

# 二维光栅频谱分析及在精密测量中的应用\*

夏豪杰<sup>1</sup>, 费业泰<sup>1</sup>, 王中宇<sup>2</sup>

(1 合肥工业大学 仪器科学与光电工程学院, 合肥 230009)

(2 北京航空航天大学 仪器科学与光电工程学院, 北京 100083)

**摘 要:**根据傅里叶光学的相关理论对二维衍射光栅的频谱特性进行了分析,并对分析结果进行了模拟和实验验证;基于衍射光栅应用于微位移的理论,提出利用二维衍射光栅作为测量的基准元件,组成单个光源和单二维衍射光栅的二维平面微位移精密测量系统,并根据实验测量结果验证了这是一种具有纳米准确度的可行测量方法.

**关键词:**测量;二维光栅;频谱分析;位移

**中图分类号:** TP212.14

**文献标识码:** A

**文章编号:** 1004-4213(2007)04-0726-4

## 0 引言

目前利用衍射光栅的纳米测量技术主要进行一维测量,对此国内外已经都进行了大量的研究,并有相应的产品在精密测量中广泛应用,有的产品分辨率可达 1 nm,并且其量程愈来愈大<sup>[1-5]</sup>. 在使用过程中对于二维纳米工作台的精密测量要使用两套一维测量装置,增加了装置的占用空间以及系统误差,并且无法检测二维工作台的 X,Y 轴向运动的垂直度偏差,因此对单二维衍射光栅的测试技术的研究具有重要的现实意义. 衍射光栅测量技术由于结构、光路、信号处理比较简单紧凑,对环境要求不如激光干涉仪高等特点,在精密测量中占有重要的地位. 本文根据傅里叶光学相关理论对二维衍射光栅的频谱特性进行了分析,提出用二维衍射光栅作为测量的基准元件,组成二维平面微位移精密测量系统,测量结果显示,该系统测量准确度达到纳米量级.

## 1 二维光栅的频谱特性分析

二维光栅可以看作两块正弦光栅的在垂直方向上的重叠,一块面积为  $L \times L$  的二维光栅的平面定义为 XOY,并且 XY 方向光栅常量相同,其透过率函数可以表示为

$$t(x, y) = \frac{1}{2} \{1 + m[\cos(2\pi f_0 x + \cos(2\pi f_0 y))]\} \times \text{rect}\left(\frac{x}{L}\right) \text{rect}\left(\frac{y}{L}\right) \quad (1)$$

式中  $m \leq 1$ ,  $f_0$  为二维光栅的 X,Y 向空间频率,其空间周期分别为  $1/f_0$ ;当用单位平面波垂直光栅面

入射时,透射波复振幅为

$$U_0(x, y) = t(x, y) = \frac{1}{2} \left[ 1 + \frac{m}{2} (\exp(j2\pi f_0 x) + \exp(-j2\pi f_0 x) + \exp(j2\pi f_0 y) + \exp(-j2\pi f_0 y)) \right] \text{rect}\left(\frac{x}{L}\right) \text{rect}\left(\frac{y}{L}\right) \quad (2)$$

按照相位因子判断法可知透射波包含五列平面波,分别位于 XOZ 面和 YOZ 面上传播,第一列垂直于 XOY,第二三列和第三四列为两对共轭波,方向余弦分别为  $\cos \alpha$  和  $-\cos \alpha$

$$\begin{aligned} U_1(x, y) &= \frac{1}{2}; \\ U_2(x, y) &= \frac{m}{4} \exp(jk \cos \alpha \cdot x); \\ U_3(x, y) &= \frac{m}{4} \exp(-jk \cos \alpha \cdot x); \\ U_4(x, y) &= \frac{m}{4} \exp(jk \cos \alpha \cdot y); \\ U_5(x, y) &= \frac{m}{4} \exp(-jk \cos \alpha \cdot y) \end{aligned} \quad (3)$$

