FΣ-Banach空间(Ⅰ)积分表示定理与图象测度空间

郑道朋

摘　　要

本文研究了 $F\Sigma$—测度的积分表示，经典扩张过程与图象测度空间。建立了 F—函数的 *Banach* 空间。

引　　言

Zadeh, Khalili, Klement 在[1—3]文中对 Fuzzy 测度及其积分表示的可能性作了细致研究。本文研究了 FΣ- 测度空间。本文第一节证明它是一种 Khalili 型的F-测度空间，并确定了它具有积分表示的一系列有趣的充要条件，推广了[3]文结果。本文第二节证明了 FΣ- 测度空间可唯一扩张成一种图象测度空间。于是图象测度空间上的经典积分立即构成了一种重要的 Fuzzy 积分。

当 FΣ- 测度空间正规时，图象测度空间即是正规 FΣ- 测度空间的伴生空间与[0,1]中的 Lebesgue 测度空间之经典乘积空间。

以 Watson, Freeling[6,7], Dubois[4] 在经济研究中获得的一类应用广泛的 Fuzzy 函数为原型，本文讨论了它的一般形式：曲线型的F-函数及其积分，建立了F-函数的积性运算及其 Banach 空间。

本文第四节继续了刘作述的有益研究，证明了 Fuzzy 符号测度的 Radon-Nikodym 导数形成伴生空间的 Radon-Nikodym 导数，给出了 Fuzzy 积分的 Jordan 分解定理的简化证明。

一、FΣ-测度空间的正规化

设 $F(X)$ 为论域 X 上不分明集全体所成的集合。我们常用大写拉丁字母 $A_i,\cdots,D_i$ 表不分明集（F-集），E_i，F_i 表经典集合。$\sigma\{E_\alpha|\alpha\in\mathscr{A}\}$ 表由类 $\{E_\alpha|\alpha\in\mathscr{A}\}$ 产生的σ-环。$\mathbf{M}(X,\sigma)$，$\mathbf{L}^1(X,\sigma,\mu)$ 各表可测空间 (X,σ)，测度空间 (X,σ,μ) 上的可测，可积函数类。

定义 1.1 设 $A_i,B_i\in\mathbf{F}(X)$，$x\in X$，$a\in[0,1]$，则

$(A\dot{\cup}B)(x)\triangleq 1\wedge(A(x)+B(x))$[4]，$(A\dot{\cap}B)(x)\triangleq 0\vee(A(x)+B(x)-1)$[4]，

$A\ominus B\triangleq A\dot{\cap}\bar{B}$，$\bar{A}(x)\triangleq 1-A(x)$，

本文于1982年12月31日收到

$\dot{\bigcup}_{i=1}^{\infty} A_i(x) \triangleq 1 \wedge \left(\sum_{i=1}^{\infty} A_i(x)\right)$，特别当$\{A_i\}$不相重时，即 $\sum_{i=1}^{\infty (n)} A_i \leqslant 1$时，记

$$\bigoplus_{i=1}^{\infty(n)} A_i \triangleq \dot{\bigcup}_{i=1}^{\infty(n)} A_i, \quad i \in \mathcal{N}.$$

定义 1.2 设 $\dot{\sigma} \subseteq \mathbf{F}(X)$，若有

(1) $1 \in \dot{\sigma}$， (3) 若 $A \in \dot{\sigma} \Rightarrow \bar{A} \in \dot{\sigma}$，

若$\{A_j\} \subseteq \dot{\sigma} \quad \Rightarrow \quad \dot{\bigcup}_{j=1}^{\infty} A_j \in \dot{\sigma}$，

就称 $\dot{\sigma}$ 为 $F\Sigma$-代数，$(\mathbf{F}(X), \dot{\sigma})$ 为 $F\Sigma$- 可测空间，

注意：若定义 $A \triangle B \triangleq (A \ominus B) \dot{\cup} (B \ominus A)$，则由于$\triangle$无结合律，$\dot{\cup}$无幂等律 $(\mathbf{F}(X), \triangle, \dot{\cup})$ 不构成 Boolean 环，故经典测度环理论不适用于 $(\mathbf{F}(X), \triangle, \dot{\cup})$。

定义 1.3 设 $(\mathbf{F}(X), \dot{\sigma})$ 是$F\Sigma$- 可测空间，映照 $\dot{\mu}: \dot{\sigma} \to [0, +\infty)$ 满足：

(1) $\dot{\mu}(0) = 0$；

(2) $\forall \{A_j\} \subseteq \dot{\sigma}$，$\{A_j\}$不相重，则

$$\dot{\mu}\left(\bigoplus_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \dot{\mu}(A_j) \quad (F\Sigma\text{-可加性})$$

此时称 $\dot{\mu}$ 为 $\dot{\sigma}$ 上 $F\Sigma$-测度。$(\mathbf{F}(X), \dot{\sigma}, \dot{\mu})$ 被称为 $F\Sigma$-测度空间或不相重测度空间。

