第34卷第3期　　上海师范大学学报(自然科学版)　　Vol. 34, No. 3
2005年9月　　Journal of Shanghai Normal University (Natural Sciences)　　2005, Sep.

全直线上非线性BBM方程Cauchy问题解的存在唯一性

谌　德，向新民

(上海师范大学 数理信息学院，上海 200234)

摘　要：讨论了全直线上非线性BBM方程Cauchy问题解的存在唯一性．先用Galerkin方法建立与原问题相应的周期初值问题近似解的先验估计，由紧性方法得到周期初值问题的解，然后利用该近似解的先验估计与周期D无关的性质，由对角线选取方法及令$D \to \infty$得到原问题广义解的存在性．

关键词：非线性BBM方程；周期初值问题；紧致性原理

中图分类号：O175.1　　**文献标识码**：A　　**文章编号**：1000-5137(2005)03-0007-04

1　介　绍

BBM方程是数学物理中的重要方程，对于有界区域上BBM方程的初边值问题，不少作者进行过研究[1-4]．在本文中，我们将考虑如下的全直线上的非线性BBM方程的Cauchy问题：

$$\begin{cases} U_t - U_{xxt} - (U^{2n+1})_x = f(U) + \gamma U_{xx} + g(x,t), x \in \Lambda = (-\infty, +\infty), t > 0, & (1.1) \\ U(x,0) = U_0(x), & (1.2) \end{cases}$$

这里γ为正的常数，$f \in C^2$且满足$-\infty < -K \leqslant f' \leqslant b < -\gamma$（$K,b$为常数）及$f(0) = 0$，$(f(u), u) \leqslant b(u,u)$，$g(x,t)$满足$\sup_{t \in R^+} \| g(x,t) \|_{L^2(\Lambda)} < +\infty$ $(j = 0,1,2)$．

本文将证明(1.1)，(1.2)的解的存在唯一性．由于区域的无界性，不能像有界区域问题那样直接运用紧致性原理从Galerkin近似格式中得到收敛子列，我们运用[5]中的方法克服这一困难，即：先用Galerkin方法建立与原问题(1.1)，(1.2)相应的周期初值问题的近似解的先验估计，由紧性方法可得到周期初值问题广义解的存在性，然后，如果该近似解的先验估计与周期D无关，则由对角线选取方法及令$D \to \infty$就可得到(1.1)，(1.2)广义解的存在性．

2　主要结果

记$\Omega = [-D, D]$，用$(\cdot,\cdot)$和$\|\cdot\|$表$L^2(\Omega)$中的内积和范数，$(\cdot,\cdot)_k$和$\|\cdot\|_k$表$H^k(\Omega)$中的内积和范数．引入周期Sobolev空间$H^k_{per}(\Omega) = \{ v \in H^k_{loc}(R) \mid v(x+2D) = v(x) \}$，其中$\|\cdot\|_{H^k_{per}} = \|\cdot\|_k$[6]．

收稿日期：2004-12-02

基金项目：国家自然科学基金(10371077)；上海市教委科学技术发展基金(03DZ21)资助项目．

作者简介：谌德(1968－)，男，上海师范大学数理信息学院讲师；向新民(1941－)，男，上海师范大学数理信息学院教授，博士生导师．

考虑与 Cauchy 问题(1.1),(1.2)相应的如下周期初值问题:

$$\begin{cases} U_t - U_{xxt} - (U^{2n+1})_x = f(U) + \gamma U_{xx} + g(x,t), x \in \Lambda = (-\infty, +\infty), t > 0, & (2.1) \\ U(x+2D,t) = U(x,t), & (2.2) \\ U(x,0) = U_0(x). & (2.3) \end{cases}$$

先用 Galerkin 方法建立(2.1)~(2.3)的近似解及先验估计.