### 1.1 光栅的频谱

假设光栅面无限大,及由式(1)可写为

$$t(x, y) = \frac{1}{2} \{1 + m[\cos(2\pi f_0 x + \cos(2\pi f_0 y))]\} \quad (4)$$

其频域函数为

$$\begin{aligned} F(t(x, y)) &= \frac{1}{2} \{ \delta(f_x, f_y) + \frac{m}{2} \delta[(f_x - f_0), f_y] + \frac{m}{2} \delta[(f_x + f_0), f_y] + \frac{m}{2} \delta[f_x, (f_y - f_0)] + \frac{m}{2} \delta[f_x, (f_y + f_0)] \} \end{aligned} \quad (5)$$

将空频缩放因子  $f_x = \frac{x}{\lambda z}$ ,  $f_y = \frac{y}{\lambda z}$  带入式(5)可得

$$F(t(x, y)) = \frac{\lambda^2 z^2}{2} \{ \delta(x, y) + \frac{m}{2} \delta[(x - f_0 \lambda z), y] +$$

\*国家自然科学基金(50375011)和河南省杰出青年基金(02120001500)资助  
Tel:0551-2904629(15) Email:hjxia@hfut.edu.cn  
收稿日期:2006-02-10

$$\frac{m}{2}\delta[(x+f_0\lambda z),y]+\frac{m}{2}\delta[x,(y-f_0\lambda z)]+\frac{m}{2}\delta[x,(y+f_0\lambda z)] \quad (6)$$

由式(6)可以看出衍射频谱有 5 个  $\delta$  函数组成,五个谱值的位置为  $(0,0)$ 、 $(f_0\lambda z,0)$ 、 $(-f_0\lambda z,0)$ 、 $(0,f_0\lambda z)$ 、 $(0,-f_0\lambda z)$ ;光栅从无限到有限,其频谱函数从分立谱点到分立谱斑,这是由于光栅尺寸衍射产生的,但其位置不变,相对幅值不变.

### 1.2 频谱的光强分布

对  $U_0(x,y)$  进行傅里叶变换即可得到透射波的频谱,并带入  $f_x = \frac{x}{\lambda z}$ 、 $f_y = \frac{y}{\lambda z}$

$$F(U_0(x,y)) = \frac{L^2}{2} \left\{ \sin c\left(L\frac{x}{\lambda z}\right) \sin c\left(L\frac{y}{\lambda z}\right) + \frac{m}{2} \cdot \sin c\left(L\frac{y}{\lambda z}\right) \left[ \sin c\left(\frac{L}{\lambda z}(x-\lambda z f_0)\right) + \sin c\left(\frac{L}{\lambda z}(x+\lambda z f_0)\right) \right] + \frac{m}{2} \sin c\left(L\frac{x}{\lambda z}\right) \left[ \sin c\left(\frac{L}{\lambda z}(y-\lambda z f_0)\right) + \sin c\left(\frac{L}{\lambda z}(y+\lambda z f_0)\right) \right] \right\} \quad (7)$$

由式(7)可以看出单位平面波垂直入射正弦二维衍射光栅,得到五个衍射光斑,谱斑的宽度  $2\lambda z/L$  对于固定的衍射屏来说,与光栅的尺寸成反比. 根据夫琅和费衍射定义可得频谱域中的光强大小<sup>[7]</sup>

$$U(x,y) = \frac{\exp(jkz)}{j\lambda z} \exp(jk\frac{x^2+y^2}{2z}) \times F(U_0(x,y)) \quad (8)$$