显见，$F\Sigma$-可测空间，$F\Sigma$-测度空间各是经典可测空间，测度空间的直接推广，而且定义较 [2] 文简单。

定义 1.4 设 $(\mathbf{F}(X), \dot{\sigma})$ 是 $F\Sigma$-可测空间，若 $\forall a \in [0, 1]$ 有 $a \in \dot{\sigma}$，则称$(\mathbf{F}(X), \dot{\sigma})$ 是正规的 $F\Sigma$-可测空间。若 $F\Sigma$-测度空间的 $(\mathbf{F}(X), \dot{\sigma})$ 为正规的时，称这 $F\Sigma$-测度空间为正规的。

定理 1.1 (1) 若 $(\mathbf{F}(X), \dot{\sigma})$ 是 $F\Sigma$-可测空间，则 $(X, \dot{\sigma})$ 必是 Khalili 型的 F-可测空间[2]；若 $(\mathbf{F}(X), \dot{\sigma}, \dot{\mu})$ 是 $F\Sigma$-测度空间，则 $(X, \dot{\sigma}, \dot{\mu})$ 必是 Khalili 型 F-测度空间[2]；

(2) 设 $(\mathbf{F}(X), \dot{\sigma}, \dot{\mu})$ 是正规的 $F\Sigma$-测度空间，令 $\boldsymbol{\sigma} \triangleq \boldsymbol{\sigma}\{A^{-1}[0, a), X \mid a \in [0, 1], A \in \dot{\sigma}\}$，$\forall 1_E \in \dot{\sigma}$，令 $\mu(E) \triangleq \dot{\mu}(1_E)$，则必 $\boldsymbol{\sigma} = \{E \mid 1_E \in \dot{\sigma}\}$。$(X, \boldsymbol{\sigma}, \mu)$ 成为经典的全有限测度空间。$\dot{\sigma} \subseteq \mathbf{F}(X) \cap \mathbf{L}^1(X, \boldsymbol{\sigma}, \mu)$ 且 $\dot{\mu}(A) = \int_X A(x) d\mu(x)$。

证明 显然$\dot{\cup}$有结合律，设 $A_i, B_i \in \dot{\sigma}$，由于

$$A \vee B = A \oplus (B \ominus A) \in \dot{\sigma},$$

$$\bigvee_{i=1}^{\infty} A_i = \dot{\bigcup}_{i=1}^{\infty}\left[A_i \ominus \left(\bigvee_{j=1}^{i-1} A_j\right)\right] \in \dot{\sigma},$$

故 $(X, \dot{\sigma})$ 为Khalili 型的 F- 可测空间。

设 $(\mathbf{F}(X), \dot{\sigma}, \mu)$ 为 $F\Sigma$-测度空间，$A_i, B_i \in \dot{\sigma}$，由

$$\dot{\mu}(A \vee B) = \dot{\mu}(A) + \dot{\mu}(B \ominus A)$$

$$\dot{\mu}(A \wedge B) = \dot{\mu}(B \ominus (B \ominus A)) = \dot{\mu}(B) - \dot{\mu}(B \ominus A)$$

故 $\dot{\mu}(A \vee B) + \dot{\mu}(A \wedge B) = \dot{\mu}(A) + \dot{\mu}(B)$。其次令 $A_i \uparrow A_0$，利用 $F\Sigma$-可加性，

$$\dot{\mu}(A_n) = \sum_{i=1}^{n} \dot{\mu}\left[A_i \ominus \left(\bigvee_{j=1}^{i-1} A_j\right)\right]$$

$$\dot{\mu}(A_0) = \sum_{i=1}^{\infty} \dot{\mu}\left[A_i \ominus \left(\bigvee_{j=1}^{i-1} A_j\right)\right] = \lim_{n} \dot{\mu}(A_n).$$

利用对偶关系易证若 $B_i \downarrow B_0$，有 $\dot{\mu}(B_0)=\lim_n \dot{\mu}(B_i)$。因此，$(X,\dot{\sigma},\dot{\mu})$ 是 Khlili 型 F- 测度空间[2]。

为证结论(2)，首先注意到，对 $a\in[0,1]$，$1_E\in\dot{\sigma}$，$a\cdot 1_E=a\wedge 1_E$，而 $A\odot B=\overline{\bar{A}\dot{\cup}\bar{B}}$，故 $\dot{\sigma}$ 也闭于 $\odot$ 运算。$\forall a,b\in[0,1]$，$\forall A\in\dot{\sigma}$，

$$1_{A^{-1}[0,a)}=\bigvee_{n=1}^{\infty}\dot{\bigcup_{k=1}^{n}}[(\bar{A}\vee\bar{a})\odot a]\in\dot{\sigma},$$

$$1_{A^{-1}[0,a]}=\bigwedge_{n=1}^{\infty}1_{A^{-1}\left[0,\,a+\frac{1}{n}\right)}\in\dot{\sigma},$$

$$1_{A^{-1}(a,b]}=(1\odot\overline{1}_{A^{-1}[0,a]})\odot 1_{A^{-1}[0,b]}\in\dot{\sigma},$$

