

# 单模激光 Lorenz 系统与 3D 混沌系统之间的混沌同步

李钢

(辽宁师范大学物理与电子技术学院, 大连 116029)

**摘 要:**研究了异结构混沌系统之间的同步控制问题. 采用非线性反馈控制方法实现了 3D 混沌系统和单模激光 Lorenz 混沌系统之间的混沌同步. 根据系统的稳定性理论, 得到了非线性反馈控制器的结构和反馈控制增益的取值范围. 仿真模拟的结果表明: 目标系统和响应系统达到完全同步, 两系统状态变量随时间的演化轨迹完全一致, 并且误差变量经过短暂的时间序列以后始终平稳地趋于零. 仿真模拟的结果证明了这种方法的有效性.

**关键词:**非线性反馈; 3D 混沌系统; Lorenz 混沌系统; 混沌同步

**中图分类号:** O415.5

**文献标识码:** A

**文章编号:** 1004-4213(2007)05-0808-4

## 0 引言

混沌运动具有对初值的敏感依赖性, 这使得任何两条相邻轨道都要以指数律相互分离直至变得完全不相关. 1990 年 Pecora 和 Carroll 提出了一种混沌同步方法, 结束了长期以来人们对混沌不能同步的认识. 20 年来, 混沌同步在非线性科学领域占有越来越重要的地位, 在保密通信中的应用也越来越广泛, 特别是混沌控制与同步更是目前科学研究的前沿课题之一<sup>[1-10]</sup>. 迄今, 常见的混沌同步控制方法有驱动响应法<sup>[11]</sup>, 变量耦合法<sup>[12]</sup>, 变量反馈法<sup>[13]</sup>等, 由于同结构混沌同步易于实现, 人们主要是利用上述各种同步控制方法实现同结构混沌同步. 然而, 传统的同结构同步在保密通信中的保密性和抗破译能力还不够理想, 提高混沌信号的复杂程度也就成了保密通信的一个重点. 在自动控制、保密通信等应用领域, 运用简单易行的方法实现异结构混沌同步是十分有价值的工作. 3D 混沌系统和单模激光 Lorenz 混沌系统是两个异结构混沌系统, 它们具有不同的非线性函数. 本文采用非线性反馈控制方法实现了 3D 混沌系统和 Lorenz 混沌系统之间的混沌同步. 首先根据系统的稳定性理论, 得到了非线性反馈控制器的结构和反馈控制增益的取值范围; 然后通过计算系统的 Lyapunov 指数和构造 Lyapunov 函数进行了比较论证; 最后, 对这种反馈同步控制方法进行了仿真模拟, 其结果证明了这种方法的有效性.

## 1 控制器的设计

3D 混沌系统和单模激光 Lorenz 混沌系统都是

三变量方程<sup>[14-15]</sup>

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} = x_3 \\ \frac{dx_3}{dt} = a_1 x_3 + a_2 x_2 + a_3 x_1 + a_4 x_1^2 + a_5 x_1 x_3 + a_6 x_1^2 x_3 \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dt} = -\sigma(y_1 - y_2) \\ \frac{dy_2}{dt} = y_1(R - y_1) - y_2 \\ \frac{dy_3}{dt} = y_1 y_2 - b y_3 \end{cases} \quad (2)$$

式中  $a_1 = -1, a_2 = -1, a_3 = -1.38, a_4 = 1, a_5 = 0.2, a_6 = -0.01, \sigma = 10, b = \frac{8}{3}, R = 30$  时, 两系统处于混沌态, 如图 1.

