y(A),g\cdot Y(B)\rangle=\int_0^\cdot\int_{A\cap B}\mathrm{Tr}\,(f\circ Q_M\circ g^*)\nu(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x),$$

$$\ll f\cdot Y(A),g\cdot Y(B)\gg=\int_0^\cdot\int_{A\cap B}\mathrm{Tr}\,(f\otimes g)\overline{\nu}(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x).$$

证 (1) 由定义可知 $f\cdot Y$ 是 $\boldsymbol{H}$- 值特殊半鞅测度, 当 Y 连续时, $f\cdot Y$ 显然连续.

(2) 首先利用定义对任意的 $h_1,h_2\in\mathcal{E}(L(\mathbf{H},\mathbf{H}))$ 命题显然成立, 然后对任意的 $f,g\in\Lambda^2(\mathbf{H},\mathbf{H})$, 取 $h_1^n,h_2^m\in\mathcal{E}(\mathcal{L}(\mathbf{H},\mathbf{H}))$, $h_1^n\to f$, $h_2^m\to g$, $(n,m\to\infty)$, 则对任意的 $n,m\in\boldsymbol{N}$, h_1^n,h_2^m, 命题成立, 对 n,m 取极限可得对任意的 $f,g\in\Lambda^2(\boldsymbol{H},\boldsymbol{H})$, 命题成立. 证毕.

下面的结果在我们的论文中起重要作用.

设 Y 是一 $\boldsymbol{H}$- 值 R- 半鞅测度, $\forall f\in C_K(\boldsymbol{R}_+\times\boldsymbol{E})$ (定义在 $\boldsymbol{R}_+\times\boldsymbol{E}$ 上的连续的且在 $\boldsymbol{R}_+\times\boldsymbol{E}$ 的一个紧子集 K 的余集上为零的函数组成的空间), 令 $X=\int_0^\cdot\int_{\boldsymbol{E}}f(s,x)Y(ds,dx)$, 则 X 是一 $\boldsymbol{H}$- 值 R- 半鞅. γ 是 X 的跳测度, 设 λ 是 γ 的可料对偶投影, 则 $\forall g\in C_K(\boldsymbol{H})$, 容易计算

$$\int_0^\cdot\int_{\mathbf{H}}g(x)\gamma(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x)=\int_0^\cdot\int_{\mathcal{M}(\boldsymbol{E})}g\Big(\int_{\boldsymbol{E}}f(s,x)y(\mathrm{d}x)\Big)\alpha(\mathrm{d}s,\mathrm{d}y),\tag{2.1}$$

其中 $\mathcal{M}(\boldsymbol{E})$ 是 $\boldsymbol{E}$ 上的 $\boldsymbol{H}$- 值有限测度族, $C_K(\boldsymbol{H})=\{g:g$ 是 $\boldsymbol{H}$ 上的连续函数, 且在紧集 K 的余集上为 $0\}$, 对上式两边取可料对偶投影, 有

$$\int_0^\cdot\int_{\mathbf{H}}g(x)\lambda(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x)=\int_0^\cdot\int_{\mathcal{M}(\boldsymbol{E})}g\Big(\int_{\boldsymbol{E}}f(s,x)y(dx)\Big)\beta(\mathrm{d}s,\mathrm{d}y).\tag{2.2}$$

定义 2.14 设 Y 是一 $\boldsymbol{H}$- 值半鞅测度

1) 若 $\forall 0\leq s<t$, Y_t-Y_s 与 $\mathcal{F}_s$ 独立, 则称 Y 是独立增量的, 简称 $SMII$,

2) 若 $\forall 0\leq s<t$, Y_t-Y_s 的分布仅依赖于 $t-s$, 且 Y 是独立增量的, 则称 Y 是平稳独立增量的,

3) 若 $P\big(Y(\{t\}\times\mathrm{d}x)\neq 0\big)>0$, 则称 $t\geq 0$ 是 Y 的固定不连续点.

因 $\boldsymbol{H}$- 值半鞅测度的固定不连续点集是至多可数的，因此平稳独立增量的 $\boldsymbol{H}$- 值半鞅测度没有固定不连续点.

定理 2.15 设 Y 是一 $\boldsymbol{H}$- 值特殊 R- 半鞅测度，如果 Y 是独立增量的，那么其可料特征有一个非随机的版本 $(V,\bar{\nu},\beta)$.

