关于几乎处处连续的本性函数的可积性问题

戚民驹

(上海电机技术高等专科学校,上海 200240)

摘　要: 以勒贝格可测函数与几乎处处连续的本性函数几乎处处相等及零集上的积分等于零为前提,按照继承性,可求性,收敛性原则定义 $[a,b]$ 上几乎处处连续的本性函数的积分,引进一致局部可积与无穷断度点上积分一致收敛概念,给出函数可积的充要条件.

关键词: 几乎处处连续的本性函数;积分;积分一致收敛
中图分类号: O174.1　　**文献标识码**: A　　**文章编号**: 1000-5137(2004)01-0032-07

0　引　言

在《断度概念与积分》一文中作者证明了 $[a,b]$ 上任何一个几乎处处有限的勒贝格可测函数都与 $[a,b]$ 上的一个几乎处处连续的本性函数几乎处处相等,并将 $[a,b]$ 上的勒贝格积分问题简化为几乎处处连续函数的绝对可积问题(见文献[1]第6页). 我们讨论积分问题时都承认这样一个大前提:零集上的积分等于零. 根据这一前提,本文将对几乎处处连续的本性函数的可积性问题(非绝对可积,且无穷断度点为无限集)展开讨论.

1　积分的定义

首先约定 $\overline{\lim\limits_{x\to x_0}} f(x)$ 与 $\underline{\lim\limits_{x\to x_0}} f(x)$ 只要有一为 ∞,则 $f(x)$ 在 x_0 的间断度为 $+\infty$,并记 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 中所有这样的点为 $A_\infty=\{x \mid x\in[a,b], f(x)$ 在 x 处的间断度为 $\infty\}$. 因为 $f(x)$ 为几乎处处连续的本性函数,所以 A_∞ 为勒贝格零集,又因为 A_∞ 闭,所以 A_∞ 为闭零集,且 A_∞ 疏朗,但 A_∞ 未必是可数集. 另外,对于包含 A_∞ 的任一开集 O, $0<m(O)<\delta$, $f(x)$ 在 $[a,b]-O$ 上必有界. 因为当 $x\in[a,b]-O$, $f(x)$ 在 x 的间断度必有穷,而 $[a,b]-O$ 是有界闭集,若 $f(x)$ 在 $[a,b]-O$ 上无界,则有 $\{x_n\}\subset[a,b]-O$, $|f(x_n)|>n$, $n\in N$, 这样必有 $x^*\in[a,b]-O$, $f(x)$ 在 x^* 的间断度为 ∞,则 $x^*\in A_\infty$,导致矛盾.

由于我们讨论的积分比无界广义黎曼积分(无穷断度点为有限集)及勒贝格积分(可简化为几乎处处连续且绝对可积)更深入,当在某些限制条件下符合上述两种积分条件时自然应将已有结果继承下来.

收稿日期: 2003-07-10
作者简介: 戚民驹(1952　),男,上海电机技术高等专科学校副教授,研究方向为函数论.

(1) 记 $A_\infty^c = [a,b] - A_\infty$,则 A_∞^c开(端点考虑相对开区间). $A_\infty^c = \bigcup_{n=1}^{\infty}(a_n, b_n)$,其中 (a_n, b_n), $n = 1,2,\cdots$,为 A_∞^c的构成区间, $f(x)$ 要在 $[a,b]$ 上可积自然在各构成区间 (a_n, b_n) 内可积,并且内闭绝对可积(因为内闭有界)即对每一 (a_n, b_n) ,n $\in N$,存在 $\eta_n,\eta_n' > 0$,使 $\int_{a_n+\eta_n}^{b_n-\eta_n'} |f(x)| \mathrm{d}x$ 存在,并且

$$\lim_{\eta_n,\eta_n'\to 0}\int_{a_n+\eta_n}^{b_n-\eta_n'} f(x)\mathrm{d}x = \int_{a_n}^{b_n} f(x)\mathrm{d}x,$$

n $\in N$. 更进一步地对包含 A_∞的任一开集 O ,$0 < m(O) < \delta$, $f(x)$ 在 $[a,b] - O$ 上绝对可积,(因为勒贝格可测函数 $f(x)$ 在 $[a,b] - O$ 上有界).

