

# 同轴相移数字全息中相移角的选取及相移误差的消除

张 莉<sup>1</sup> 国承山<sup>1,2</sup> 荣振宇<sup>1</sup> 任秀云<sup>1</sup> 刘 轩<sup>1</sup> 王慧田<sup>2</sup>

(1 山东师范大学物理系, 济南 250014)

(2 南京大学固体微结构国家重点实验室, 南京 210093)

**摘 要** 基于两步同轴相移数字全息, 首先从理论上分析了记录时不同相移角的选取及相移误差对再现像的影响, 并给出了一种利用再现像所有抽样点的强度偏差之和作为评价标准, 通过逐步改变理论设定相移角值来寻找实际相移角的相移误差消除新方法; 其次对二步相移数字全息中记录时参考光波最佳相移角的选取作了计算机模拟, 发现只有将参考光波的相移角选择在一定范围内, 再现像的噪声较小; 最后利用计算机模拟了相移误差消除, 验证了所提方法的可行性。

**关键词** 二步相移; 数字全息; 相移误差; 相移角

**中图分类号** TB877 **文献标识码** A

## 0 引言

近年来, 随着计算机技术特别是高分辨率 CCD 电荷耦合器件的发展, 全息技术的一个重要发展趋势是利用 CCD 记录全息图并直接输入计算机进行数字处理与再现, 即所谓的数字全息术。同传统全息相比, 数字全息曝光时间短, 没有化学处理过程, 数字再现, 方便、灵活。目前, 数字全息最大的缺点就是它的分辨率问题, 所以数字全息常常采用同轴装置, 并利用相移技术消除它的零级像和共轭像, 从而再现出所需要的原始像。这种相移技术不但可以有效消除零级像和共轭像的影响, 而且可以提高再现像的分辨率和扩大再现像的视场, 具有广阔的应用前景<sup>[1~4]</sup>。

在同轴相移数字全息中, 由于采用相移技术数字再现, 因此选取不同的相移角对再现结果有一定的影响, 本文对此作了计算机数值模拟分析。另外, 在实际的相移过程中, 由于相移器相移值标定的不准确, 或是实验操作误差及尘粒、气流、振动等使得实际记录时的相移角与数字再现时所用的理论设定相移角值有一偏差, 这被称为是相移误差, 目前消除这种误差的主要方法是重复相移、重复记录的平均法, 或是寻找对相移误差敏感较小的或能够补偿相移误差的算法来减小其影响<sup>[5~8]</sup>, 本文给出了一种有效消除相移误差的新方法, 并进行了计算机模拟验证。

## 1 理论分析

同轴相移数字全息的记录光路与普通全息的基本相同, 我们基于二步相移同轴数字全息进行分析,

如图 1 所示。一束偏振光由分束器分成两束, 一束照明物体形成物波, 另一束被准直扩束后形成同轴参考光。这两束光在 CCD 平面处发生干涉, 产生的全息图由 CCD 记录并以数字的形式输入到计算机。M1、M2、M3 是反射镜, BS1 和 BS2 是分束器, S1 和 S2 是快门, PSD 为相移器。

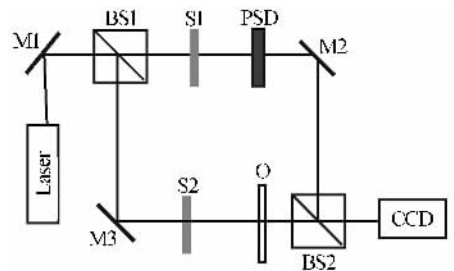


图 1 二步相移同轴数字全息实验装置图

Fig. 1 Fundamental setup of two-step phase-shifting in-line digital holography

假定一个纯位相物体其复振幅分布为  $U_0(x_0, y_0) = \exp[i\varphi_0(x_0, y_0)]$ , 经过距离  $d$  的菲涅耳衍射, 在 CCD 平面的复振幅表示为

$$U(x, y) = F^{-1} \{ F[U_0(x_0, y_0)] \times P(u, v) \} = A(x, y) \exp[i\varphi(x, y)] \quad (1)$$

此处,  $P(u, v) = \exp[-i\pi\lambda d(u^2 + v^2)]$  是菲涅耳衍射的传递函数,  $\lambda$  是物波波长,  $F$  是傅里叶变换标识符。