设 $w_j(j=1,2,\cdots)$ 是方程 $w''_j + \lambda_j w_j = 0$ 具周期边界条件 $w_j(x+D) = w_j(x-D)$ 对应于特征值 λ_j 的特征函数,并且设 $\{w_j(x)\}$ 组成 $L^2(\Omega)$ 的标准正交基. 考虑(2.1)~(2.3)的如下形式的近似解 $Z_m(x,t) = \sum_{j=1}^{m} \alpha_{jm}(t) w_j(x)$, $\alpha_{jm}(t)$ 满足下面的常微分方程组:

$$\begin{cases} (Z_{mt} - Z_{mxxt} - (Z_m^{2n+1})_x - f(Z_m) - \gamma Z_{mxx} - g, w_j) = 0, j = 1,2,\cdots,m, & (2.4) \\ Z_m|_{t=0} = Z_{0m}(x), & (2.5) \end{cases}$$

这里 $Z_{0m}(x) \xrightarrow{H^2(\Omega)} U_0(x)$.

引理 2.1 设 $U_0(x) \in H^1_{per}(\Omega)$,则存在与 m, D 无关的常数 M_1,使得 $\sup_{t \in R^+} \| Z_m(t) \|_1 \leqslant M_1$.

证明 (2.4)式乘以 $\alpha_{jm}(t)$ 并对 j 从 1 到 m 求和,得

$$(Z_{mt} - Z_{mxxt} - (Z_m^{2n+1})_x - f(Z_m) - \gamma Z_{mxx} - g, Z_m) = 0,$$

从而

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\| Z_m \|_1^2 = (f(Z_m), Z_m) - \gamma \| Z_{mx} \|^2 + (g, Z_m) \leqslant$$

$$b \| Z_m \|^2 - \gamma \| Z_{mx} \|^2 + (-\gamma - b)\| Z_m \|^2 + \frac{1}{2(-\gamma - b)} \| g \|^2,$$

即 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\| Z_m \|_1^2 + 2\gamma \| Z_m \|_1^2 \leqslant \frac{1}{-\gamma - b}\| g(x,t) \|^2$,由 Gronwall 不等式得

$$\| Z_m \|_1^2 \leqslant e^{-2\gamma t} \| Z_m(0) \|_1^2 + \frac{1 - e^{-2\gamma t}}{2\gamma(-\gamma - b)} \sup_{t \in R^+} \| g(x,t) \|^2,$$

取 $M_1 = \| U(0) \|_1^2 + \frac{1}{2\gamma(-\gamma - b)} \sup_{t \in R^+} \| g(x,t) \|^2$,即得欲证结论.

由嵌入定理知

引理 2.2 若 $U_0(x) \in H^1_{per}(\Omega)$,则存在与 m, D 无关的常数 M 使得 $\| Z_m \|_\infty \leqslant M$.

引理 2.3 设 $U_0(x) \in H^2_{per}(\Omega)$,则存在与 m, D 无关的常数 M_2 使得 $\sup_{t \in R^+} \| Z_m \|_2 \leqslant M_2$.

证明 将(2.1)与 $-Z_{mxx}$ 作 L^2 内积,并利用引理 2.1,2.2 得

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\|Z_{mx}\|^2 + \|Z_{mxx}\|^2) =$$

$$(2n+1)(Z_m^{2n} Z_{mx}, -Z_{mxx}) + (f(Z_m), -Z_{mxx}) - \gamma \|Z_{mxx}\|^2 + (g, -Z_{mxx}) \leqslant$$

$$(2n+1)M^{2n}(c_1 \|Z_{mx}\|^2 + \frac{\varepsilon}{(2n+1)M^{2n}} \|Z_{mxx}\|^2) + b\|Z_{mx}\|^2 - \gamma \|Z_{mxx}\|^2 + c_2 \|g\|^2 + \varepsilon \|Z_{mxx}\|^2,$$

即

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\|Z_{mx}\|^2 + \|Z_{mxx}\|^2) - b\|Z_{mx}\|^2 + (\gamma - 2\varepsilon)\|Z_{mxx}\|^2 \leqslant (2n+1)M^{2n}c_1 \|Z_{mx}\|^2 + c_2 \|g\|^2,$$

由 Gronwall 不等式及引理 2.1 即得欲证结论.

引理 2.4 设 $U_0(x) \in H^1_{per}(\Omega)$,则存在与 m, D 无关的常数 M_3 使得 $\| Z_{mt} \|_1 \leqslant M_3$.

