第31卷第2期　　上海师范大学学报(自然科学版)　　Vol. 31, No. 2
2002年6月　　Journal of Shanghai Teachers University(Natural Sciences)　　Jun. 2002

# 广义对偶单纯形方法

陆宗元

(上海师范大学 数理信息学院，上海 200234)

**摘　要**：在已经得到的线性规划问题的基本解既不是原始问题的可行解，也不是对偶问题的可行解的情形下，介绍求解线性规划问题的广义对偶单纯形法，它是对偶单纯形法的推广，用此法迭代一次就可得到一个对偶可行解.

**关键词**：线性规划；对偶单纯形方法；广义对偶单纯形法

**中图分类号**：O221.1　　**文献标识码**：A　　**文章编号**：1000-5137(2002)02-0039-07

## 0 引　言

对极小化的标准形式的线性规划问题，如果约束等式的系数矩阵中已含有一个单位矩阵，但此单位矩阵的基所对应的基本解既不是可行解，也不是对偶可行解，通常的做法是在约束条件中再添加一个人工约束条件，得到原始问题的一个扩充问题，再对扩充问题迭代一次就可得到它的一个对偶可行解，然后再用对偶单纯形方法求解该扩充问题，从而得到原问题的解. 对这一类线性规划问题，当它满足某些条件时，可不必求解扩充问题，而直接对原问题迭代一次就可得到一个对偶可行解，然后再用对偶单纯形方法求得原问题的解.

本文仅对如下极小化的标准形式的线性规划问题进行论述.

$$\begin{aligned}
&\min_{s.t.} z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \\
&a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\
&a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\
&\qquad\qquad\qquad \vdots \\
&a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \\
&x_j \geqslant 0\ (j = 1,2,\cdots,n)\ .
\end{aligned} \tag{1}$$

**定义1**　在线性规划的标准形式中，如果约束等式左边的系数矩阵中，含有一个单位矩阵(约束等式右端的常数项不必全大于等于零)则称此线性规划为典则形式的线性规划.

**定义2**　$\lambda_j = c_B B^{-1} p_j - c_j$ 称为对应于基 $B$ 的变量 $x_j$ 的检验数. 其中 $p_j$ 为变量 $x_j$ 在约束等式中的系数列向量，$c_j$ 为 $x_j$ 在原始问题的目标函数中的系数.

**定义3**　对应于基 $B$ 所有变量的检验数 $\lambda_j (j = 1,2,\cdots,n)$ 都小于等于零，则此基 $B$ 对应的基本解称为正则解，此时基 $B$ 称为对偶可行基.

**收稿日期**：2001-01-12

**作者简介**：陆宗元(1944-)，男，上海师范大学数理信息学院副教授.

## 1 主要结果

若原始线性规则问题已化为如下的典则形式,为了简单起见,不妨设基变量为 $x_i(i=1,2,\cdots,m)$,且典则形式中的系数仍用 $a_{ij}$ 和 $b_j$ 来表示.

$$\begin{aligned}
&\min_{s.t.} z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \\
&x_1 + a_{1m+1}x_{m+1} + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\
&x_1 + a_{2\,m+1}x_{m+1} + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\
&\qquad\qquad\vdots \\
&x_1 + a_{m\,m+1}x_{m+1} + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \\
&x_j \geqslant 0\ (j = 1,2,\cdots,n).
\end{aligned} \tag{2}$$

**定理1** 在典则形式的线性规划问题(2)对应的单纯形表中,若 $\lambda_t > 0$,某一个 $a_{pt} < 0$,则以任一非基变量 $x_k$ 代替基变量 $x_p$,而其余基变量不变,得到的新基 $\bar{B}$ 不是对偶可行基.

**证明** (1) 以 $a_{pt}$ 为主元作旋转运算,于是以非基变量 $x_t$ 代替基变量 $x_p$ 得到新基 $\bar{B}$,

$$\bar{\lambda}_p = \frac{a_{pp}}{a_{pt}}(-\lambda_t) + \lambda_p = -\frac{\lambda_t}{a_{pt}} > 0 \quad (\because a_{pp} = 1,\ \lambda_p = 0),\ \therefore \bar{B} \text{ 不是对偶可行基}.$$

(2) 以 $a_{pk}(\neq 0)$ 为主元作旋转运算,于是以非基变量 $x_k$ 代替基变量 $x_p$ 得到新基 $\bar{B}$.