将式(7)带入式(8),由式(9)计算光强

$$I(x,y) = U(x,y) \times U^*(x,y) \quad (9)$$

光栅的周期远远小于光栅的尺寸

$$2/L \ll f_0 \Rightarrow 2\lambda z/L \ll \lambda z f_0 \quad (10)$$

从而谱斑的宽度  $2\lambda z/L$  远小于相邻谱斑中心距离  $\lambda z f_0$ ,故算过程中交叉相可省略

$$I(x,y) = \frac{L^4}{4\lambda^2 z^2} \left\{ \sin^2\left(L\frac{x}{\lambda z}\right) \sin^2\left(L\frac{y}{\lambda z}\right) + \frac{m^2}{4} \sin^2\left(L\frac{y}{\lambda z}\right) \cdot \left[ \sin^2\left(\frac{L}{\lambda z}(x-\lambda z f_0)\right) + \sin^2\left(\frac{L}{\lambda z}(x+\lambda z f_0)\right) \right] + \frac{m^2}{4} \sin^2\left(L\frac{x}{\lambda z}\right) \cdot \left[ \sin^2\left(\frac{L}{\lambda z}(y-\lambda z f_0)\right) + \sin^2\left(\frac{L}{\lambda z}(y+\lambda z f_0)\right) \right] \right\} \quad (11)$$

$$I(x,0) = \frac{L^4}{4\lambda^2 z^2} \left\{ \sin^2\left(L\frac{x}{\lambda z}\right) + \frac{m^2}{4} \sin^2\left(\frac{L}{\lambda z}(x-\lambda z f_0)\right) + \sin^2\left(\frac{L}{\lambda z}(x+\lambda z f_0)\right) \right\} \quad (12)$$

$$I(0,y) = \frac{L^4}{4\lambda^2 z^2} \left\{ \sin^2\left(L\frac{y}{\lambda z}\right) + \frac{m^2}{4} \sin^2\left(\frac{L}{\lambda z}(y-\lambda z f_0)\right) + \sin^2\left(\frac{L}{\lambda z}(y+\lambda z f_0)\right) \right\} \quad (13)$$

$$\sin^2\left(\frac{L}{\lambda z}(y+\lambda z f_0)\right) \quad (13)$$

由式(11)~(13)可以进行二维光栅衍射特性的仿真,其空间及 XY 轴向光强分布仿真如图 1.

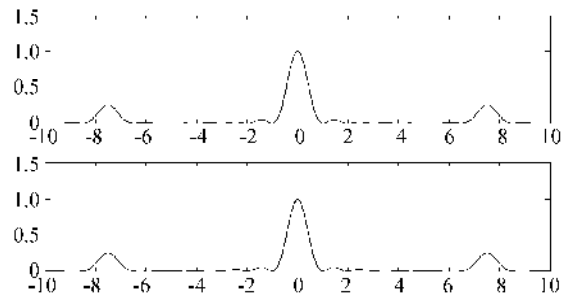
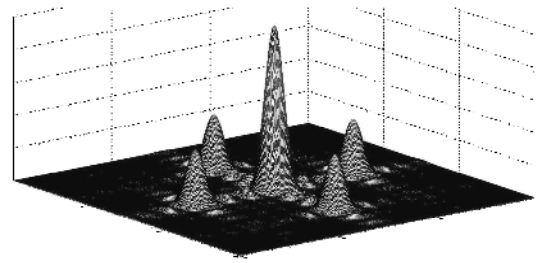