证　假设 Y 是 SMII, 那么 $\forall A\in\mathcal{B}(\boldsymbol{E})$, $Y(A)=M(A)+V(A)$ 是一个独立增量的 $\boldsymbol{H}$- 值半鞅，因此 $V_t(A)$ 与 $\ll M(A)\gg$ 是 a.s. 非随机的，若 α 是 Y 的跳测度，则 α 是 Poisson 测度，从而其可料对偶投影非随机. 综上可知 Y 的可料特征有一个非随机的版本 $(V,\bar{\nu},\beta)$. 证毕.

3 $\boldsymbol{H}$- 值半鞅测度的弱收敛

对任意的 $n\geq 1$, 我们考虑概率空间 $\mathcal{B}^n=(\Omega,\mathcal{F}^n,\mathcal{F}^n_t,P^n)$, $\boldsymbol{E}^n$ 表示关于 P^n 的期望，所有的集合，变量，过程，$\boldsymbol{H}$- 值半鞅测度，$\cdots$, 带有指标 n 的，均定义在 $\mathcal{B}^n$ 上.

以下 Y 是一个概率空间 $\mathcal{B}=(\Omega,\mathcal{F},\mathcal{F}_t,P)$ 上的 $\boldsymbol{H}$- 值半鞅测度.

定义 3.1 设 Y^n 和 Y 是 $\boldsymbol{H}$- 值半鞅测度，称 Y^n 依分布弱收敛于 Y, 并记为 $Y^n\Rightarrow Y$, 如果 $\forall f\in C_K(\boldsymbol{R}_+\times\boldsymbol{E})$

$$\int_0^\cdot\int_{\boldsymbol{E}}f(s,x)Y^n(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x)\xrightarrow{\mathcal{L}}\int_0^\cdot\int_{\boldsymbol{E}}f(s,x)Y(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x).$$

定理 3.2 设 Y^n 和 Y 是 $\boldsymbol{H}$- 值特殊半鞅测度，分解为 $Y^n=M^n+V^n$ 和 $Y=M+V$, $\langle M^n\rangle=\nu^n$, $\langle M\rangle=\nu$.

(1) 假设对 $\boldsymbol{E}$ 的任一紧子集 K,

$$\lim_{a\to\infty}\limsup_{n\to\infty}P^n\big((\nu^n+\|V^n\|)([0,N]\times K)>a\big)=0,\qquad\forall N>0,\tag{3.1}$$

并且对任意的包含于 $\boldsymbol{R}_+\times\boldsymbol{E}$ 的紧子集内的两两不交的 $\nu+\|V\|$- 连续集列 $\{A_1,\cdots,A_k\}$ $(k\in\boldsymbol{N})$, 有 $\boldsymbol{H}^k$- 值半鞅

$$\begin{aligned}&\Big(\int_0^\cdot\int_{\boldsymbol{E}}I_{A_1}(s,x)Y^n(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x),\cdots,\int_0^\cdot\int_{\boldsymbol{E}}I_{A_k}(s,x)Y^n(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x)\Big)\\&\xrightarrow{\mathcal{L}}\Big(\int_0^\cdot\int_{\boldsymbol{E}}I_{A_1}(s,x)Y(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x),\cdots,\int_0^\cdot\int_{\boldsymbol{E}}I_{A_k}(s,x)Y(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x)\Big),\end{aligned}\tag{3.2}$$

则 $Y^n\Longrightarrow Y$.

(2) 假设 $Y^n\Longrightarrow Y$, $\{A_m\}_{m\geq 1}$ 是任意的 $\nu+\|V\|$- 连续闭子集列，且满足

$$\lim_{n\to\infty}P\big((\nu+\|V\|)(A_m)>\varepsilon\big)=0,\qquad\forall\varepsilon>0.$$

如果

$$\lim_{m\to\infty}\limsup_{n\to\infty}P^n\big((\nu^n+\|V^n\|)(A_m)>\varepsilon\big)=0,\qquad\forall\varepsilon>0,\tag{3.3}$$

则对 $\boldsymbol{R}_+\times\boldsymbol{E}$ 的任意含于紧集内的 $\nu+\|V\|$- 连续集 A, 都有

$$\int_0^\cdot\int_{\boldsymbol{E}}I_A(s,x)Y^n(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x)\xrightarrow{\mathcal{L}}\int_0^\cdot\int_{\boldsymbol{E}}I_A(s,x)Y(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x).$$

证　(1) 设 $f\in C_K(\boldsymbol{R}_+\times\boldsymbol{E})$, 则存在紧集 $K\subset\boldsymbol{R}_+\times\boldsymbol{E}$, 使得 $K\supset\operatorname{supp}(f)$ 且 $(\nu+\|V\|)\ (\partial K)=0$, P-a.s. 因为 f 是有界函数，所以设 $a<f<b$, 由 [12, 引理 4.3]