∴
$$\varphi_n=\bigvee_{i=1}^{2^n}\frac{i-1}{2^n}\cdot 1_{A^{-1}\left(\frac{i-1}{2^n},\ \frac{i}{2^n}\right)}\in\dot{\sigma}.$$

另方面，$\forall A\in\dot{\sigma}$，$\forall c\in R$，由

$$[X-A^{-1}(0)]\cap A^{-1}[-\infty,c)=\begin{cases}A^{-1}(0,1]\in\sigma, & c>1.\\ \bigcup_{n=1}^{\infty}A^{-1}\left(0,c-\frac{1}{n}\right]\in\sigma, & c\leqslant 1.\end{cases}$$

故 $A\in\mathbf{M}(X,\sigma)$。

要证 $\sigma=\{E|1_E\in\dot{\sigma}\}$：令 $\eta\triangleq\{E|1_E\in\dot{\sigma}\}$，显然 η 是 σ-代数，既然 $\eta\supseteq\{A^{-1}[0,a),X|a\in[0,1],\ A\in\dot{\sigma}\}$，从而 $\eta\supseteq\sigma$；反之，$\forall 1_E\in\dot{\sigma}$，$E=X-1_E^{-1}[0,\frac{1}{2}]\in\sigma$，故 $\eta\subseteq\sigma$，总之，$\eta=\sigma$。

最后，由[3]文定理1，利用 $\varphi_n\uparrow A$ 获得结论。

定理 1.2 $F\Sigma$-测度空间 $\mathbf{F}(X),\dot{\sigma},\dot{\mu})$ 是正规的充要条件是，存在全有限测度空间 (X,σ,μ) 使得，$\dot{\sigma}=\mathbf{L}^1(X,\sigma,\mu)\cap\mathbf{F}(X)$，且 $\forall A\in\dot{\sigma}$，$\dot{\mu}(A)=\int_X A(x)\,d\mu$。

证明 必要性即定理1，充分性是显然的。

定义 1.5 定理1.2中的 (X,σ,μ) 与 $(\mathbf{F}(X),\dot{\sigma},\dot{\mu})$ 被称为互为"伴生空间"。

我们记，$\mathbf{F}(X)$ 以 $d(A,B)\triangleq\bigvee_{x\in X}|(A\triangle B)(x)|=\bigvee_{x\in X}|A(x)-B(x)|$ 构成的完备距离空间为 $\mathscr{M}$。

定理 1.3 设 $(\mathbf{F}(X),\dot{\sigma},\dot{\mu})$ 是 $F\Sigma$-测度空间，则

(1) $\dot{\sigma}$ 构成 $\mathscr{M}$ 中的子完备距离空间。当其 d—$\lim_n A_n=A$ 时有 $\lim_n\dot{\mu}(A_n)=\dot{\mu}(A)$（$\dot{\mu}$ 在 $\mathscr{M}$ 上的连续性）。

(2) $(F(X),\dot{\sigma},\dot{\mu})$ 正规的充要条件是，$\exists\, a_n\in(0,1]$，$a_n\in\dot{\sigma}$，使 $\lim_n a_n=0$，

证明 若对 $f_n\in\dot{\sigma}$ 有 $\lim_{m,n\to\infty}d(f_n,f_m)=0$，首先我们有 $\exists f_0(x)\in\mathbf{F}(X)$，$\forall x\in X$，$\lim_n f_n(x)=f_0(x)$（处处收敛），

$$f_0(x)=\lim_k\bigvee_{n\geqslant K}f_n(x)=\bigwedge_{k=1}^{\infty}\bigvee_{n\geqslant K}f_n(x),$$

由

$$\bigwedge_{i=1}^{\infty}f_i(x)=\left(\overline{\bigvee_{i=1}^{\infty}\bar{f}_i}\right)(x),$$

易知 $\dot{\sigma}$ 闭于有限交和可列交。从而定理1.1之(1)推出 $f_0\in\dot{\sigma}$。

要证$\lim\limits_{n}\dot{\mu}(f_n)=\dot{\mu}(f_0)$：令

$H_n(x)\triangleq(f_n\vee f_0)(x)$，　　$Ln(x)\triangleq(f_n\wedge f_0)(x)$，

$h_n(x)\triangleq\bigvee\limits_{k=n}^{\infty}H_K(x)$，　　$l_n(x)\triangleq\bigwedge\limits_{k=n}^{\infty}L_K(x)$