情形 a: 设 $\lambda_k>0\ (k\neq t)$.

若 $a_{pk}<0$,类似(1)可证得 $\bar{\lambda}_p>0$,$\therefore \bar{B}$ 不是对偶可行基.

若 $a_{pk}>0$,$\bar{\lambda}_t=\frac{a_{pt}}{a_{pk}}(-\lambda_k)+\lambda_t>0$,$\therefore \bar{B}$ 不是对偶可行基.

情形 b: 设 $\lambda_k<0$.

若 $a_{pk}<0$,$\bar{\lambda}_t=\frac{a_{pt}}{a_{pk}}(-\lambda_k)+\lambda_t>0$,$\therefore \bar{B}$ 不是对偶可行基.

若 $a_{pk}>0$,$\bar{\lambda}_p=\frac{a_{pp}}{a_{pk}}(-\lambda_k)+\lambda_p=\frac{-\lambda_k}{a_{pk}}>0$,$\therefore \bar{B}$ 不是对偶可行基.

情形 c: 设 $\lambda_k=0$.

$\because \lambda_t>0$,$B$ 不是对偶可行基,$\therefore$ 以非基变量 $x_k$ 代替基变量 $x_p$ 时 $\bar{\lambda}_t=\lambda_t$,因此得到的 $\bar{B}$ 也不是对偶可行基.

(3)若 $a_{pk}=0$,此时以非基变量 $x_k$ 代替基变量 $x_p$ 得到的 $\bar{B}$ 不是基,所以也不是对偶可行基.

**定理2** 在典则形式的线性规划问题(2)对应的单纯形表中,若所有的检验数 $\lambda_j$ 都大于等于零,而某个基变量 $x_p$ 所在行中,所有非基变量的系数都大于零.设 $\max\limits_{m+1\leqslant j\leqslant n}\{\frac{\lambda_j}{a_{pj}}|\lambda_j\geqslant 0,\ a_{pj}>0\}=\frac{\lambda_k}{a_{pk}}$,则由非基变量 $x_k$ 代替基变量 $x_p$,而其余基变量不变,所得的新基 $\bar{B}$ 必为对偶可行基.

**证明** $\because$ 所有非基变量的检验数 $\lambda_j\geqslant 0$,系数 $a_{pj}>0$,$j=m+1,m+2,\cdots,n$,$\max\limits_{m+1\leqslant j\leqslant n}\{\frac{\lambda_j}{a_{pj}}|\lambda_j\geqslant 0,\ a_{pj}>0\}=\frac{\lambda_k}{a_{pk}}$,$\frac{\lambda_j}{a_{pj}}\leqslant\frac{\lambda_k}{a_{pk}}$,$\lambda_j\leqslant\frac{a_{pj}}{a_{pk}}\lambda_k$,$j=m+1,m+2,\cdots,n$. 以 $a_{pk}$ 为主元作旋转运算,得到

$$\bar{\lambda}_j = \frac{a_{pj}}{a_{pk}}(-\lambda_k) + \lambda_j \begin{cases} \leqslant 0 & (j = m+1, m+2, \cdots, n) \\ = 0 & (j = 1,2,\cdots,p-1,p+1,\cdots,m) \end{cases}$$

$$\bar{\lambda}_p = \frac{a_{pp}}{a_{pk}}(-\lambda_k) + \lambda_p = \frac{-\lambda_k}{a_{pk}} \leqslant 0 \quad (\because \lambda_k \geqslant 0, a_{pk} > 0)$$

所以以 $a_{pk}$ 为主元作旋转运算,得到的新基 $\bar{B}$ 对应的基本解 $\bar{x}$ 为对偶可行解,新基 $\bar{B}$ 为对偶可行基.