混沌系统(1)和(2)的非线性函数形式不同, 相图的形状与类型不同, 因此它们是两个异结构混沌系统. 对系统(2)设计非线性控制器  $u$ , 使系统跟踪 3D 混沌系统(1)的混沌轨迹, 从而达到两个混沌系统的同步. 非线性控制器  $u$  作用于系统(2)后使系统(2)变为

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dt} = -\sigma(y_1 - y_2) + u_1(t) \\ \frac{dy_2}{dt} = y_1(R - y_1) - y_2 + u_2(t) \\ \frac{dy_3}{dt} = y_1 y_2 - b y_3 + u_3(t) \end{cases} \quad (3)$$

定义误差

$$\begin{cases} e_1 = y_1 - x_1 \\ e_2 = y_2 - x_2 \\ e_3 = y_3 - x_3 \end{cases} \quad (4)$$

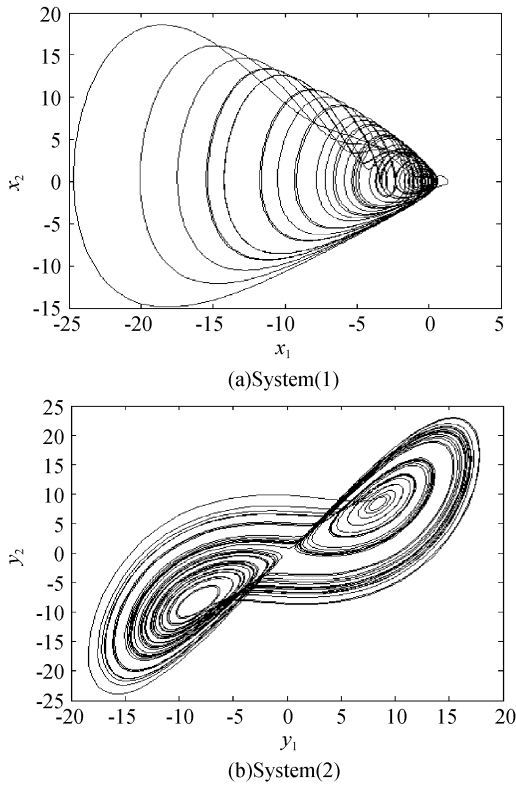


图 1 (a) 系统(1)的  $(x_1, x_2)$  相图, (b) 系统(2)的  $(y_1, y_2)$  相图

Fig. 1 (a) The phase map of system (1) in the  $(x_1, x_2)$  phase space, (b) The phase map of system (2) in the  $(y_1, y_2)$  phase space

由式(1)和式(3)得到误差方程

$$\begin{cases} \frac{de_1}{dt} = e_2 - \sigma(y_1 - y_2) - y_2 + u_1(t) \\ \frac{de_2}{dt} = e_3 + y_1(R - y_1) - y_2 - y_3 + u_2(t) \\ \frac{de_3}{dt} = y_1 y_2 - b y_3 + x_3 + x_2 + 1.38x_1 - x_1^2 - 0.2x_1 x_3 + 0.01x_1^2 x_3 + u_3(t) \end{cases} \quad (5)$$

对误差系统式(5)设计非线性控制器为

$$\begin{cases} u_1(t) = -e_1 - e_2 + \sigma(y_1 - y_2) + y_2 - k_1 e_1 \\ u_2(t) = -e_2 - e_3 - y_1(R - y_1) + y_2 + y_3 - k_2 e_2 \\ u_3(t) = -e_3 - (y_1 y_2 - b y_3 + x_3 + x_2 + 1.38x_1 - x_1^2 - 0.2x_1 x_3 + 0.01x_1^2 x_3) - k_3 e_3 \end{cases} \quad (6)$$

式中  $k_1, k_2, k_3$  为反馈控制增益, 此时误差系统可写为

$$\begin{cases} \frac{de_1}{dt} = -(1+k_1)e_1 \\ \frac{de_2}{dt} = -(1+k_2)e_2 \\ \frac{de_3}{dt} = -(1+k_3)e_3 \end{cases} \quad (7)$$

对于式(7)定义矩阵

$$A = \begin{bmatrix} -1-k_1 & 0 & 0 \\ 0 & -1-k_2 & 0 \\ 0 & 0 & -1-k_3 \end{bmatrix} \quad (8)$$