∵　$|f_n(x)-f_0(x)|=[H_n(x)-f_0(x)]+[f_0(x)-L_n(x)]$

故

$$0\leqslant H_n(x)-f_0(x)\leqslant|f_n(x)-f_0(x)|$$
$$0\leqslant f_0(x)-L_n(x)\leqslant|f_n(x)-f_0(x)|$$
$$\lim_n H_n(x)=f_0(x),\quad \lim_n L_n(x)=f_0(x)$$

显见，$h_n(\cdot),l_n(\cdot)\in\dot{\sigma}$ 且 $h_n\uparrow$，$l_n\downarrow$ 及 $\forall x\in X$，$\forall n\in\mathcal{N}$，

$$h_n(x)\geqslant H_n(x)\geqslant f_0(x)\geqslant L_n(x)\geqslant l_n(x)$$

下面要证，$h_n\downarrow f_0$ 及 $l_n\uparrow f_0$。由于$\lim\limits_n f_n(x)=f_0(x)$，即 $\forall x\in X,\forall\varepsilon>0,\exists N(x,\varepsilon)\in\mathcal{N}$，当 $k,n\geqslant N(x,\varepsilon)$ 时有，

$$0\leqslant H_n(x)-f_0(x)\leqslant|f_n(x)-f_0(x)|<\varepsilon$$
$$0\leqslant f_0(x)-L_n(x)\leqslant|f_n(x)-f_0(x)|<\varepsilon,$$

从而

$$h_K(x)-f_0(x)=\bigvee_{n=K}^{\infty}(H_n(x)-f_0(x))\leqslant\varepsilon$$

$$f_0(x)-l_K(x)=\bigvee_{n=K}^{\infty}(f_0(x)-L_n(x))\leqslant\varepsilon。$$

故 $h_K\downarrow f_0$ 和 $l_K\uparrow f_0$。由定理 1.1 之 (1)

$$\dot{\mu}(f_0)=\lim_K\dot{\mu}(h_K)=\lim_K\dot{\mu}(l_K)$$

考虑到

$$l_n(x)\leqslant L_n(x)\leqslant f_n(x)\leqslant H_n(x)\leqslant h_n(x)$$

于是

$$\dot{\mu}(l_n)\leqslant\dot{\mu}(L_n)\leqslant\dot{\mu}(f_n)\leqslant\dot{\mu}(H_n)\leqslant\dot{\mu}(h_n)$$

即得，$\lim\limits_n\dot{\mu}(f_n)=\dot{\mu}(f_0)$，即结论 (1) 成立。

对结论 (2) 的必要性证明，根据定理 1.1，只要取 $A_n(x)=a_n=\dfrac{1}{n}$。

为证 (2) 的充分性，设 $\{a_n\}$ 符合充要条件，作 $\mathscr{A}\triangleq\left\{\dot{\bigcup\limits_{i=1}^{m}}a_n\,|\,m\in\mathcal{N},\ a_n\in\{a_n\}\right\}$注意 i 不出现在求和项中，有

$$d\left(\dot{\bigcup_{i=1}^{m}}a_n,\ \dot{\bigcup_{i=1}^{m+1}}a_n\right)\leqslant a_n$$

故$\mathscr{A}$在常属函数集中，按 d 稠密。由本定理的结论 (1)，$\dot{\sigma}$ 在$\mathscr{M}$中闭，于是 $\forall a\in[0,1]$，有 $a\in\dot{\sigma}$，即 $(\mathbf{F}(X),\dot{\sigma},\dot{\mu})$ 是正规的。

定理 1.4　设 $(\mathbf{F}(X),\dot{\sigma},\dot{\mu})$ 是 $F\Sigma$-测度空间，它是正规的充要条件为：

(1) $\forall A,B\in\dot{\sigma}$ 有 $A\cdot B\in\dot{\sigma}$（$\dot{\sigma}$ 为可乘的），和

(2) $\exists a\in(0,1)$ 有 $a\in\dot{\sigma}$.

正规和非正规的 $F\Sigma$-测度空间，虽然看来只相差一个常属函数集的包含，但它们间的巨大区别可通过下二例看清：

例 1.1 设 (X,σ,μ) 是全有限测度空间，作 $\dot{\sigma}\triangleq\left\{1_F\oplus\frac{1}{2}1_E \mid E,F\in\sigma,E\cap F=\phi\right\}$,

$$\dot{\mu}\left(1_F\oplus\frac{1}{2}1_E\right)\triangleq\mu(F)+\frac{1}{2}\mu(E),$$

则 $(\mathbf{F}(X),\dot{\sigma},\dot{\mu})$ 是非正规的 $F\Sigma$-测度空间，

例 1.1 不妨称为“二阶梯形函数的 $F\Sigma$-代数”而“n 阶梯形函数的$F\Sigma$-代数”就可足够精密地，近似刻划一些属函数，由此可见 $F\Sigma$-测度空间的较普遍意义。