证明 将(2.1)与 Z_{mt} 作 L^2 内积,并利用引理 2.1,2.2 得

$$\|Z_{mt}\|^2+\|Z_{mxt}\|^2=-(Z_m^{2n+1},Z_{mxt})+(f(Z_m),Z_{mt})-\gamma(Z_{mx},Z_{mxt})+(g,Z_{mxt})\leqslant$$
$$M^{2n}(c_3\|Z_m\|^2+\frac{\varepsilon}{M^{2n}}\|Z_{mxt}\|^2)+c_4\|f(Z_m)\|^2+\varepsilon\|Z_{mt}\|^2+c_5\|Z_{mx}\|^2$$
$$+\varepsilon\|Z_{mxt}\|^2+c_6\|g\|^2+\varepsilon\|Z_{mt}\|^2,$$

即

$$(1-3\varepsilon)\|Z_{mt}\|^2+(1-2\varepsilon)\|Z_{mxt}\|^2\leqslant c_3M^{2n}\|Z_m\|^2+c_4\|f(Z_m)\|^2+c_5\|Z_{mx}\|^2+c_6\|g\|^2,$$

利用引理2.1即得欲证结论.

引理2.5　若 $U_0(x)\in H^2_{per}(\Omega)$，则存在常数与 m，D 无关的 M_4 使得 $\|Z_{mt}\|_2\leqslant M_4$.

定理2.1　设 $U_0(x)\in H^2_{per}(\Omega)$，则(2.1)~(2.3)存在解 $U(t)\in L^\infty(0,T;H^2_{per}(\Omega))$.

证明　由引理2.1~2.5和紧致性原理，在 Z_m 中可选取子列 Z_{m_i} 使得

$$Z_{m_i}\text{在 } L^\infty(0,T;H^2)\text{ 弱}^*\text{ 收敛到 } U, \tag{2.6}$$
$$Z_{m_it}\text{在 } L^\infty(0,T;H^2)\text{ 弱}^*\text{ 收敛到 } U_t, \tag{2.7}$$
$$(Z_{m_i}^{2n+1})_x\text{在 } L^\infty(0,T;L^2)\text{ 中强收敛到}(U^{2n+1})_x, \tag{2.8}$$
$$f(Z_{m_i})\text{ 在 } L^\infty(0,T;H^1)\text{ 强收敛到} f(U). \tag{2.9}$$

事实上，

$$\|(Z_m^{2n+1})_x-(U^{2n+1})_x\|=(2n+1)\|Z_m^{2n}Z_{mx}-U^{2n}U_x\|=$$
$$(2n+1)\|Z_m^{2n}Z_{mx}-Z_m^{2n}U_x+Z_m^{2n}U_x-U^{2n}U_x\|\leqslant$$
$$(2n+1)\|Z_m^{2n}(Z_{mx}-U_x)\|+(2n+1)\|(Z_m^{2n}-U^{2n})U_x\|\to 0,$$
$$\|f(Z_{m_i})-f(U)\|_1=\|f'(\xi)(Z_{m_i}-U)\|_1\leqslant K\|Z_{m_i}-U\|_1\to 0.$$

在(2.4)中令 $m_i\to\infty$，得

$$(U_t-U_{xxt}-(U^{2n+1})_x-f(U)-\gamma U_{xx}-g,w_j)=0,$$

由于 $\{w_j(x)\}$ 是 $L^2(\Omega)$ 的标准正交基，故有

$$(U_t-U_{xxt}-(U^{2n+1})_x-f(U)-\gamma U_{xx}-g,v)=0,\ v\in L^2(\Omega),$$

在(2.5)中令 $m_i\to\infty$ 知 U 满足初始条件(2.3).

定理2.2　$U_0(x)\in H^2(\Lambda)$，则(1.1)，(1.2)存在唯一解 $U(t)\in L^\infty(R^+;H^2(\Lambda))$.