设参考光波为平面波, 在 CCD 平面的复振幅分布为

$$R(x, y, \theta) = A_r \exp(i\theta) \quad (2)$$

此处,  $\theta$  为一定值, 设平面波的初位相为零, 那么  $\theta$  便是引入的阶梯相移角, 可以通过相移器来改变其大小。在二步相移数字全息的记录中, 相移角改变一次。除需记录两幅干涉图外, 还需利用快门分别记录物波与参考光波的强度分布, 由此所记录下的四幅图的强度分布为

$$I(0) = A^2 + A_r^2 + A_r A \exp [i\varphi(x, y)] + A_r A \exp [-i\varphi(x, y)] \quad (3)$$

$$I(\theta) = A^2 + A_r^2 + A_r A \exp \{i[\varphi(x, y) - \theta]\} + A_r A \exp \{-i[\varphi(x, y) - \theta]\} \quad (4)$$

$$I_r = A_r^2 \quad (5)$$

$$I_o = A^2 \quad (6)$$

利用二步相移算法可获得在 CCD 面处的原始物波的复振幅分布

$$U(x, y) = \{[I(0) - I_r - I_o] - \exp(-i\theta)[I(\theta) - I_r - I_o]\} / \{A_r[1 - \exp(-i2\theta)]\} \quad (7)$$

要使上式成立,从数学的角度考虑,相移角  $\theta \neq K\pi$  ( $K$  为整数)即可.而实际上,考虑到数字再现过程中数值计算的相对误差对再现结果的影响,相移角  $\theta$  取值越靠近  $K\pi$  值,再现误差就会越大,因此为了减小再现像的误差,记录时参考光波相移角需在一定的范围内取值.本文在后边的计算机模拟中对这一问题作了定量的数值分析.

理论上,只要记录时选择了合适的参考光波相移角,通过式(7),便可较为准确地再现 CCD 平面处的物波光场分布.但在实际实验中,由于相移误差,所用的理论设定相移角  $\theta'$  与实际相移角  $\theta$  之间有一微小差别  $\Delta\theta$  ( $|\Delta\theta| \ll 1$ ),设它们之间的关系为  $\theta = \theta' + \Delta\theta$ .而数字计算所使用的角值是理论设定相移角  $\theta'$ ,将其代入公式(7),并且采用近似处理  $\exp(i\Delta\theta) = 1 + i\Delta\theta$ ,那么实际在 CCD 面的光场复振幅分布为

$$U'(x, y) = \frac{[I(0) - I_r - I_o] - \exp(-i\theta')[I(\theta) - I_r - I_o]}{A_r[1 - \exp(-i2\theta')] = \frac{1 - \exp[-i(2\theta' + \Delta\theta)]}{1 - \exp(-i2\theta')} A \exp[i\varphi(x, y)] - \frac{1 - \exp[i(\Delta\theta)]}{1 - \exp(-i2\theta')} A \exp[-i\varphi(x, y)] = [1 - \frac{i\Delta\theta}{1 - \exp(i2\theta')}] A \exp[i\varphi(x, y)] + \frac{i\Delta\theta}{1 - \exp(-i2\theta')} A \exp[-i\varphi(x, y)] \quad (8)$$

该光场再经一菲涅尔衍射,就可得到在原物平面处的虚像光场分布

$$U'_o(x_o, y_o) = F^{-1} \{F[U'(x, y)] \times P^{-1}(u, \nu)\} = A_o(x_o, y_o) \times \exp \{i[\varphi_o(x_o, y_o) + \delta(x_o, y_o)]\} \quad (9)$$

此处

$$A_o(x_o, y_o) \exp[i\delta(x_o, y_o)] = [1 - \frac{i\Delta\theta}{1 - \exp(i2\theta')}] + [\frac{i\Delta\theta}{1 - \exp(-i2\theta')}] \exp[-i\varphi_o(x_o, y_o)] \cdot$$

$$F^{-1} \{F\{A \exp[-i\varphi(x, y)] \times P^{-1}(u, \nu)\} \quad (10)$$

式(8)右边的第二项为 CCD 平面处的物波光场  $A \exp[i\varphi(x, y)]$  的共轭波光场  $A \exp[-i\varphi(x, y)]$ ,