例 1.2 设 (X,σ,μ) 为全有限测度空间，$\dot{\sigma}\triangleq\{1_E \mid \mathrm{E}\in\sigma\}$，$\dot{\mu}(1_E)\triangleq\mu(E)$，则$(\mathbf{F}(X),\dot{\sigma},\dot{\mu})$ 构成非正规的 $F\Sigma$-测度空间。

例 1.2 说明，$F\Sigma$-测度空间是经典测度空间的推广。易证下定理：

定理 1.5 设 $(X,\dot{\sigma},\dot{\mu})$ 是 Khalili 型 F-测度空间，若

(1) $\dot{\sigma}$ 闭于$\dot{\cup}$运算；

(2) 当 A,B 不相重时，$\dot{\mu}(A\oplus B)=\dot{\mu}(A)+\dot{\mu}(B)$，则 $(\mathbf{F}(X),\dot{\sigma},\dot{\mu})$是 $F\Sigma$-测度空间。

总之，正规 $F\Sigma$- 测度空间，因 $\dot{\sigma}$ 是可测函数集与 $\mathbf{F}(X)$ 之交集，而具有稠密性；非正规的 $F\Sigma$-测度空间却可以非常离散。

二、图 象 测 度 空 间

定义 2.1 设 $(\mathbf{F}(X),\dot{\sigma})$ 为 $F\Sigma$-可测空间，$\forall A,B\in\dot{\sigma}$,

$$(A(\cdot),B(\cdot)]\triangleq\{(x,y)\mid x\in X,y\in(A(x),B(x)]\}$$
$$[0(\cdot),B(\cdot)]\triangleq\{(x,y)\mid x\in X,y\in[0,B(x)]\}$$

在不引起误会时，$(A(\cdot),B(\cdot)],[0(\cdot),B(\cdot)]$ 也记成 $(A,B],[0,B]$，“Σ”表二二不交集合之并运算。

$$\dot{P}\triangleq\{(A,B],[0,B]\mid A,B\in\dot{\sigma}\}$$
$$\dot{R}(\dot{\sigma})\triangleq\left\{\sum_{i=1}^{n}I_i\mid I_i\in\dot{P}\right\}$$

定理 2.1 设 $(\mathbf{F}(X),\dot{\sigma})$ 是 $F\Sigma$- 可测空间，则 $\forall A,B,C,D\in\dot{\sigma}$ 有：

(1) $(A(\cdot),B(\cdot)]\cap(C(\cdot),D(\cdot)]=(A(\cdot)\vee C(\cdot),B(\cdot)\wedge D(\cdot)]$,

(2) $(A(\cdot),B(\cdot)]-(C(\cdot),D(\cdot)]=(A(\cdot),B(\cdot)\wedge C(\cdot)]+(A(\cdot)\vee D(\cdot),B(\cdot)]$,

(3) $\sum_{i=1}^{n}(A_i(\cdot),B_i(\cdot)]-\sum_{j=1}^{m}(C_j(\cdot),D_j(\cdot)]=\sum_{i=1}^{n}((A_i(\cdot),B_i(\cdot)]-\sum_{j=1}^{m}(C_j(\cdot),D_j(\cdot)])$

(4) $[0,B_1(\cdot)]-[0,B_2(\cdot)]=(B_2(\cdot),B_1(\cdot)]$,

(5) $[0,B_1(\cdot)]\cap[0,B_2(\cdot)]=[0,B_1(\cdot)\wedge B_2(\cdot)]$

(6) $[0,D(\cdot)]-(A(\cdot),B(\cdot)]=[0,D(\cdot)\wedge A(\cdot)]+(B(\cdot),D(\cdot)]$，且$\dot{R}(\dot{\sigma})$是$X\times[0,1]$中的集代数。

正象不利用 Borel 代数直接在区间上建立 Lsbesgue 积分是存在着困难的一样，直接在不相重测度空间 $(\mathbf{F}(X),\dot{\sigma},\dot{\mu})$ 上也难以建立积分。考虑到 $\mathbf{F}(X)$ 的图象都在 $X\times[0,1]$ 内，我们希望在 $X\times[0,1]$ 内，获得 $F\Sigma$-测度空间的某种形式的，唯一的扩张测度空间以便建立积

分。下述的图象测度空间是较适宜的一种形式。

定义 2.2 设 $(\mathbf{F}(X),\dot{\sigma},\dot{\mu})$ 是 $F\Sigma$-测度空间，$\forall A,B\in\dot{\sigma}$，令 $\bar{\mu}(A(\cdot),B(\cdot)]\triangleq\dot{\mu}(B\ominus A)$，

$$\forall E=\sum_{i=1}^{n}(A_i(\cdot),\ B_i(\cdot)]\in\dot{R}(\dot{\sigma}),\bar{\mu}(E)\triangleq\sum_{i=1}^{n}\bar{\mu}(A_i,B_i],$$

$$\forall E=[0,B(\cdot)]\in\dot{R}(\dot{\sigma}),\ \bar{\mu}(E)\triangleq\dot{\mu}(B)-\dot{\mu}(0)=\dot{\mu}(B)。$$

定义 2.3 $\forall(A,B]\in\dot{P}$，当 $A(x)<B(x)$，$x\in X$ 时称 $(A,B]$ 对 x 是真实的。记 $\mathbf{T}(A,B]\triangleq\{x|A(x)<B(x)\}$.