知对任意的 $m \geq 1$, 存在 $[a,b]$ 的一个分割: $a = a_0 < a_1 < \cdots < a_{k_m} = b$, 使得 $a_i - a_{i-1} < \frac{1}{m}$ 且 $(\nu + \|V\|)\big[(\partial\{(s,x) : f(s,x) = a_i\}) \cap K\big] = 0$, P-a.s., $\forall\, i = 1,2,\cdots,k_m$. 令 $A_i = \{(s,x) : a_{i-1} \leq f(s,x) < a_i\} \cap K$, $i = 1,2,\cdots,k_m$, 则 A_i $(1 \leq i \leq k_m)$ 两两不交, 且 $(\nu + \|V\|)(\partial A_i) = 0$, P-a.s., 因此 (3.2) 对 A_i $(1 \leq i \leq k_m)$ 成立. 记 $f_m(s,x) = \sum\limits_{i=1}^{k_m} a_{i-1} I_{A_i}(s,x)$, 由 (3.2) 我们有

$$\int_0^{\cdot}\int_{\boldsymbol{E}} f_m(s,x)Y^n(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x) \xrightarrow{\mathcal{L}} \int_0^{\cdot}\int_{\boldsymbol{E}} f_m(s,x)Y(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x).$$

注意到 $\sup\limits_{(s,x)}\big|f(s,x) - f_m(s,x)\big| \leq \frac{1}{m}$, 由 [13, 定理 9.23]Lenglart 不等式, $\forall\, N > 0$, $\varepsilon > 0$ 和 $\delta > 0$, 我们有

$$\begin{aligned}
&P^n\Big(\sup_{t\leq N}\Big\|\int_0^t\int_{\boldsymbol{E}}\big[f(s,x) - f_m(s,x)\big]M^n(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x)\Big\| > \varepsilon\Big)\\
\leq&\frac{\delta}{\varepsilon^2} + P^n\big(\nu^n\big([0,N]\times K\big) > \delta m^2\big), \qquad (3.4)\\
&P^n\Big(\sup_{t\leq N}\Big\|\int_0^t\int_{\boldsymbol{E}}\big[f(s,x) - f_m(s,x)\big]V^n(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x)\Big\| > \varepsilon\Big)\\
\leq&\frac{\delta}{\varepsilon} + P^n\big(\|V^n\|\big([0,N]\times K\big) > \delta m\big), \qquad (3.5)\\
&P\Big(\sup_{t\leq N}\Big\|\int_0^t\int_{\boldsymbol{E}}\big[f(s,x) - f_m(s,x)\big]M(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x)\Big\| > \varepsilon\Big)\\
\leq&\frac{\delta}{\varepsilon^2} + P\big(\nu\big([0,N]\times K\big) > \delta m^2\big), \qquad (3.6)\\
&P\Big(\sup_{t\leq N}\Big\|\int_0^t\int_{\boldsymbol{E}}\big[f(s,x) - f_m(s,x)\big]V(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x)\Big\| > \varepsilon\Big)\\
\leq&\frac{\delta}{\varepsilon} + P\big(\|V\|\,\big([0,N]\times K\big) > \delta m\big). \qquad (3.7)
\end{aligned}$$

由 $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$ 的任意性, (3.6) 和 (3.7) 推得

$$\lim_{m\to\infty} P\Big(\sup_{t\leq N}\Big\|\int_0^t\int_{\boldsymbol{E}}\big[f(s,x) - f_m(s,x)\big]Y(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x)\Big\| > \varepsilon\Big) = 0,$$

因此, 当 $m \to \infty$ 时, 我们得到

$$\int_0^{\cdot}\int_{\boldsymbol{E}} f_m(s,x)Y(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x) \xrightarrow{\mathcal{L}} \int_0^{\cdot}\int_{\boldsymbol{E}} f(s,x)Y(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x),$$

由 $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$ 的任意性, (3.1), (3.4) 和 (3.5) 推得

$$\lim_{m\to\infty}\limsup_{n\to\infty} P^n\Big(\sup_{t\leq N}\Big\|\int_0^t\int_{\boldsymbol{E}}\big[f(s,x) - f_m(s,x)\big]Y^n(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x)\Big\| > \varepsilon\Big) = 0,$$

于是

$$\int_0^{\cdot}\int_{\boldsymbol{E}} f(s,x)Y^n(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x) \xrightarrow{\mathcal{L}} \int_0^{\cdot}\int_{\boldsymbol{E}} f(s,x)Y(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x).$$

由 [14, 定理 4.2] 知 $Y^n \Longrightarrow Y$.