这说明利用相移方法并没有完全将共轭像消除掉,这样,  $U'(x, y)$  也将不能准确再现原物波.从数字再现的公式(9)也可以看到,所再现的是原始像  $\exp(i\varphi_o)$  与  $A_o \exp(i\delta)$  的乘积,这便是由于相移误差而导致的再现像失真.它产生的实质原因是数字计算所用的理论设定相移角  $\theta'$  与实际相移角  $\theta$  不相同,如果能发现实际相移角,那么相移误差便可消除.本文正是基于此种思想,利用数字再现像的所有抽样点的强度偏差之和作为一个评价标准,通过逐级改变理论设定相移角的值来获得使这个评价标准为极小值时的相移角,由此获得实际相移角.考虑到相移误差的消除,整个全息图的记录和计算机处理过程如下:

1) 采用图 1 所示实验装置图,由 CCD 分别记录下  $I_1, I_2, I_3, I_4$  四幅强度图,并将其存入计算机.

2) 用公式(8)数字再现 CCD 平面的物波,角度  $\theta'$  是设定值.

3) 采用公式(9)数字再现原物平面处的物波光场分布,并且计算它的强度偏差之和  $\Delta E$ ,令其作为标准,它的数学表示式为

$$\Delta E = \sum_{m,n} (A_{mn}^2 - C^2) \quad (11)$$

$A_{mn}$  是再现像各抽样点  $(m, n)$  的振幅值,  $C$  是所有抽样点的振幅平均值.

4) 使  $\theta'$  逐步增加或减小一个微小值  $\varepsilon$ ,重复步骤 2)、3) 直到  $\Delta E$  达到最小值.

使  $\Delta E$  达到最小值时的相移角值便是所要寻找的理论相移角,将其带入公式(8)和(9),便可较为准确地再现原物波.以上是对纯相位物体所作的相移误差分析,对于普通的既有振幅变化又有相位变化的物体,只要已知其振幅分布,上述方法仍然是可行的,只需将方程(11)中的定值  $C$  用原物波各点振幅来代替即可.另外,也可利用该方法来寻找系统的实际相移偏差,对理论设定相移角进行修正,进而将其应用于其它的物体.

## 2 计算机模拟

分别对同轴相移数字全息中记录所用的参考光波最佳相移角的选取及相移误差的消除作了计算机模拟.模拟所用的实验装置为二步相移同轴数字全息实验装置(图 1 所示).物体为一纯相位物体.所用 CCD 的像素阵列为  $512 \times 512$ ,像素大小为  $10 \mu\text{m} \times 10 \mu\text{m}$ ,CCD 与物平面距离为  $d = 200 \text{ mm}$ ,光源为 He-Ne 激光器( $\lambda = 632.8 \text{ nm}$ ).

### 2.1 相移角选取的计算机模拟

首先对采用不同的参考光波相移角的两步相移同轴数字全息过程进行了计算机模拟.模拟记录  $N$

幅(本文取  $N=64$ )参考光波相移角分别为  $n\pi/N$  ( $n$  为正整数,  $n \leq N$ ) 的全息图, 并数字再现其在原始物平面处的像. 仍然利用式(11)作为误差标准, 计算所有再现像的强度误差值. 计算所得数据表明, 我们对再现像强度误差  $\Delta E$  与相移角度  $\theta$  ( $\theta \in (0, \pi)$  rad) 的关系的理论分析是正确的, 当相移角趋近 0 rad 或  $\pi$  rad 时再现像的强度误差迅速增大, 但增加的趋势并不是完全对称的. 图2所作的是  $\theta \in (0.45, 2.35)$  rad 与  $\Delta E$  的关系图, 对图2的数据分析表明, 相移角  $\theta$  取 1.3 rad 时, 再现像的强度误差最小, 相移角  $\theta$  在 (1.0, 1.6) rad 范围内, 再现像的强度误差基本保持不变. 因此可以认为这一范围为  $\theta$  的最佳取值范围. 图3(a)、(b)分别为记录时参考光波相移角为 1.5 rad 和 3.0 rad 且利用相移技术消除零级像及共轭像所再现的原始像的相衬图, 比较两幅图可以看到图(b)像质较差, 明显有噪声干扰.