定理 2.2 设 $(\mathbf{F}(X),\dot{\sigma},\dot{\mu})$ 是 $F\Sigma$-测度空间，则 $\bar{\mu}$ 是集代数 $\dot{R}(\dot{\sigma})$ 上的全有限测度，

$$\bar{\mu}[0(\cdot),1(\cdot)]=\dot{\mu}(1)$$

证明 1) $\forall A_i,B_i\in\dot{\sigma}$，记 $I_i\triangleq(A_i,B_i]\in\dot{P}$，首先确定 $\bar{\mu}$ 定义，在 $\dot{P}$ 和 $\dot{R}(\dot{\sigma})$ 上的唯一确定性：

设 $(A,B]=\sum\limits_{i=1}^{\infty(n)}(A_i,B_i]$，$n\in\mathcal{N}$，这里 $\sum\limits_{i=1}^{\infty(n)}$ 表可列和或有限和。由 [5] 文 §8 Lebesgue 测度的性质，$\forall x\in\mathbf{T}(A,B]$，

$$A(x)+\sum_{i=1}^{\infty(n)}(B_i\ominus A_i)(x)=B(x)\leqslant 1$$

故

$$B\ominus A=\bigoplus_{i=1}^{\infty(n)}(B_i\ominus A_i)$$

利用 $\dot{\mu}$ 的 $F\Sigma$-可加性，

$$\bar{\mu}(A,B]=\dot{\mu}(B\ominus A)=\sum_{i=1}^{\infty(n)}\dot{\mu}(B_i\ominus A_i)=\sum_{i=1}^{\infty(n)}\bar{\mu}(A_i,B_i]\tag{2.2.1}$$

故 $\bar{\mu}$ 在 $\dot{P}$ 上唯一确定。

2) 要证 $\bar{\mu}$ 在 $\dot{R}(\dot{\sigma})$ 上唯一确定。设 $E\in\dot{R}(\dot{\sigma})$，

$$E=\sum_{i=1}^{n}I_i \text{ 及 } E=\sum_{j=1}^{m}I'_j,\ I_i,I'_j\in\dot{P},m,n\in\mathcal{N}.$$

则作

$$E=\sum_{i=1}^{n}\ \sum_{j=1}^{m}(I_i\cap I'_j)$$

由 (2.2.1) 式及 $I_i=\sum\limits_{j=1}^{m}(I_i\cap I'_j)$，

$$\bar{\mu}(I_i)=\sum_{j=1}^{m}\bar{\mu}(I_i\cap I'_j)$$

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\bar{\mu}(I_i)&=\sum_{i=1}^{n}\ \sum_{j=1}^{m}\bar{\mu}(I_i\cap I'_j)\\&=\sum_{j=1}^{m}\ \sum_{i=1}^{n}\bar{\mu}(I_i\cap I'_j)\\&=\sum_{j=1}^{m}\bar{\mu}(I'_j)\end{aligned}$$

故 $\bar{\mu}$ 在 $\dot{R}(\dot{\sigma})$ 上唯一确定。

3) $\bar{\mu}$ 在 $\dot{R}(\dot{\sigma})$ 上的可列可加性：设 $E,E_i\in\dot{R}(\dot{\sigma})$，$E=\sum\limits_{i=1}^{\infty}E_i$，且 $E=\sum\limits_{j=1}^{n}I_j$，

$$E_i=\sum_{k-1}^{m_i}I_{ik},n,m_i\in\mathcal{N},I_{ik},I_j\in\dot{P}$$

于是

$$\sum_{j=1}^{n}I_j=\sum_{i=1}^{\infty}\ \sum_{k-1}^{m_i}I_{ik}$$

$$I_j=I_j\cap E=\sum_{i=1}^{\infty}\ \sum_{k-1}^{m_i}(I_{ik}\cap I_i),$$

由 (2.2.1) 式，

$$\bar{\mu}(I_j)=\sum_{i=1}^{\infty}\ \sum_{k-1}^{m_i}\bar{\mu}(I_{ij}\cap I_j)$$

$$\begin{aligned}\infty>\bar{\mu}(E)&=\sum_{j=1}^{n}\bar{\mu}(I_i)\\&=\sum_{j=1}^{n}\ \sum_{i=1}^{\infty}\ \sum_{k=1}^{m_i}\bar{\mu}(I_{ik}\cap I_i)\\&=\sum_{i=1}^{\infty}\ \sum_{k=1}^{m_i}\ \sum_{k=1}^{n}\bar{\mu}(I_{ik}\cap I_i)\\&=\sum_{i=1}^{\infty}\ \sum_{k=1}^{m_i}\bar{\mu}(I_{ik})\\&=\sum_{i=1}^{\infty}\bar{\mu}(E_i).\end{aligned}$$