(2) 设 A 是 $\boldsymbol{R}_+ \times \boldsymbol{E}$ 的任一子集, $(\nu + \|V\|)(\partial A) = 0$, P-a.s., 且 $A \subset K$, 其中 K 为 $\boldsymbol{R}_+ \times \boldsymbol{E}$ 的紧子集. 因为 $\boldsymbol{E}$ 是局部紧的, 所以我们可以假设 $A \subset K^\circ$, 由假设知 ∂A 是 $\boldsymbol{R}_+ \times \boldsymbol{E}$ 的紧子集, 因此对任意的 $m \geq 1$, 存在 ∂A 中的点 $x_1^m, \cdots, x_{k_m}^m$ 及正数列 $0 < r_m \downarrow 0$, 使得 $\partial A \subset \bigcup\limits_{i=1}^{k_m} S(x_i^m, r_m)$, 其中 $S(x,r)$ 是以 x 为中心, r 为半径的开球. 令

$$E_m = K \setminus \Big[A \bigcup \bigcup_{i=1}^{k_m} S(x_i^m, r_m)\Big], \qquad m \geq 1,$$

$$G_m = K \setminus \Big[(K \setminus A) \bigcup \bigcup_{i=1}^{k_m} S(x_i^m, r_m)\Big], \qquad m \geq 1,$$

则 E_m 和 G_m 均为闭集, 且 $E_m \cap G_m = \emptyset$. 由 [12, 引理 4.3], 我们可以选取 r_m 使得 $(\nu + \|V\|)(\partial E_m) = 0$, P-a.s. 因此存在 $f_m \in C_K(\boldsymbol{R}_+ \times \boldsymbol{E})$, 使得

$$f_m(x) = \begin{cases} 1, & x \in G_m, \\ 0, & x \in E_m. \end{cases}$$

因为 $Y^n \Longrightarrow Y$, 所以我们有

$$\int_0^\cdot \int_{\boldsymbol{E}} f_m(s,x) Y^n(\mathrm{d}s, \mathrm{d}x) \xrightarrow{\mathcal{L}} \int_0^\cdot \int_{\boldsymbol{E}} f_m(s,x) Y(\mathrm{d}s, \mathrm{d}x), \quad n \to \infty.$$

进一步, 注意到在 $E_m \cup G_m$ 上, $|f_m(s,x) - I_A(s,x)| = 0$, 在 $E_m^c \cap G_m^c$ 上 $|f_m(s,x) - I_A(s,x)| \leq 1$, 故 $\forall \varepsilon > 0$, $\delta > 0$, 我们有

$$\begin{aligned} &P^n\Big(\sup_{t \leq N} \Big\| \int_0^t \int_{\boldsymbol{E}} [I_A(s,x) - f_m(s,x)] M^n(\mathrm{d}s, \mathrm{d}x) \Big\| > \varepsilon\Big) \\ \leq &\frac{\delta}{\varepsilon^2} + P^n\big(\nu^n(E_m^c \cap G_m^c) > \delta\big) \leq \frac{\delta}{\varepsilon^2} + P^n\big(\nu^n(\overline{E_m^c \cap G_m^c}) > \delta\big) \end{aligned}$$

且

$$\begin{aligned} &P^n\Big(\sup_{t \leq N} \Big\| \int_0^t \int_{\boldsymbol{E}} [I_A(s,x) - f_m(s,x)] V^n(\mathrm{d}s, \mathrm{d}x) \Big\| > \varepsilon\Big) \\ \leq &\frac{\delta}{\varepsilon} + P^n\big(\|V^n\|(E_m^c \cap G_m^c) > \delta\big) \leq \frac{\delta}{\varepsilon} + P^n\big(\|V^n\|(\overline{E_m^c \cap G_m^c}) > \delta\big), \end{aligned}$$

由条件 (3.3) 推知

$$\lim_{m \to \infty} \limsup_{n \to \infty} P^n\Big(\sup_{t \leq N} \Big\| \int_0^t \int_{\boldsymbol{E}} [I_A(s,x) - f_m(s,x)]\, Y^n(\mathrm{d}s, \mathrm{d}x) \Big\| > \varepsilon\Big) = 0.$$

因为 $\bigcap\limits_m \overline{E_m^c \cap G_m^c} = \partial A$,

$$\begin{aligned} &\limsup_{m \to \infty} P\Big(\sup_{t \leq N} \Big\| \int_0^t \int_{\boldsymbol{E}} [I_A(s,x) - f_m(s,x)] M(\mathrm{d}s, \mathrm{d}x) \Big\| > \varepsilon\Big) \\ \leq &\varepsilon + \limsup_{m \to \infty} P\big(\nu(\overline{E_m^c \cap G_m^c}) > \varepsilon^3\big) \end{aligned}$$