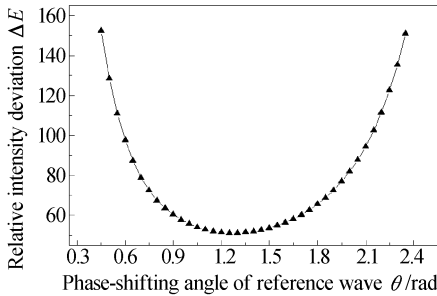


图2 不同的参考光波相移角  $\theta$  与再现像的强度误差  $\Delta E$  的关系曲线图

Fig. 2 Dependence of the intensity deviation,  $\Delta E$ , of the reconstructed wave on different recording phase-shifting  $\theta$

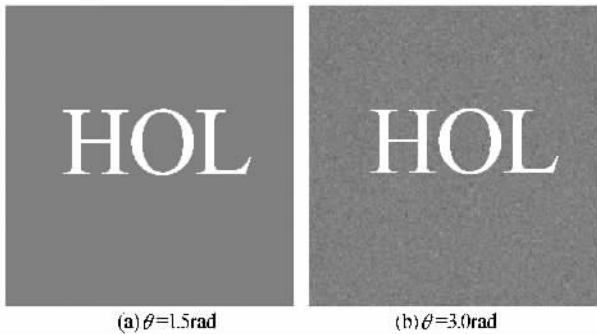


图3 不同参考光波相移角所再现像的相衬图

Fig. 3 Reconstructed phase-contrast image with different recording phase-shifting angle

## 2.2 相移误差消除的计算机模拟

选取记录时理论设定的相移角为  $\pi/2$  rad, 模拟相移误差的消除. 图4作出了再现物波强度偏差之和  $\Delta E$  与理论设定相移角  $\theta'$  之间的关系图, 由该曲线可以看出当  $\theta' = 1.5$  rad 时,  $\Delta E$  的值最小, 这表明记录过程中的实际相移角  $\theta$  是 1.5 rad, 并不是  $\pi/2$  rad ( $\approx 1.571$  rad), 由此相移误差就可消除. 图5(a)、(b)的  $a$ 、 $b$ 、 $c$  曲线分别是原物体、未经相移误差消除所再现的像及经相移误差消除所再现的像沿

某一轴线的振幅、相位分布图. 由图5(a)、(b)的曲线  $b$  与曲线  $a$  各自相比较可以看出未经相移误差消除所再现的像其振幅和相位都发生了变化, 所再现的已不再是一个纯相位的物体, 不仅相位值发生变化, 而且振幅也不再是一常量, 并且, 由图还可以看到, 这种相移误差对振幅的影响要对比对相位的影响相对大些, 这更加说明利用强度偏差作为判据来发现实际的相移角有很高的灵敏性; 而曲线  $c$  与曲线  $a$  相比较, 可以看到利用相移误差消除法所再现的物波其振幅、相位已接近于原物波的振幅和相位, 证明了所提的相移误差消除方法的可行性.

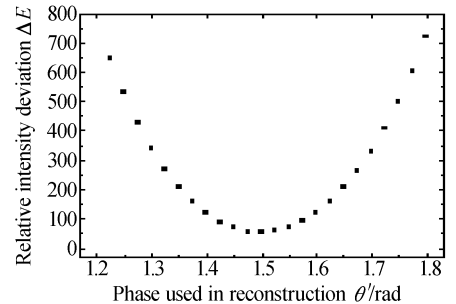
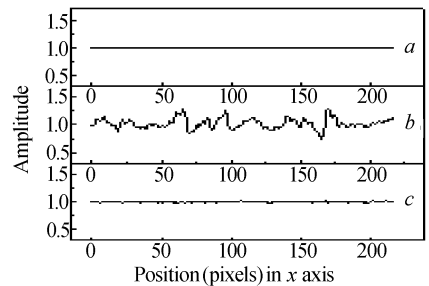
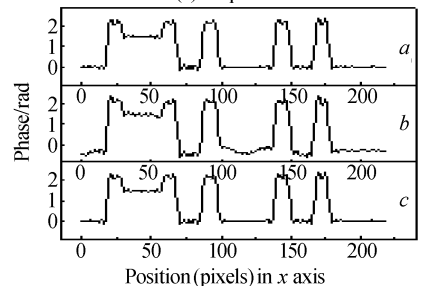