式(8)的特征方程的三个特征值分别为

$$\lambda_1 = -k_1 - 1, \lambda_2 = -k_2 - 1, \lambda_3 = -k_3 - 1 \quad (9)$$

根据 Hurwitz 稳定性理论<sup>[16]</sup>, 当反馈控制增益  $k_1, k_2, k_3$  的取值均大于  $-1$  时, 矩阵  $A$  的本征值将具有负的实部. 根据 Lyapunov 指数的定义, 可以计算出此时 3D 混沌系统的 Lyapunov 指数为  $-0.426$ , 受控系统(2)跟踪了 3D 混沌系统(1)的混沌轨迹, 从而达到两个混沌系统的同步控制. 即

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e_i(t) = 0 \quad (10)$$

这个结果通过构造 Lyapunov 函数同样得以验证.

令 Lyapunov 函数

$$V(t) = \frac{1}{2}(e_1^2 + e_2^2 + e_3^2) \quad (11)$$

式中  $e_1 = y_1 - x_1, e_2 = y_2 - x_2, e_3 = y_3 - x_3$  为参量误差. 对式(11)求导有

$$\begin{aligned} \dot{V} = & e_1 \dot{e}_1 + e_2 \dot{e}_2 + e_3 \dot{e}_3 = e_1 [e_2 - \sigma(y_1 - y_2) - y_2 + u_1(t)] + e_2 [e_3 + y_1(R - y_1) - y_2 - y_3 + u_2(t)] + \\ & e_3 [y_1 y_2 - b y_3 + x_3 + x_2 + 1.38x_1 - x_1^2 - 0.2x_1 x_3 + 0.01x_1^2 x_3 + u_3(t)] \end{aligned} \quad (12)$$

若将前面设计的非线性控制器式(6)代入式(12)可以得到

$$\dot{V} = -(1+k_1)e_1^2 - (1+k_2)e_2^2 - (1+k_3)e_3^2 \leq 0 \quad (13)$$

以上通过计算系统的 Lyapunov 指数和构造 Lyapunov 函数进行了进一步的比较论证, 显然, 响应系统和目标系统渐进达到完全同步.

## 2 系统仿真

对 3D 系统和单模激光 Lorenz 系统混沌同步进行仿真模拟, 保持系统(1)和(2)的原参量不变, 取反馈控制增益  $k_1 = 1, k_2 = 2, k_3 = 2$ , 仿真模拟显示 3D 混沌系统和 Lorenz 混沌系统之间达到了混沌同步. 同步后的系统状态如图 2. 误差系统状态如图 3.

由图 2、图 3 可以看出, 在非线性控制器  $u$  的作用下, Lorenz 系统中的三个变量均很好地跟踪了 3D 混沌系统中相对应的三个变量的混沌轨迹. 同时, 在仿真过程中还发现, 反馈控制增益  $k_i (i = 1, 2, 3)$  的取值范围非常大, 不论反馈控制增益  $k_i$  取何值, 只要满足前面对它的限制条件, 系统的同步效果均非常稳定.