图 1 二维正弦衍射光栅衍射图样仿真图  
Fig.1 Simulated diffraction diagram of 2-D grating

## 2 二维衍射光栅精密测量原理

二维正弦衍射光栅分别在 XY 轴的  $\pm 1$  级衍射光可以用来精密测量一个平台在平面内的运动,如图 2. 一束激光照在光栅上产生衍射现象,当光栅在

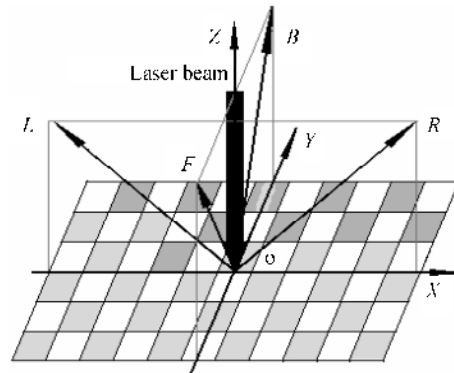


图 2 测量光束分布图  
Fig.2 Distribution of beam

平面内运动时,XY 轴上对称级别的衍射光束由于多普勒效应产生相移,假设光栅平面运动为

$$\mathbf{v} = v_x \mathbf{x} + v_y \mathbf{y} \quad (14)$$

对于 X 轴向的  $\pm 1$  级衍射光的频率为

$$f_{\pm 1} = f_t \pm \frac{v}{\lambda} \sin \theta \quad (15)$$

带入光栅方程

$$d(\sin \alpha + \sin \theta) = \pm \lambda \quad (16)$$

$\alpha$  为光束入射角,  $\theta$  为衍射光束的衍射角,  $d$  是光栅常量, 可得

$$f_{\pm 1} = f_t \pm \frac{\nu}{d} \quad (17)$$

$$\Delta f_{\pm} = 2 \times \frac{\nu}{d} \quad (18)$$

利用这两束对称衍射光干涉条纹<sup>[4]</sup>

$$I_{x(t)} = I_1 + I_2 \left( \cos 2\pi \int_0^t \Delta f_{\pm 1} dt \right) = I_1 + I_2 \cos \left( \frac{4\pi \Delta s_x}{d} \right) \quad (19)$$

同理

$$I_{y(t)} = I_1 + I_2 \cos \left( 2\pi \int_0^t \Delta f_{\pm 1} dt \right) = I_1 + I_2 \cos \left( \frac{4\pi \Delta s_y}{d} \right) \quad (20)$$

由式(19), (20)可以看出, 光栅在  $X$  或  $Y$  轴上每移动  $1/2$  个光栅周期, 干涉条纹就明暗变化一个周期, 在选用适当高线数的光栅的情况下, 例如选择  $1\,200$  线/mm 的光栅, 则  $XY$  轴向每移动  $1/2\,400$  mm, 干涉条纹就变化一个周期, 如果信号足够稳定, 从而可以通过电子技术实现高准确度的测量<sup>[8]</sup>.

### 3 测量系统的组成及误差分析

利用二维光栅进行精密二维微位移测量的结构如图 3. 半导体激光器通过扩束镜组把光斑适中的激光束垂直入射二维光栅, 把光栅衍射的空间四束对称光束通过反射镜与分光棱镜汇聚产生干涉条纹, 为了提高拍频信号质量, 在系统设计时设计两个偏振片获得正交的拍频干涉信号, 把正交的干涉条纹信号通过电子细分技术可以达到  $0.1\ \mu\text{m}$  的细分准确度.

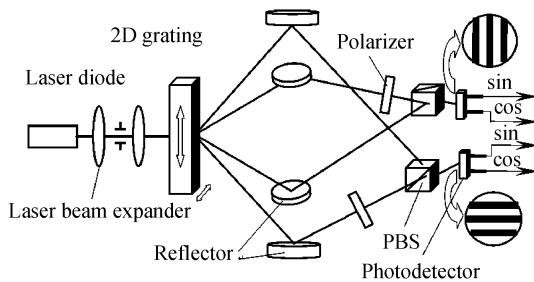


图 3 测量系统的组成

Fig. 3 Configuration of measurement system

考虑到系统轻便小巧和节省成本等因素, 在测量系统方案的设计中采用普通的半导体激光器, 但是半导体激光器输出功率不稳定, 单色性较差<sup>[9]</sup>; 同时光栅采用  $1\,200$  线/mm 的高线数光栅, 接近激光光波的波长; 而造成拍频信号等幅性较差、对比度降低、信噪比较高, 其实测条纹照片如图 4.

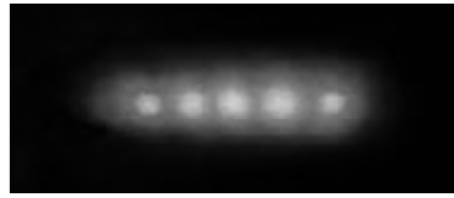


图 4 周期性干涉信号照片

Fig. 4 Photo of interference

为了减少环境的温度、湿度、空气扰动对测量结果的影响, 在测量结构设计时采用对称设计, 使光程差较小, 让环境对  $\pm 1$  级衍射光的影响基本相同, 但这种设计方案在光路调整时相对较为困难.