定理 2.3 设 $(\mathbf{F}(X),\dot{\sigma},\dot{\mu})$ 是 $F\Sigma$-测度空间，$\sigma(\dot{R}(\dot{\sigma})$ 是环 $\dot{R}(\dot{\sigma})$ 产生的σ—环，则在 $\sigma(\dot{R}(\dot{\sigma}))$ 上存在唯一的一个全有限测度 $\bar{\mu}$，使它在 $\dot{P}$ 上重合于 $\bar{\mu}$。

这个由 $F\Sigma$-测度空间 $(\mathbf{F}(X),\dot{\sigma},\dot{\mu})$ 唯一扩张成的，经典全有限测度空间 $(X\times[0,1],\sigma(\dot{R}(\dot{\sigma})),\bar{\mu})$，被称为“图象测度空间”。

证明 利用 [5] 文及测度的有限可加性，易证扩张测度在 $\dot{P}$ 上重合后必然在 $\sigma(\dot{R}(\dot{\sigma})$上相重合。

定理 2.4 设 $(\mathbf{F}(X),\dot{\sigma},\dot{\mu})$ 是正规 $F\Sigma$-测度空间，它的伴生空间为 (X,σ,μ)，记 $[0,1]$ 中 Borel 集类 δ 上的 Lebesgue 测度为 L，则经典测度空间 $(X\times[0,1],\sigma\times\delta,\mu\times L)$ 全同于图象测度空间 $(X\times[0,1],\sigma(\dot{R}(\dot{\sigma})),\bar{\mu})$。

证明 设 $A\in\dot{\sigma}$，令

$$\bar{\varphi}_{An}(x)=\sum_{i-1}^{2^n}\frac{i}{2^n}\cdot 1_{A^{-1}\left(\frac{i-1}{2^n},\ \frac{i}{2^n}\right]}(x),$$

则 $\bar{\varphi}_{An}(x)\downarrow A(x)$ 且在 X 上一致收敛。

$$\begin{aligned}(0,A]&=\lim_n(0,\bar{\varphi}_{An}]\\&=\lim_n\left(0,\sum_{i=1}^{2^n}\frac{i}{2^n}1_{A^{-1}\left(\frac{i-1}{2^n},\ \frac{i}{2^n}\right]}(\cdot)\right]\\&=\lim_n\sum_{i=1}^{2^n}A^{-1}\left(\frac{i-1}{2^n},\ \frac{i}{2^n}\right]\times\left(0,\frac{i}{2^n}\right]\end{aligned}$$

故 $(0,A]\in\sigma\times\delta$，从而

$$\sigma(\dot{R}(\dot{\sigma}))\leqslant\sigma\times\delta$$

其次，$\forall A\in\dot{\sigma}$，

$$\bar{\mu}(0,A]=\dot{\mu}(A)-\dot{\mu}(0)=\int_X A(x)\,d\mu(x)$$

$$=\lim_n\int_X\bar{\varphi}_{A_n}(x)d\mu(x)$$

$$=\lim_n\sum_{i=1}^{2^n}\frac{i}{2^n}\cdot\mu\left(A^{-1}\left(\frac{i-1}{2^n},\ \frac{i}{2^n}\right]\right)$$

$$=\lim\sum_{i=1}^{2^n}L\left(0,\frac{i}{2^n}\right]\cdot\mu\left(A^{-1}\left(\frac{i-1}{2^n},\ \frac{i}{2^n}\right]\right)$$

$$=\lim(\mu\times L)\left\{\sum_{i=1}^{2^n}A^{-1}\left(\frac{i-1}{2^n},\ \frac{i}{2^n}\right]\times\left(0,\frac{i}{2^n}\right]\right\}$$

$$=(\mu\times L)\left\{\lim_n\sum_{i=1}^{2^n}A^{-1}\left(\frac{i-1}{2^n},\ \frac{i}{2^n}\right]\times\left(0,\frac{i}{2^n}\right]\right\}$$

$$=(\mu\times L)(0,A].$$

最后要证 $\boldsymbol{\sigma}\times\boldsymbol{\delta}\subseteq\boldsymbol{\sigma}(\dot{R}(\dot{\boldsymbol{\sigma}}))$。由正规性，记

$$\boldsymbol{\sigma}_1=\boldsymbol{\sigma}\{E\times(0,\alpha],E\times[0,\alpha]\mid E\in\boldsymbol{\sigma},\alpha\in(0,1]\}$$