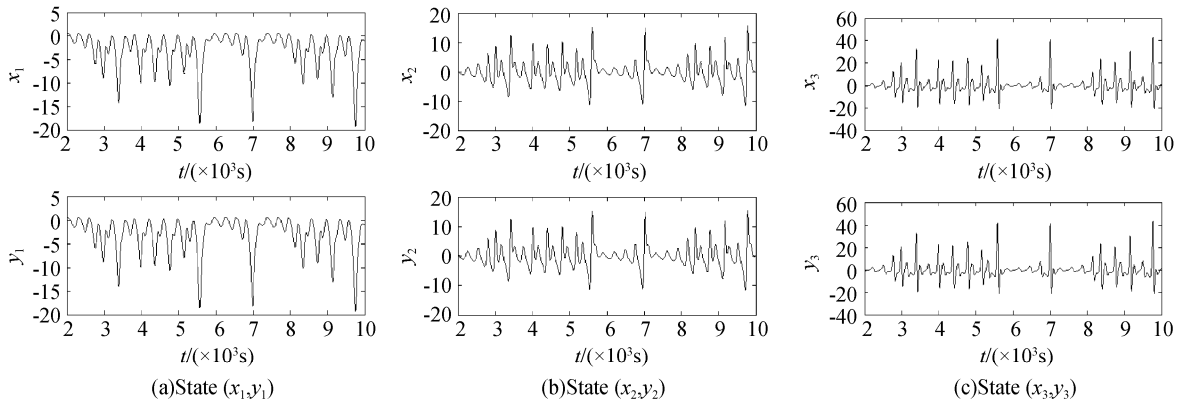


图2 不同状态随时间的变化

Fig. 2 Change of different state according to time

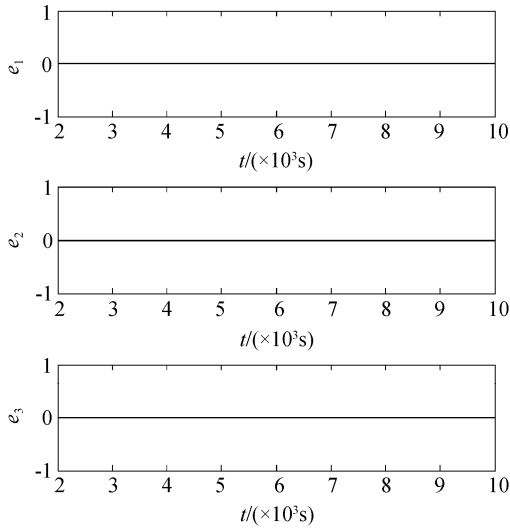


图3 跟踪误差随时间变化

Fig. 3 Tracking errors according to time

### 3 结论

利用非线性反馈控制方法实现了 3D 混沌系统和 Lorenz 混沌系统之间的混沌同步。根据系统的稳定性理论,得到了非线性反馈控制器的结构和反馈控制增益的取值范围;同时,通过计算系统的 Lyapunov 指数和构造 Lyapunov 函数进行了比较论证。仿真结果表明,目标系统和响应系统达到完全同步,两系统状态变量随时间的演化轨迹完全一致,并且误差变量经过短暂的时间序列以后始终平稳地趋于零。本文设计的非线性反馈控制器结构简单,反馈控制增益的可调范围大,实际操作易于实现。

#### 参考文献

- [1] TSIMRING L S, RULKOV N F, LARSEN M L, *et al.* Repulsive synchronization in an array of phase oscillators[J]. *Phys Rev Lett*, 2005, **95**(1):14101-14104.
- [2] TRIMPER S, ZABROCKI K. Delay-controlled reactions[J]. *Phys Lett (A)*, 2004, **321**(4):205-215.
- [3] LÜ Ling, DU Zeng, LUAN Ling. Control of period-doubling bifurcation and chaos in acousto-optical bistable system by feedback of states[J]. *Acta Photonica Sinica*, 2004, **33**(11):

1401-1404.

吕翎,杜增,栾玲.状态反馈控制声光双稳系统的倍周期分岔和混沌[J].光子学报,2004,**33**(11):1401-1404.