使用这种设计进行测量时, 必须首先标定二维平台的  $XY$  轴与光栅  $XY$  轴重合度, 实际测量中在保证平台和光栅  $XY$  轴一致的基础上, 让平台单一轴向运动, 记录  $XY$  方向数值, 多次测量后计算平台轴线和  $XY$  轴线的差值, 带入测量软件进行系统误差补偿. 该测量系统的主要误差来源是光栅带来的误差, 由于光栅是这种测量方法的基准元件, 所以光栅的刻划复制时产生的鬼线以及光栅热变形等都会对测试信号有影响. 鬼线强度的大小视光栅的质量而定. 质量优良的光栅鬼线强度很弱, 仅占母线强度的  $10^{-4}$  量级以下, 鬼线的影响非常小, 可以不必考虑鬼线对干涉条纹对比度的影响. 如果采用 K9 玻璃作为基底材料, 其  $\alpha = 1 \times 10^{-5} / ^\circ\text{C}$ , 当温度变化  $0.5^\circ\text{C}$  时, 对于  $25 \times 25$  mm 的光栅轴向变化为:  $\Delta l = \Delta t \times \alpha \times l = 12.5$  nm, 这种较大的影响可通过精确测量利用软件来补偿. 其次是二维运动不在同一平面内带来的误差, 由于这种测量系统对  $Z$  轴方向的运动远不如  $XY$  平面运动敏感, 所以在测量时要保持光栅的轴向运动要与入射光束保持垂直.

把该测量系统的测量结果与双频激光干涉仪比对, 在  $20 \times 20$  mm 的测量范围内连续进行三次测量, 经过相应的误差补偿后, 其偏差分布如图 5,  $X$

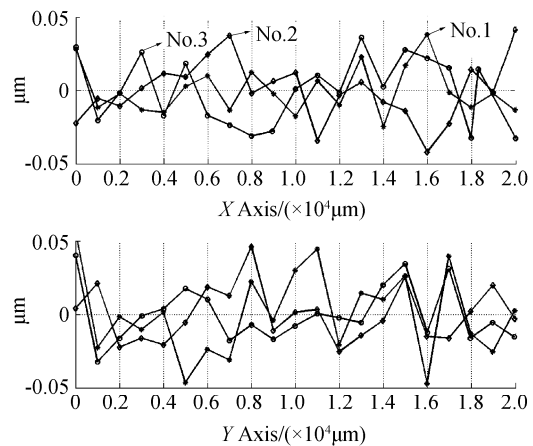


图 5 测量结果偏差分析

Fig. 5 Analysis of measurement's result's error

轴向运动与双频激光干涉仪的单点测量值的最大偏差为 75 nm, Y 轴向运动与双频激光干涉仪的单点测量值最大偏差为 96 nm, 实验表明, 由于光栅在加工刻划过程中 X, Y 轴的准确度并不一致, 以及由此造成光栅的衍射效率在两个方向有所差别造成其准确度差别的主要原因<sup>[10-11]</sup>.

## 4 结论

上述系统可以集成化, 做出轻便小巧的系统, 是获得高准确度分辨率的一种较为可行的方法, 可以在  $20 \times 20$  mm 的测量范围内实现双轴向单点测量值的偏差在  $0.1 \mu\text{m}$  以下的测试准确度. 该系统对环境要求比双频激光干涉仪要低, 并且结构简单, 稳定性较高. 由于光栅和激光光源成本较低, 整套系统的成本低廉. 是一种可实现精密测量与高准确度定位的可行方法.