且

$$\limsup_{m\to\infty} P\Big(\sup_{t\le N}\Big\|\int_0^t\int_{\boldsymbol{E}}\big[I_A(s,x)-f_m(s,x)\big]V(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x)\Big\|>\varepsilon\Big)$$
$$\le\varepsilon+\limsup_{m\to\infty}P\big(\|V\|\,(\overline{E_m^c\cap G_m^c})>\varepsilon^3\big),$$

所以由 ε 的任意性, 我们有

$$\int_0^\cdot\int_{\boldsymbol{E}} f_m(s,x)Y(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x)\xrightarrow{\mathcal{L}}\int_0^\cdot\int_{\boldsymbol{E}} I_A(s,x)Y(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x),\qquad m\to\infty,$$

因此由 [14, 定理 4.2] 可推得

$$\int_0^\cdot\int_{\boldsymbol{E}} I_A(s,x)Y^n(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x)\xrightarrow{\mathcal{L}}\int_0^\cdot\int_{\boldsymbol{E}} I_A(s,x)Y(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x).$$

证毕.

定义 3.3[11] 设 ν^n,ν 是 $\mathcal{B}(\boldsymbol{E})$ 上的随机测度, 我们称 ν^n 依分布弱收敛到 ν, 记作 $\nu^n\xrightarrow{\mathcal{L}}\nu$, 如果 $\forall f\in C_K(\boldsymbol{E})$, $\int_{\boldsymbol{E}} f(x)\nu^n(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x)\xrightarrow{\mathcal{L}}\int_{\boldsymbol{E}} f(x)\nu(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x)$.

定理 3.4 设 $Y^n=M^n+V^n$ 和 $Y=M+V$ 是 $\boldsymbol{H}$- 值特殊 R- 半鞅测度, 特征分别为 $(V^n,\overline{\nu}^n,\beta^n)$ 和 $(V,\overline{\nu},\beta)$, Y 是没有固定不连续点的独立增量的 $\boldsymbol{H}$- 值半鞅测度, 假设

1) $\overline{\nu}^n\xrightarrow{\mathcal{L}}\overline{\nu}$,

2) $\sup\limits_{t\le N}\big\|\int_0^t\int_{\boldsymbol{E}} f(s,x)V^n(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x)-\int_0^t\int_{\boldsymbol{E}}(s,x)V(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x)\big\|\xrightarrow{P}0\ (n\to\infty)$, $\forall N>0$, $f\in C_K(\boldsymbol{R}_+\times\boldsymbol{E})$,

3) $\forall f\in C_K(\boldsymbol{R}_+\times\boldsymbol{E})$,

$$\int_0^\cdot\int_{\mathcal{M}(\boldsymbol{E})}\Big\|\int_{\boldsymbol{E}} f(s,x)y(\mathrm{d}x)\Big\|^2\beta^n(\mathrm{d}s,\mathrm{d}y)<\infty,$$
$$\int_0^\cdot\int_{\mathcal{M}(\boldsymbol{E})}\Big\|\int_{\boldsymbol{E}} f(s,x)y(\mathrm{d}x)\Big\|^2\beta(\mathrm{d}s,\mathrm{d}y)<\infty,$$

且 $\forall t>0,\ \delta>0$,

$$\lim_{a\to\infty}\limsup_{n\to\infty}P^n\Big\{\int_0^t\int_{\mathcal{M}(\boldsymbol{E})}\Big\|\int_{\boldsymbol{E}} f(s,x)y(\mathrm{d}x)\Big\|^2 I_{\{\|\int_{\boldsymbol{E}} f(s,x)y(\mathrm{d}x)\|>a\}}\beta^n(\mathrm{d}s,\mathrm{d}y)>\delta\Big\}=0,$$

4) $\int_0^t\int_{\mathcal{M}(\boldsymbol{E})} g(\int_{\boldsymbol{E}} f(s,x)y(\mathrm{d}x))\beta^n(\mathrm{d}s,\mathrm{d}y)\xrightarrow{P}\int_0^t\int_{\mathcal{M}(\boldsymbol{E})} g\big(\int_{\boldsymbol{E}} f(s,x)y(\mathrm{d}x)\big)\beta(\mathrm{d}s,\mathrm{d}y)$, 对任意的 $t>0$, $f\in C_K(\boldsymbol{R}_+\times\boldsymbol{E})$, $g\in C_0^+(\boldsymbol{H})$ 成立, 其中 $g\in C_0^+(\boldsymbol{H})$ 指 g 是在 0 的某邻域内或在 $\boldsymbol{H}$ 的一个紧集外为 0 的连续函数. 那么 $Y^n\Longrightarrow Y$.