**推论1** 在典则形式的线性规划问题(2)对应的单纯形表中,如果满足:

(1)所有的检验数 $\lambda_j$ 都大于等于零，而某个基变量 $x_p$ 所在行中,所有非基变量的系数都大于零. 设 $\max\limits_{m+1\leqslant j\leqslant n}\{\frac{\lambda_j}{a_{pj}}|\lambda_j\geqslant 0,\ a_{pj}>0\}=\frac{\lambda_k}{a_{pk}}$.

(2)若所有的常数项都大于等于零且 $=\min\limits_{1\leqslant i\leqslant m}\{\frac{b_i}{a_{ik}}|a_{ik}\geqslant 0\}=\frac{b_p}{a_{pk}}$,则由非基变量 $x_k$ 代替基变量 $x_p$,而其余基变量不变,得到的新基 $\bar{B}$ 必为最优基.

**定理3**　在典则形式的线性规划问题(2)对应的单纯形表中所有的 $\lambda_j(j=1,2,\cdots,n)$ 不全小于等于零,若对所有大于零的非基变量的检验数 $\lambda_j$,存在某个 $p$ 都有 $a_{pj}>0$.

设 $\max\limits_{m+1\leqslant j\leqslant n}\{\frac{\lambda_j}{a_{pj}}|\lambda_j>0,\ a_{pj}>0\}=\frac{\lambda_r}{a_{pr}}$, $\min\limits_{m+1\leqslant j\leqslant n}\{\frac{\lambda_j}{a_{pj}}|\lambda_j\leqslant 0,\ a_{pj}<0\}=\frac{\lambda_k}{a_{pk}}$,那末

(1) 若 $\frac{\lambda_r}{a_{pr}}\leqslant\frac{\lambda_k}{a_{pk}}$,则由非基变量 $x_r$(或 $x_k$)代替基变量 $x_p$,其余的基变量不变,得到的新基必 $\bar{B}$ 为对偶可行基.

(2) 若 $\frac{\lambda_r}{a_{pr}}>\frac{\lambda_k}{a_{pk}}$,则以任一非基变量 $x_t$ 代替基变量 $x_p$,其余基变量不变,得到的新基 $\bar{B}$ 不是对偶可行基.

**证明**　(1)情形1:以 $a_{pr}$ 为主元作旋转运算后得到 $\bar{\lambda}_j=\frac{a_{pj}}{a_{pr}}(-\lambda_r)+\lambda_j$, $j=1,2,\cdots,n$.

$1^\circ$作旋转运算后原非基变量的检验数 $\bar{\lambda}_j$:

(a) 当 $\lambda_j>0$: $\because a_{pj}>0$, $\frac{\lambda_r}{a_{pr}}\geqslant\frac{\lambda_j}{a_{pj}}$, $\frac{a_{pj}}{a_{pr}}\lambda_r\geqslant\lambda_j$, $\therefore\bar{\lambda}_j\leqslant 0$.

(b) 当 $\lambda_j\leqslant 0$: 若 $a_{pj}>0$, $\frac{\lambda_r}{a_{pr}}\geqslant\frac{\lambda_j}{a_{pj}}$, $\frac{a_{pj}}{a_{pr}}\lambda_r\geqslant\lambda_j$, $\therefore\bar{\lambda}_j\leqslant 0$. 若 $a_{pj}<0$, $\frac{\lambda_j}{a_{pj}}\geqslant\frac{\lambda_k}{a_{pk}}\geqslant\frac{\lambda_r}{a_{pr}}$, $\therefore\bar{\lambda}_j\leqslant 0$. 若 $a_{pj}=0$, $\bar{\lambda}_j=\lambda_j\leqslant 0$.

$2^\circ$作旋转运算后原基变量的检验数 $\bar{\lambda}_j$:

$$\bar{\lambda}_p=\frac{a_{pp}}{a_{pr}}(-\lambda_r)+\lambda_p=-\frac{\lambda_r}{a_{pr}}\leqslant 0,\ \bar{\lambda}_j=\lambda_j=0,\ j=1,2,\cdots,p-1,p+1,\cdots,m.$$

$\therefore$由非基变量 $x_r$ 代替基变量 $x_p$ 得到的新基 $\bar{B}$ 是对偶可行基.

情形2:以 $a_{pk}$ 为主元作旋转运算后得到 $\bar{\lambda}_j=\frac{a_{pj}}{a_{pk}}(-\lambda_k)+\lambda_j$, $j=1,2,\cdots,n$.