则 $\boldsymbol{\sigma}(\dot{R}(\dot{\boldsymbol{\sigma}}))\supseteq\boldsymbol{\sigma}_1$,另方面显然有

$$E\times\bigcup_{i=1}^{\infty}(\alpha_i,\ \beta_i]\in\boldsymbol{\sigma}_1$$

$$E\times((\alpha_1,\beta_2]-(\alpha_1,\beta_1])\in\boldsymbol{\sigma}_1$$

从而固定 $E\in\boldsymbol{\sigma}$ 后作出的 $\boldsymbol{\sigma}_2\triangleq\{G\mid E\times G\in\boldsymbol{\sigma}_1\}$ 是一个 $\boldsymbol{\sigma}$–环。于是

$$\boldsymbol{\sigma}_2\supseteq\boldsymbol{\delta},$$

$$\boldsymbol{\sigma}_1\supseteq\boldsymbol{\sigma}\{E\times F\mid E\in\boldsymbol{\sigma},F\in\boldsymbol{\delta}\}=\boldsymbol{\sigma}\times\boldsymbol{\delta}$$

$$\boldsymbol{\sigma}(\dot{R}(\dot{\boldsymbol{\sigma}}))\supseteq\boldsymbol{\sigma}\times\boldsymbol{\delta}.$$

定理 2.5 设 $(\mathbf{F}(X),\dot{\boldsymbol{\sigma}},\dot{\mu})$是正规 $F\Sigma$-测度空间，$F\in\boldsymbol{\sigma}(\dot{R}(\dot{\boldsymbol{\sigma}}))$，令$F(x_0)\triangleq\{(x_0,y)\mid(x_0,y)\in F\}$，称为$F$的 x_0 一截口，则 $L(F(\cdot))\in\dot{\boldsymbol{\sigma}}$ 且 $\bar{\mu}(F)=\dot{\mu}(L(F(\cdot)))$：换言之，$F$的 x-截口的Lebesgue 测度，作为一个X上属函数，必属于 $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$，而它的 $\dot{\mu}$ 测度则等于 $\bar{\mu}(F)$ 值。

证明 赖助于定理 2.4，本证明只要引用Fubini 定理就可完成。$\forall F\in\boldsymbol{\sigma}(\dot{R}(\dot{\boldsymbol{\sigma}}))$，由 $\boldsymbol{\sigma}(\dot{R}(\dot{\boldsymbol{\sigma}}))=\boldsymbol{\sigma}\times\boldsymbol{\delta}$,

$$\bar{\mu}(F)=\int_X L(F(x))\,d\mu(x)$$

$$L(F(x))\in\mathbf{L}^1(X,\boldsymbol{\sigma},\mu)\cap\mathbf{F}(X)=\dot{\boldsymbol{\sigma}}$$

$$\int_X L(F(x))\,d\mu(x)=\dot{\mu}(L(F(\cdot))).$$

（待续）

参考文献

[1] L.A.Zadeh, Probability measures of fuzzy events, J. Math. Anal. Appl., 23 (1968)421-427.

[2] S.Khalili, Fuzzy measures and mappings, J. Math. Anal. Appl., 68(1979) 92-99.

[3] E.P,Klement et al., Fuzzy probability measures, Fuzzy Sets and Systems, 5(1981)21-30.

[4] D.Dubois and H.Prade, Fuzzy Sets and Systems, (Academic Press Inc, New York, 1980).

[5] P.RHalmos, Measure Theory, Van Nostrand, New York, 1968.

[6] S.R.watson, et al., Fuzzy decision analysis, IEEE Trans. Syst., Man, Cybern., Vol. SMC-9,NO.1(1979)1-9.

[7] A.N.S.Freeling, Fuzzy sets and decision analysis, IEEE Trans. Syst., Man, Cybern., Vol. SMC.-10, No. 7(1980),341-354.

[8] 刘作述，Fuzzy 测度与积分理论，四川大学学报。2(1980)1.

[9] 刘作述，Fuzzy 测度与积分理论，四川大学学报。2(1981)7.

FΣ-measure Spaces and Its Banach Spaces (I): Representation Theorems and the Graph Measure Space

Zheng Daopeng

Abstract

With the purpose of studying a useful FΣ-measure space, we have proved that such a space is a F-measure space of the Khalili type in this paper, and the results in [3] have been extended therein to give some interesting necessary and sufficient conditions for the EΣ-measure to be a classical integral. We have also extended the FΣ-measure space of fuzzy sets to the graph measure space in an unique manner, and have concluded that the classical integrals should have become an important means for studying the theory of fuzzy sets. Particularly, in the case that the FΣ-measure space is a normal, we have proved that the graph measure space is the classical Cartesian product of the adjoint space of the normal FΣ-measure space and Lebesgue Space in [0,1].