证 因为 Y 是独立增量的 $\boldsymbol{H}$- 值特殊半鞅测度, 所以由定理 2.15 知 $(V,\overline{\nu},\beta)$ 是非随机的. 对任意的 $f\in C_K(\boldsymbol{R}_+\times\boldsymbol{E})$, 令 $x^n=m^n+v^n$, $x=m+v$, 其中

$$m^n=\int_o^\cdot\int_{\boldsymbol{E}} f(s,x)M^n(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x),\qquad v^n=\int_0^\cdot\int_{\boldsymbol{E}} f(s,x)V^n(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x),$$
$$m=\int_o^\cdot\int_{\boldsymbol{E}} f(s,x)M(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x),\qquad v=\int_0^\cdot\int_{\boldsymbol{E}} f(s,x)V(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x).$$

由假设知 x^n 和 x 均为局部平方可积的 $\boldsymbol{H}$- 值特殊半鞅, 且 x 是没有固定不连续点的独立增量过程. 设 λ^n 和 λ 分别是 x^n 和 x 的跳测度的可料对偶投影, 由条件 4) 和 (2.2) 式可推得

$$g\cdot\lambda_t^n \xrightarrow{P} g\cdot\lambda_t,\qquad \forall\, t>0,\ \ g\in C_0^+(\boldsymbol{H}).$$

由条件 2) 可知

$$\sup_{t\le N}\|v_t^n-v_t\|\xrightarrow{P}0,\qquad \forall\, N>0.$$

条件 1) 推得

$$\ll m^n \gg=\int_0^\cdot\int_{\boldsymbol{E}} f^2(s,x)\overline{\nu}^n(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x)\xrightarrow{\mathcal{L}}\int_0^\cdot\int_{\boldsymbol{E}} f^2(s,x)\overline{\nu}(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x)=\ll m\gg.$$

因 $\ll m\gg$ 非随机, 由 [15, 引理 3.1]

$$\sup_{t\le N}\big\|\ll m^n\gg_t-\ll m\gg_t\big\|_1\xrightarrow{P}0,\qquad \forall\, N>0.$$

条件 3) 表明

$$\lim_{a\to\infty}\limsup_{n\to\infty}P^n\big(\|x\|^2 I_{\{\|x\|>a\}}\cdot\lambda_t^n>\delta\big)=0,\qquad \forall\, t>0,\qquad \delta>0,$$

故由 [11, 定理 4.2.7] 知 $x^n\xrightarrow{\mathcal{L}}x$, 从而 $Y^n\Longrightarrow Y$. 证毕.

推论 3.5 设 Y^n 是 $\boldsymbol{H}$- 值特殊 R- 半鞅测度, 可料特征为 $(V^n,\overline{\nu}^n,\beta^n)$, Y 是连续的独立增量的 $\boldsymbol{H}$- 值特殊 R- 半鞅测度, 可料特征为 $(V,\overline{\nu},0)$. 假设定理 3.4 中的条件 1), 2) 和 3) 成立, 如果 $P^n\big(\sup_{s\le N}\big\|Y^n(\{s\}\times K)\big\|>a\big)\to 0$, $n\to\infty$, 对任意的 $s>0$, $a>0$, $N>0$, $f\in C_K(\boldsymbol{R}_+\times\boldsymbol{E})$ 和紧集 K 成立, 且存在 $c>0$, 使得 $\big\|Y^n\big(\{s\}\times K\big)\big\|\le c$, $\big\|Y^n\big(\{s\}\times K\big)\big\|$ 表示 $Y^n\big(\{s\}\times\mathrm{d}x\big)$ 在 K 上的全变差, 则 $Y^n\Longrightarrow Y$.

证　对任意的 $f\in C_K(\boldsymbol{R}_+\times\boldsymbol{E})$, x^n,m^n,v^n,x,m,v 和 λ^n 与定理 3.4 证明中的表示相同, 由定理 3.4, 我们只需证明其条件 4) 满足.