- [4] ALVAREZ-RAMIREZ J, ESPINOSA-PAREDES G, PUEBLA H. Chaos control using small-amplitude damping signals[J]. *Phys Lett (A)*, 2003, **316**(3-4):196-205.
- [5] LÜ Ling, LUAN Ling, DU Zeng. A valid method of controlling chaos in single-mode laser Haken-Lorenz system [J]. *Acta Photonica Sinica*, 2004, **33**(4):416-419.  
吕翎,栾玲,杜增.控制单模激光 Haken-Lorenz 系统混沌的一种有效方法[J].光子学报,2004,**33**(4):416-419.
- [6] GUAN Xin-ping, FAN Zheng-ping, ZHANG Qun-liang, *et al.* The study on chaotic anti-control of a continuous-time state stable linear system[J]. *Acta Phys Sin*, 2002, **51**(10):2216-2220.  
关新平,范正平,张群亮,等.连续时间稳定线性系统的混沌反控制研究[J].物理学报,2002,**51**(10):2216-2220.
- [7] LÜ Ling, LI Yi, QIU Dong-chao, *et al.* The study on successive dislocation feedback method of chaos system [J]. *Acta Photonica Sinica*, 2005, **34**(9):1307-1310.  
吕翎,李义,邱东超,等.混沌系统的递次错位反馈控制方法研究[J].光子学报,2005,**34**(9):1307-1310.
- [8] LÜ Ling, ZHAO Hong-yan, ZOU Cheng-ye. An oscillation analytic solution for single-mode laser Haken-Lorenz system [J]. *Acta Photonica Sinica*, 2006, **35**(8):1179-1182.  
吕翎,赵鸿雁,邹成业.单模激光 Haken-Lorenz 系统的振荡解析解[J].光子学报,2006,**35**(8):1179-1182.
- [9] YANG L F, DOLNIK M, ZHABOTINSKY A M, *et al.* Oscillatory cluster in a model of the photosensitive belousov-zhabotinsky reaction system with global feedback [J]. *Phys Rev (E)*, 2000, **62**(5):6414-6420.
- [10] KONISHI K, KOKAME H, HIRATA K. Delayed-feedback control of spatial bifurcations and chaos in open-flow models [J]. *Phys Rev (E)*, 2000, **62**(1):384-388.
- [11] CHENG Li, ZHANG Ru-yuan, PENG Jian-hua. A method for synchronization chaos and hyperchaos by single driving variable[J]. *Acta Phys Sin*, 2003, **52**(3):536-541.  
程丽,张入元,彭建华.用单一驱动变量同步混沌与超混沌的一种方法[J].物理学报,2003,**52**(3):536-541.
- [12] LI Shi-hua, CAI Hai-xing. Research on circuitry realization and synchronization of Chen chaotic systems[J]. *Acta Phys*

- Sin, 2004, **53**(6):1687-1693.
- 李世华, 蔡海兴. Chen 氏混沌电路实现与同步控制实验研究 [J]. 物理学报, 2004, **53**(6):1687-1693.
- [13] KOCAREV L, PARLITZ U, BROWN R. Robust synchronization of chaotic systems [J]. *Phys Rev (E)*, 2000, **61**(4): 3716 - 3720.
- [14] LETELLIER C, MAQUET J, LABRO H, *et al.* Analyzing chaotic behavior in a belousov- zhabotinsky reaction by using a global vector field reconstruction [J]. *J Phys Chem (A)*, 1998, **102**(50):10265-10273.
- [15] LÜ J H, CHEN G R, CHENG D Z, *et al.* Bridge the gap between the Lorenz system and the Chen system [J]. *In J Bifur Chaos*, 2002, **12**(12):2917-2926.
- [16] LÜ Ling. Nonlinear dynamics and chaos [M]. Dalian: Dalian Press, 2000: 130-133.
- 吕翎. 非线性动力学与混沌 [M]. 大连: 大连出版社, 2000: 130-133.

## Chaos Synchronization between Single-Mode Laser Lorenz System and 3D Chaotic System

LI Gang

(College of Physics and Electronic Technology, Liaoning Normal University, Dalian 116029, China)

Received date: 2006-09-13

**Abstract:** The synchronization controller was designed to synchronize chaotic systems with diverse structures. Chaos synchronization between the 3D and single-mode laser Lorenz systems was realized via nonlinear feedback control. The feedback controller was designed based on stability theory, and the area of feedback gain was taken. The artificial simulation results show that global synchronization between the 3D and single-mode laser Lorenz system is realized, and the orbit of the response system is exactly the same as that of the target system. The error signals approach zero smoothly and quickly. The artificial simulation results show that this control method is commendably effective and feasible.

**Key words:** Nonlinear feedback; 3D chaotic system; Lorenz chaotic system; Chaos synchronization



**LI Gang** was born in 1959. He received the M. S. degree in theoretical physics from Yanbian University, in 1985. Now he is an associate professor at department of physics, Liaoning Normal University. His research interest includes nonlinear physics.