$1^\circ$作旋转运算后原非基变量的检验数 $\bar{\lambda}_j$:

(a) 当 $\lambda_j>0$: 由 $a_{pj}>0$, $\frac{\lambda_j}{a_{pj}}\leqslant\frac{\lambda_r}{a_{pr}}\leqslant\frac{\lambda_k}{a_{pk}}$, $\lambda_j\leqslant\lambda_k\frac{a_{pj}}{a_{pk}}$, $\therefore\bar{\lambda}_j\leqslant 0$.

(*b*) 当 $\lambda_j\leqslant 0$: 若 $a_{pj}>0$, $\frac{\lambda_j}{a_{pj}}\leqslant\frac{\lambda_k}{a_{pk}}$, $\lambda_j\leqslant\lambda_k\frac{a_{pj}}{a_{pk}}$, $\therefore\bar{\lambda}_j\leqslant 0$. 若 $a_{pj}<0$, $\frac{\lambda_j}{a_{pj}}\geqslant\frac{\lambda_k}{a_{pk}}$, $\lambda_j\leqslant\lambda_k\frac{a_{pj}}{a_{pk}}$, $\therefore\bar{\lambda}_j\leqslant 0$. 若 $a_{pj}=0$, $\bar{\lambda}_j=\lambda_j\leqslant 0$.

$2^\circ$作旋转运算后原基变量的检验数 $\bar{\lambda}_j$:

$$\bar{\lambda}_p=\frac{a_{pp}}{a_{pk}}(-\lambda_k)+\lambda_p=-\frac{\lambda_k}{a_{pk}}<0,\bar{\lambda}_j=\lambda_j=0,\quad j=1,2,\cdots,p-1,p+1,\cdots,m.$$

$\therefore$ 由非基变量 $x_k$ 代替基变量 $x_p$ 得到的新基 $\bar{B}$ 是对偶可行基.

(2) 若 $x_t=x_r$: 此时以 $a_{pr}$ 为主元作旋转运算, $\because a_{pk}<0$, $\frac{\lambda_r}{a_{pr}}>\frac{\lambda_k}{a_{pk}}$. $\therefore\ \bar{\lambda}_k=\lambda_k-\frac{a_{pk}}{a_{pr}}\lambda_r>0$.

若 $x_t=x_k$: 此时以 $a_{pk}$ 为主元作旋转运算, $\because a_{pr}>0$, $\frac{\lambda_r}{a_{pr}}>\frac{\lambda_k}{a_{pk}}$. $\therefore\ \bar{\lambda}_r=\lambda_r-\frac{a_{pr}}{a_{pk}}\lambda_k>0$.

若 $x_t\neq x_r$ 且 $x_t\neq x_k$: 如果 $a_{pt}=0$, 此时若由非基变量 $x_t$ 代替基变量 $x_p$,于是在原来的基 $B$ 中以非基变量 $x_t$ 的系数列向量代替变量 $x_p$ 的系数列向量得到的 $\bar{B}$ 不构成基,所以设 $a_{pt}\neq 0$,此时以 $a_{pt}$ 为主元作旋转运算后得到新的检验数 $\bar{\lambda}_j=\lambda_j-\frac{a_{pj}}{a_{pt}}\lambda_t$　$(j=1,2,\cdots,n)$.

情形(1):$\lambda_t<0$.

(a) $a_{pt}>0$, $\bar{\lambda}_p=\lambda_p-\frac{a_{pp}}{a_{pt}}\lambda_t=-\frac{\lambda_t}{a_{pt}}>0$.

(b) $a_{pt}<0$.

(i) 若$\frac{\lambda_t}{a_{pt}}=\frac{\lambda_k}{a_{pk}}$, $\because$ $\frac{\lambda_r}{a_{pr}}=\frac{\lambda_k}{a_{pk}}$, $\therefore$ $\frac{\lambda_r}{a_{pr}}=\frac{\lambda_t}{a_{pt}}$. 又$\because a_{pr}>0$, $\therefore\bar{\lambda}_r=\lambda_r-\frac{a_{pr}}{a_{pt}}\lambda_t>0$.