图4 再现时所用的理论相移角  $\theta'$  与再现像强度偏差  $\Delta E$  的关系图

Fig. 4 Dependence of the intensity deviation,  $\Delta E$ , of the reconstructed wave on different designed theoretically phase used in reconstruction  $\theta'$



(a) Amplitude



(b) Phase

图5 沿某一轴线的振幅和相位分布曲线

Fig. 5 Distribution curve of the amplitude and phase along a certain broken line

## 3 结论

在同轴相移数字全息中, 相移角的选取及相移误差都直接影响再现像的准确重现. 在数字全息的记录过程中, 需选择使再现像误差较小的相移角; 对于相移误差, 利用本文所给的方法可以得到很好地

消除. 这些都有助于数字全息再现像像质的提高.

### 参考文献

- 1 Goodman J W, Lawrence R W. Digital image formation from electronically detected holograms. *Appl Phys Lett*, 1967, **11**(3): 77 ~ 79
- 2 国承山, 王伟田, 李健, 等. 全息图数字再现中零级衍射斑的消除. *光学学报*, 1998, **18**(8): 1073 ~ 1076  
Guo C S, Wang W T, Li J, et al. *Acta Optica Sinica*, 1998, **18**(8): 1073 ~ 1076
- 3 Yamaguchi I, Zhang T. Phase-shifting digital holography. *Opt Lett*, 1997, **22**(16): 1268 ~ 1270
- 4 刘诚, 李良钰, 李银柱, 等. 无直透光和共轭像的数字全息. *光学学报*, 2002, **22**(4): 427 ~ 431  
Liu C, Li L Y, Li Y Z, et al. *Acta Optica Sinica*, 2002, **22**(4): 427 ~ 431
- 5 Schmint J, Creath K. Extended averaging technique for derivation of error-compensating algorithms in phase-shifting interferometry. *Appl Opt*, 1995, **34**(19): 3610 ~ 3619
- 6 Zhang H, Labor M J, Burton D R. Error-compensating algorithms in phase-shifting interferometry: a comparison by error analysis. *Opt Laser Eng*, 1999, **31**: 381 ~ 400
- 7 钱克矛, 伍小平. 用待定系数法设计误差补偿相移算法. *光子学报*, 2000, **29**(9): 848 ~ 851  
Qian K M, Wu X P. *Acta Photonica Sinica*, 2000, **29**(9): 848 ~ 851
- 8 黄深旺, 陈磊, 陈进榜, 等. 斐索型球面干涉仪移相误差的探讨. *光子学报*, 1996, **25**(10): 883 ~ 888  
Huang S W, Chen L, Chen J B, et al. *Acta Photonica Sinica*, 1996, **25**(10): 883 ~ 888

## Phase-shifting Angle Choice and Phase-shifting Error Elimination in In-line Phase-shifting Digital Holography

Zhang Li<sup>1</sup>, Guo Chengshan<sup>1,2</sup>, Rong Zhenyu<sup>1</sup>, Ren Xiuyun<sup>1</sup>, Liu Xuan<sup>1</sup>, Wang Huitian<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Department of Physics, Shandong Normal University, Jinan 250014

<sup>2</sup> National Laboratory of Solid State Microstructures, Nanjing University, Nanjing 210093

Received date: 2003-04-14

**Abstract** The influence caused by different phase-shifting angle of reference wave in recording and the phase-shifting error on the quality of the reconstructed image is investigated in two-step phase-shifting in-line digital holography, and an effective method of eliminating the phase-shifting error is presented, in which the summation of the intensity bit errors of the reconstructed image is taken as an evaluation function for an iterative algorithm to find the exact phase-shifting value. Then the optimal choice of the phase-shifting value of reference wave is simulated by computers. The simulation results show that the reconstructed image noise is weak when the phase-shifting value is in a certain range. At last, the feasibility of the method of eliminating the phase-shifting error is demonstrated by computer simulation also.

**Keywords** Two-step phase-shifting; Digital holography; Phase-shifting error; Phase-shifting angle

**Zhang Li** was born in Shanxi. She is currently working on her MS degree in Department of Physics of Shandong Normal University. Her main research is focused on in-line phase-shifting digital holography.