### 参考文献

- [1] SPIES A. Linear and angular encoders for the high-resolution range[C]. *Proc of 9th IPES*. Braunschweig, Germany, 1997: 54-57.
- [2] THIEL J, SPANNER E. Interferential linear with 270 mm measuring length for nanometrology[OL], <http://www.automet.com/Heidenhain/techdata/thiel.html>.
- [3] TEIMEL A. Technology and applications of grating interferometer in high-precision measurement [J]. *Precision Engineering*, 1992, **14**(3):147-154.
- [4] JIANG Xiang-qian, LI Zhu, XIE Tie-bang. A theoretical investigation on topography measurement of curved surfaces using hologram grating interferometry[J]. *Journal of Huazhong University of Science & Technology*, 1994, **22**(2):60-63.  
将向前, 李柱, 谢铁邦. 全息光栅干涉法测量曲面形貌的理论研究[J]. 华中理工大学学报, 1994, **22**(2):60-63.
- [5] TETSUO Ohara. Scanning Probe Position Encoder (SPPE)-a new approach for a high precision and high speed position measurement system[OL]. <http://www.nanowave.com/SPIE paper web. pdf>, 2001.
- [6] WANG Xuanze, DONG Xiaohua, GUO Jun. Two-dimensional displacement sensing using a cross diffraction grating scheme [J]. *Journal of Optics A: Pure and Applied Optics*, 2004, **6**(1):106-111.
- [7] ZHU Shao-qi. Diffraction grating[M]. Beijing: China Metrology Publishing House, 1986:65-130.  
祝绍其. 衍射光栅[M]. 北京: 中国计量出版社, 1986:65-130.
- [8] YU Wen-xin, HU Xiao-tang, ZOU Zhi-qiang. Research on systematic error correction in grating-based nanometrology [J]. *Acta Metrologica Sinica*, 2002, **23**(2): 101-105.  
余文新, 胡小唐, 邹志强. 光栅纳米测量中的系统误差修正技术研究[J]. 计量学报, 2002, **23**(2):101-105.
- [9] ZHANG Ping, ZHENG Chang-bo. Measuring diffraction intensity using grating displacement sensor[J]. *Physical Experiment of College*, 2004, **24**(5):9-12.  
张萍, 郑长波. 用光栅式位移传感器测量衍射光强分布[J]. 物理实验, 2004, **24**(5):9-12.
- [10] MI Feng-wen, SHEN Yi-bing, YANG Guo-guang. A method to analyze effects of diffraction efficiency of diffraction optical element on the performance of hybrid optical system[J]. *Acta Photonica Sinica*, 2000, **29**(4):358-361.  
米凤文, 沈亦兵, 杨国光. 衍射光学元件衍射效率影响混合光学系统性能的一种分析方法[J]. 光子学报, 2000, **29**(4):358-361.
- [11] MI Feng-wen, SHEN Yi-bing, YANG Guo-guang. Research on the diffraction efficiency of grating for the second scalar analysis method[J]. *Acta Photonica Sinica*, 2000, **29**(5):436-439.  
米凤文, 沈亦兵, 杨国光. 光栅衍射效率的二阶标量近似法研究[J]. 光子学报, 2000, **29**(5):436-439.

## The 2-D Grating's Spectrum Analysis and Application in Precise Measurement

XIA Hao-jie<sup>1</sup>, FEI Ye-tai<sup>1</sup>, WANG Zhong-yu<sup>2</sup>

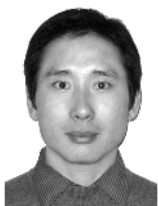
(1 School of Instrumentation Science and Photoelectricity Engineering, Hefei University of Technology, Hefei 23009, China)

(2 School of Instrumentation Science and Photoelectricity Engineering, Beihang University, Beijing 100083, China)

Received date: 2006-02-10

**Abstract:** The Fourier method was employed to analyze the spectrum of 2-D diffraction grating, the induced results were simulated in Matlab, and the simulation was verified by the experimental photo. On the basis of these results, 2-D diffraction grating used to measure 2-D displacements with high precision in nano-scale resolution, the structure using 2-D grating was given, interfere fringes were pictured, and the experimental results can meet the nano resolution measurement.

**Key words:** measurement; 2-D grating; spectrum analysis; displacement



**XIA Hao-jie** was born in 1979, and is a Ph. D. candidate in precision instrument and mechanics. His current research interests focus on precise detection and measurement and development of measurement instruments.