(ii) 若$\frac{\lambda_t}{a_{pt}}>\frac{\lambda_k}{a_{pk}}$, $\because a_{pk}<0$, $\therefore\bar{\lambda}_k=\lambda_k-\frac{a_{pk}}{a_{pt}}\lambda_t>0$.

情形(2): $\lambda_t>0$. 由题设必有 $a_{pt}>0$.

(a) 若$\frac{\lambda_t}{a_{pt}}>\frac{\lambda_r}{a_{pr}}$, $\because$ $\frac{\lambda_r}{a_{pr}}=\frac{\lambda_k}{a_{pk}}$, $\therefore$ $\frac{\lambda_t}{a_{pt}}>\frac{\lambda_k}{a_{pk}}$. $\bar{\lambda}_k=\lambda_k-\frac{a_{pk}}{a_{pt}}\lambda_t>0$, ($\because$ $a_{pk}<0$).

(b) 若$\frac{\lambda_t}{a_{pt}}<\frac{\lambda_r}{a_{pr}}$, $\because a_{pr}<0$, $\therefore\bar{\lambda}_r=\lambda_r-\frac{a_{pr}}{a_{pt}}\lambda_t>0$.

情形(3): $\lambda_t=0$, 以 $a_{pt}$为主元作旋转运算后得到的 $\bar{\lambda}_j=\lambda_j(j=1,2,\cdots,n)$. $\because$原来的 $\lambda_j(j=1,2,\cdots,n)$不全小于等于0. $\therefore\bar{\lambda}_j(j=1,2,\cdots,n)$ 也不全小于等于0.

同时由定理3的证明过程可得到如下推论.

**推论2** 在典则形式的线性规划问题(2)对应的单纯形表中,所有的检验数 $\lambda_j(j=1,2,\cdots,n)$ 都小于等于零,设 $\min\limits_{m+1\leqslant j\leqslant n}=\left\{\frac{\lambda_j}{a_{pj}}\mid a_{pj}<0\right\}=\frac{\lambda_k}{a_{pk}}$则由非基变量 $x_k$ 代替基变量 $x_p$,其余的基变量不变,得到的新基 $\bar{B}$ 必为对偶可行基.

**推论3** 在典则形式的线性规划问题(2)对应的单纯形表中,若存在某个 $p$、所有非基变量的系数都有 $a_{pj}>0$ $(j=m+1,m+2,\cdots,n)$,设 $\max\limits_{m+1\leqslant j\leqslant n}=\left\{\frac{\lambda_j}{a_{pj}}\mid\lambda_j>0,\ a_{pj}>0\right\}=\frac{\lambda_r}{a_{pr}}$, 则由非基变量 $x_r$ 代替基变量 $x_p$,其余的基变量不变,得到的新基 $\bar{B}$ 必为对偶可行基.

**推论4** 在典则形式的线性规划问题(2)对应的单纯形表中,若存在某个 $p$, 所有非基变量的系数都有 $a_{pj}>0$ $(j=m+1,m+2,\cdots,n)$, 设 $\max\limits_{m+1\leqslant j\leqslant n}=\left\{\frac{\lambda_j}{a_{pj}}\mid\lambda_j>0,\ a_{pj}>0\right\}=\frac{\lambda_r}{a_{pr}}$, 且所有的常数 $b_i\geqslant0$ $(i=1,2,\cdots,m)$, 而 $\min\limits_{1\leqslant i\leqslant m}\left\{\frac{b_i}{a_{ik}}\mid a_{ik}>0\right\}=\frac{b_p}{a_{pr}}$,则由非基变量 $x_r$ 代替基变量 $x_p$, 其余的基变量不变, 得到的新基 $\bar{B}$ 必为最优基.