由于对任意的 $g\in C_0^+(\boldsymbol{H})$, 存在 $a>0$, $c>0$, 使得 $g\le c$, 且当 $\|x\|\le a$ 时, $g(x)=0$, 故

$$g\cdot\lambda_t^n\le cI_{\{\|x\|>a\}}\cdot\lambda_t^n=c\lambda^n([0,t]\times\{\|x\|>a\}),$$

又若 $\sup_x\big|f(x)\big|\le c_1$, 则

$$\|\Delta x_t^n\|\le c_1\sup_{s\le t}\big\|Y^n\big(\{s\}\times K\big)\big\|\le c_1c,$$

并且

$$P^n\Big(\sup_{s\le N}\|\Delta x_s^n\|>a\Big)\le P^n\Big(\sup_{s\le N}\big\|Y^n\big(\{s\}\times K\big)\big\|>a\Big),$$

其中紧集 $K\subset\boldsymbol{R}_+\times\boldsymbol{E}$, $\mathrm{supp}\{f\}\subset K$. 由 [11, 定理 3.4.6] 知

$$\lim_{n\to\infty}P^n\Big(\sup_{s\le N}\|\Delta x_s^n\|>a\Big)=0,$$

等价于

$$\lim_{n\to\infty} P^n\big(\lambda^n([0,t]\times\{\|x\|>a\})>\varepsilon\big)=0, \qquad \forall\varepsilon>0,$$

再由假设知

$$g\cdot\lambda_t^n \xrightarrow{P} 0, \qquad \forall t\geq 0.$$

因此，由定理 3.4 知 $Y^n \Longrightarrow Y$. 证毕.

定理 3.6 设 $Y^n=M^n+V^n$ 和 $Y=M+V$ 均为 $\boldsymbol{H}$- 值特殊 R- 半鞅测度，可料特征分别为 $(V^n,\overline{\nu}^n,\beta^n)$ 和 $(V,\overline{\nu},\beta)$. Y^n 和 Y 均为独立增量的，且 Y 没有固定不连续点. 如果对任意的 $t>0$ 和任意的 $f\in C_K(\boldsymbol{R}_+\times\boldsymbol{E})$,

$$\lim_{a\to\infty}\limsup_{n\to\infty}\int_0^t\int_{\mathcal{M}(\boldsymbol{E})}\Big\|\int_{\boldsymbol{E}}f(s,x)y(\mathrm{d}x)\Big\|^2 I_{\{\|\int_{\boldsymbol{E}}f(s,x)y(\mathrm{d}x)\|>a\}}\beta^n(\mathrm{d}s,\mathrm{d}y)=0,$$

且对任意的 $N\in\boldsymbol{N}$, 存在 $m,n_0\in\boldsymbol{N}$, 使得当 $n\geq n_0$ 时，$H\backslash(V_mR^m)$- 值过程 $\int_0^\cdot\int_{\boldsymbol{E}}f(s,x)Y^n(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x)-V_m\Pi_m\big(\int_0^\cdot\int_{\boldsymbol{E}}f(s,x)Y(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x)\big)$ 和 $\int_0^\cdot\int_{\boldsymbol{E}}f(s,x)Y(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x)-V_m\Pi_m\big(\int_0^\cdot\int_{\boldsymbol{E}}f(s,x)Y(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x)\big)$ 在 $[0,N]$ 上连续，则在下列条件成立的条件下，我们有 $Y^n\Rightarrow Y$.

1) $\overline{\nu}^n\xrightarrow{\mathcal{L}}\overline{\nu}$,

2) $\sup\limits_{t\leq s}\|v_t^n-v_t\|\to 0$, $n\to\infty$, $\forall s>0$,

3) $\int_0^t\int_{\mathcal{M}(\boldsymbol{E})}g\big(\int_{\boldsymbol{E}}f(s,x)y(\mathrm{d}x)\big)\beta^n(\mathrm{d}s,\mathrm{d}y)\to\int_0^t\int_{\mathcal{M}(\boldsymbol{E})}g\big(\int_{\boldsymbol{E}}f(s,x)y(\mathrm{d}x)\big)\beta(\mathrm{d}s,\mathrm{d}y)$, $\forall g\in C_0^+(\boldsymbol{H})$.

证 对任意的 $f\in C_K(\boldsymbol{R}_+\times\boldsymbol{E}), x^n, m^n, v^n, x, m, v, \lambda^n$ 和 λ 与定理 3.4 证明中的表示相同，那么 x^n 和 x 是 $\boldsymbol{H}$- 值的独立增量的局部平方可积的特殊半鞅，v^n 和 v 是非随机的有限变差函数. 由假设条件知

$$\lim_{a\to\infty}\limsup_{n\to\infty}\|x\|^2 I_{\{\|x\|>a\}}\cdot\lambda_t^n=0, \qquad \forall t>0,$$

且对任意的 $N\in\boldsymbol{N}$, 存在 $m,n_0\in\boldsymbol{N}$, 使得当 $n\geq n_0$ 时，$H\backslash(V_mR^m)$- 值过程 $x^n-V_m\Pi_m x^n$ 和 $x-V_m\Pi_m x$ 在 $[0,N]$ 上连续.