证明　由于上面关于近似解的先验估计与周期 D 无关，所以由对角线选取方法及令 $D\to\infty$，从定理2.1知(1.1)，(1.2)局部解的存在性，由前面的先验估计知道该局部解可以延拓为整体解.

下面证明解的唯一性. 设 $U(x,t)$，$\tilde U(x,t)$ 为(1.1)，(1.2)满足同一初始条件的两个解：

$$\begin{cases}U_t-U_{xxt}-(U^{2n+1})_x=f(U)+\gamma U_{xx}+g(x),\\ U(x,0)=U_0(x),\end{cases}$$

$$\begin{cases}\tilde U_t-\tilde U_{xxt}-(\tilde U^{2n+1})_x=f(\tilde U)+\gamma\tilde U_{xx}+g(x),\\ \tilde U(x,0)=U_0(x),\end{cases}$$

其中 $U_0(x)\in H^2(\Lambda)$. 由引理2.2知存在常数 M，使得这两个解满足 $\|U\|_\infty\leqslant M$，$\|\tilde U\|_\infty\leqslant M$. 令 $\tilde U-U=\Delta$，则易知 Δ 满足

$$\begin{cases}\Delta_t-\Delta_{xxt}-(\tilde U^{2n+1}-U^{2n+1})_x=(f(\tilde U)-f(U))+\gamma\Delta_{xx},\\ \Delta(0)=0.\end{cases}$$

将这个方程与 Δ 作 $L^2(\Lambda)$ 内积，得

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\Delta\|_1^2+(\Delta\cdot(\tilde U^{2n}+\tilde U^{2n-1}\cdot U+\cdots+U^{2n}),\Delta_x)\leqslant b\|\Delta\|^2-\gamma\|\Delta_x\|^2,$$

从而有

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\Delta\|_1^2 \leqslant (2n+1)\cdot M^{2n}\cdot\|\Delta\|_1^2 + (-b)\|\Delta\|_1^2 = \frac{1}{2}\widetilde{M}\|\Delta\|_1^2,$$

其中 $\widetilde{M} = 2(2n+1)M^{2n} - 2b$. 由 Gronwall 不等式,对任意 $t > 0$,有

$$\|\Delta(t)\|_1^2 \leqslant \|\Delta(0)\|_1^2 e^{\widetilde{M}t} = 0,$$

由此即得问题(2.1),(2.2)解的唯一性.

参考文献:

[1] BEJAMIN T B. The stability of solitary waves[J]. Proc Roy Soc London, Ser A, 1972, 328: 153 - 183.

[2] BONA J L. On the stability theory of solitary waves[J]. Proc Roy Soc London, Ser A, 1975, 344: 363 - 374.

[3] GUO Boling. Initial boundary value problem for one class of system of multi - dimensional inhomohenous GBBM equations [J]. Chin Ann Of Math, 8B(2), 1987, 225 - 238.

[4] SHANG Y D, GUO B L. Finite dimensional behavior for forced nonlinear Sobolev - Galpern equations[J]. Acta Math Appl Sinica, Enlish Series, 2004, 20(2): 247 - 256.

[5] 郭柏灵,丁时进. 自旋波和铁磁链方程[M]. 杭州:浙江科学技术出版社,2000. 275 - 292.

[6] TEMAM R. Infinete - dimensional dynamical systems in mechanics and physics[M]. 2nd ed, Springer - Verlag, 1997. 50 - 51.

The existence and uniqueness of the global solution for the cauchy problem for the nonlinear BBM equation on the whole line

CHEN De, XIANG Xin-min

(Mathmatics and Sciences College, Shanghai Normal University, Shanghai 200234, China)

Abstract: Studies the existence and uniqueness of the global solution to the Cauchy problem for the nonlinear BBM equation on the whole line. First we construct a periodic initial - value problem corresponding to the primitive problem by virtue of the Galerkin method, and obtain the prior estimation of the approximate solution. Using the method of compactness we get the solution of the periodic initial - value problem. Then we use the property that the prior estimation of the approximate solution is independent of the period D. By the diagonal method and letting $D \to \infty$, we get the existence to the general solution to the primitive problem.

Key words: nonlinear BBM equation; periodic initial problem; principle of compactness