## 2 应用举例

**例1** 求解下列线性规划.

$$\begin{aligned}&\min\limits_{s.t.} z=-3x_1+2x_2-x_3\\&x_1+x_2-x_3\geqslant4\\&2x_1+3x_2+x_3\leqslant20\\&3x_1+x_2+x_3\leqslant28\\&x_j\geqslant0\ (j=1,2,3).\end{aligned}$$

**解** 先将线性规划化为标准形式

$$\begin{aligned}&\min\limits_{s.t.} z=-3x_1+2x_2-x_3\\&-x_1-x_2+x_3+2x_4=-4\\&2x_1+3x_2+x_3+x_5=20\\&3x_1+x_2+x_3+x_6=28\\&x_j\geqslant0\ (j=1,2,\cdots,6).\end{aligned}$$

(a) 由文[3]定理3, ∵ $\max\limits_{1\leqslant i\leqslant 3}=\left\{\frac{b_i}{a_{i1}}\,|\,b_i<0,\ a_{i1}<0\right\}=\max\left\{\frac{-4}{-1}\right\}=4$. $\min\limits_{1\leqslant j\leqslant 3}=\left\{\frac{b_i}{a_{i1}}\,|\,b_i\geqslant 0,\ a_{i1}>0\right\}=\min\left\{\frac{20}{2},\frac{28}{3}\right\}=\frac{28}{3}$, $4<\frac{28}{3}$, ∴由非基变量 $x_1$代替基变量 $x_6$, 即以 $a_{31}=3$为主元作旋转运算可得到一个基本可行解.

(b) 再由本文的推论3 , ∵在表1的初始单纯形表中, $x_6$所在行的非基变量的系数都大于零, 且 $\max\limits_{j=1,2,3}\left\{\frac{\lambda_i}{a_{3j}}\,|\,\lambda_j>0,a_{3j}>0\right\}=\max\left\{\frac{\lambda_1}{a_{31}},\frac{\lambda_3}{a_{33}}\right\}=\max\left\{\frac{3}{3},\frac{1}{1}\right\}=1=\frac{\lambda_1}{a_{31}}$, ∴由非基变量 $x_1$代替基变量 $x_6$, 即以 $a_{31}=3$为主元作旋转运算必可得到一个对偶可行解.

∴综合(a)(b), 可知以 $a_{31}=3$为主元作一次迭代运算必可得到最优解. 具体的迭代运算见表1. 由最后的单纯形表可知最优解为 $x_1^*=(28/3,0,0)^T$. ∵在表1的最后的单纯形表中, 非基变量的检验数 $\lambda_3=0$, 所以, 以 $\bar{a}_{13}=4/3$为主元再作一次单纯形迭代可得到另一个最优解 $x_2^*=(8,0,4)^T$(迭代过程略). 因此该线性规划的最优解为 $x^*=\mu(28/3,0,0)^T+(1-\mu)(8,0,4)^T$, $\mu\in[0,1]$, 最优值为 $z^*=-28$.

表 1 例1的迭代表

| | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_6$ | $b_i$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_4$ | −1 | −1 | 1 | 1 | 0 | 0 | −4 |
| $x_5$ | 2 | 3 | 1 | 0 | 1 | 0 | 20 |
| $x_6$ | 3* | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 28 |
| $\lambda_j$ | 3 | −2 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $x_4$ | 0 | −2/3 | 4/3 | 1 | 0 | 1/3 | 16/3 |
| $x_5$ | 0 | 7/3 | 1/3 | 0 | 1 | −2/3 | 4/3 |
| $x_1$ | 1 | 1/3 | 1/3 | 0 | 0 | 1/3 | 28/3 |
| $\lambda_j$ | 0 | −3 | 0 | 0 | 0 | −1 | −28 |

## 参考文献:

[1] SRINATH L S. Linear Programming Principles and Applications[M]. Second Edition, Affiliated East-West Press Private Limited, 1982.

[2] 高旅端, 陈 志, 史明仁, 杨中华. 线性规划——原理与方法[M]. 北京: 北京工业大学出版社, 1989.

[3] 陆宗元. 关于单纯形方法的一点注记[J]. 上海师范大学学报(自然科学版), 2000, 29(4).

# A Generalized Dual Simplex Method

LU Zhong-yuan

(Mathematics & Science College, Shanghai Teachers University, Shanghai 200234, China)

**Abstract**: Presents a generalized dual simplex metjhod of directly solving a linear programming problem to which the basic solution is neither a feasible solution to the primal problem nor a feasible solution to the dual problem.

**Key words**: linear programing; dual simplex method; generalized