由条件 1) 知

$$\ll m^n\gg=\int_0^\cdot\int_{\boldsymbol{E}}f^2(s,x)\overline{\nu}^n(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x)\xrightarrow{\mathcal{L}}\int_0^\cdot\int_{\boldsymbol{E}}f^2(s,x)\overline{\nu}(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x)=\ll m\gg.$$

$\ll m\gg$ 非随机，故知按 $\mathcal{D}(\boldsymbol{H}\widehat{\otimes}_1\boldsymbol{H})$ 上的 Skorohod 拓扑 $\ll m^n\gg\to\ll m\gg$, 由条件 2) 知

$$\sup_{t\leq s}\|v_t^n-v_t\|\longrightarrow 0, \qquad \forall s>0,$$

从而按 $\mathcal{D}(\boldsymbol{H})$ 上的 Skorohod 拓扑 $v_t^n\to v_t$. 条件 3) 表明

$$g\cdot\lambda_t^n\xrightarrow{P}g\cdot\lambda_t, \qquad \forall t>0, \qquad g\in C_0^+(\boldsymbol{H}).$$

故由 [11, 定理 4.2.2] 知 $x^n\xrightarrow{\mathcal{L}}x$, 从而 $Y^n\Longrightarrow Y$. 证毕.

致谢 本文能够顺利完成，得益于徐州师范大学谢颖超教授和导师严加安院士的悉心指导和鼓励，在此表示衷心感谢，并对审稿人表示深切的谢意.

参 考 文 献

[1] Prokhorov Yu V. Convergence of Stochastic Processes and Limit Theorems in Probability Theory. *Theory Probab. Appl.*, 1956, 1: 157–212

[2] Skorohod A V. Limit Theorems for Stochastic Processes. *Theory Probab. Appl.*, 1956, 1: 261–290

[3] Jacod J, Shiryaev A N. Limit Theorems for Stochastic Process. New York: Springer-Verlag, 1987

[4] Walsh J B. An Introduction to Stochastic Partial Differential Equations. Lecture Notes in Math., Vol.1180, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1986, 267–439

[5] Karoui N El, Méléard S. Martingale Measures and Stochastic Calculus. *Probab. Th. Rel. Fields*, 1990, 84: 83–101

[6] Thang D H. On the Convergence of Vector Random Measures. *Probab. Theory Related Fields*, 1991, 88: 1–16

[7] Xie Y. Vague Convergence of Locally Integrable Martingale. *Stochastic Process Appl.*, 1994, 52: 211–227

[8] Xie Y. Limit Theorems of Hilbert Valued Semimartingales and Hilbert Valued Martingale Measures. *Stochastic Process Appl.*, 1995, 50: 277–293

[9] Xie Y. Vague Convergence of Semimartingale Random Measures. *Stochastic Anal. Appl.*, 2004, 22(2): 315–332

[10] Yan J. Lectures on Measure Theory. Beijing: Science Press, 1998 (in Chinese)

[11] Xie, Y. Martingale Measures and Limit Theorems. Nanjing: Jiangsu Science and Technology Press, 1995 (in Chinese)

[12] Kallenberg O. Radom Measures. Berlin: Akademie-Verlag, 1983

[13] He S. Wang J, Yan J. Semimartingale Theory and Stochastic Calculus. Beijing: Science Press, 1995 (in Chinese)

[14] Billingsley P. Convergence of Probability Measures. New York: John Wiley, 1968

[15] Kasahara Y, Watanabe S. Limit Theorems for Point Processes and Their Functions. *J. Math. Soc. Japan*, 1986, 38: 543–574

[16] Kurtz T G, Protter P. Weak Convergence of Stochastic Integrals and Differential Equations II: Infinite Dimensional case. In: Probabilistic Models for Nonlinear Partial Differential Equations, Talay D and Tubaro L, eds., Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1996, 197–285

[17] Métivier M. Semimartingale, a Course on Stochastic Process. Berlin New York: De Gruyter, 1982

VAGUE CONVERGENCE OF *H*-VALUED SEMIMARTINGALE RANDOM MEASURES

ZHOU QING

(*Academy of Mathematics and Systems Sciences, Chinese Academy of Sciences, Beijing* 100080)

Abstract In this paper, we introduce the notion of ***H***-valued semimartingale random measures and investigate their fundamental properties. We also study stochastic integrals with respect to ***H***-valued semimartingale random measures and introduce the concept of vague convergence of ***H***-valued semimartingale random measures. Some limit theorems of ***H***-valued semimartingale random measures are established.

Key words ***H***-valued semimartingale random measures, stochastic integrals, limit theorems