(2) 当 $A_\infty \subset O = \bigcup_{i=1}^{\infty}(\alpha_i,\beta_i)$,这里 (α_i,β_i) $i \in N$,为开集 O 的构成区间 (注意 O 的构成区间与 A_∞^c的构成区间的区别).因为 A_∞为有界闭集,所以 O 的构成区间只需有限个区间就可覆盖 A_∞. A_∞^c的构成区间 (a_n, b_n), $n \in N$ 中,不被 O 完全包含也只有有限个(关于这个问题我们将在后面详细证明.),选取这有限个不被 O 完全包含的构成区间上的积分,作积分和式

$$\sum_j \int_{a_{n_j}}^{b_{n_j}} f(x)\mathrm{d}x = \int_{\bigcup_j (a_{n_j}, b_{n_j})} f(x)\mathrm{d}x ,$$

因为只有有限项并由(1)保证该积分和式有意义.取单调开集族$\{O_n\}$, $O = O_1 \supset \cdots O_n \supset O_{n+1} \supset \cdots \supset A_\infty$,先选不被 O_1完全包含的有限个构成区间,再选不被 O_2完全包含的有限个构成区间排在其后 (选过的不再重复选取), ,依次类推.设 $0 < m(O_n) < \delta_n$,令 $\lim_{n\to\infty}\delta_n = 0$,A_∞^c中不被 O_n完全包含的构成区间将随之增加直至A_∞^c的所有构成区间,积分和式则变为无限项相加.若 $f(x)$ 要在 $[a,b]$ 上可积,则按上述方法得到的积分和式自然可以求和,将其记作

$$\int_{\bigcup_{n=1}^{\infty}(a_n,b_n)} f(x)\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty}\int_{a_n}^{b_n} f(x)\mathrm{d}x .$$

(3) $f(x)$ 要在 $[a,b]$ 可积,由(2)得到的和式还应满足更一般的收敛条件:对任意 $\varepsilon > 0$,存在 $\delta > 0$,对任何开集 $O \supset A_\infty$, $O = \bigcup_{i=1}^{\infty}(\alpha_i,\beta_i)$,对于含 A_∞点的区间 (α_i,β_i) 任取两点 x_i, x_i', $\alpha_i \le x_i \le x_i' \le \beta_i$, $i \in N$ (当 $\alpha_i = x_i$, 且 $\beta_i = x_i'$表示$(x_i, x_i') = (\alpha_i,\beta_i)$;当 $\alpha_i < x_i < x_i' < \beta_i$,表示$(x_i, x_i') \subset (\alpha_i,\beta_i)$;当 $x_i = x_i'$,则$(x_i, x_i') = \phi$.) ,对一切含于 $\bigcup_{i=1}^{\infty}(x_i, x_i')$ 内的 $A_\infty^c = \bigcup_{n=1}^{\infty}(a_n, b_n)$ 的构成区间的部分或全部得到的积分和式

$$\int_{\bigcup_{i=1}^{\infty}(x_i,x_i')} f(x)\mathrm{d}x = \int_{A_\infty\cap[\bigcup_{i=1}^{\infty}(x_i,x_i')]} f(x)\mathrm{d}x + \sum_{n=1}^{\infty}\Big[\int_{(a_n,b_n)\cap[\bigcup_{i=1}^{\infty}(x_i,x_i')]} f(x)\mathrm{d}x\Big]$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\Big[\int_{(a_n,b_n)\cap[\bigcup_{i=1}^{\infty}(x_i,x_i')]} f(x)\mathrm{d}x\Big],$$

不管 $O \supset A_\infty$为何开集,不管在含 A_∞点的区间内 x_i, x_i'怎样选取,只要

$$m(O) = \sum_{i=1}^{\infty} m[(\alpha_i,\beta_i)] < \delta,\text{总有} \left|\int_{\bigcup_{i=1}^{\infty}(x_i,x_i')} f(x)\mathrm{d}x\right| < \varepsilon.$$

说明　(2)与(3)中的开集 O 只需有限个构成区间$O_k = \bigcup_{j=1}^{k}(\alpha_{i_j},\beta_{i_j})$ 就能包含 A_∞,因为 A_∞为有界闭集,由(1)保证 $f(x)$ 在 $O - O_k$上绝对可积,因此(x_i, x_i')只需有限个. A_∞^c也可能只有有限个构成区间,但为了叙述方便仍写成可数个.被积表达式中统一用 $\mathrm{d}x$ 表示,以后无特殊情况不再说明.

首先来证明对任何包含 A_∞ 的开集 O ,不被 O 完全包含的 A^c_∞ 的构成区间 (a_n, b_n), $n \in N$,只有有限个. 分两步证明.

1. 因为当 $A_\infty \subset O = \bigcup_{i=1}^{\infty}(\alpha_i, \beta_i)$, A_∞ 为有界闭集, 所以只要 O 的有限个构成区间, 不妨设 $O_k = \bigcup_{i=1}^{k}(\alpha_i, \beta_i) \supset A_\infty$. 记 $A^i_\infty = A_\infty \cap (\alpha_i, \beta_i)$,可证 A^i_∞ 是闭集, $i = 1, \cdots, k$. 为叙述方便,不妨设各区间从左至右排列. 由于 $(\alpha_{i-1}, \beta_{i-1}) \cap [\alpha_i, \beta_i] = \phi$, $2 \le i \le k$, $[\alpha_i, \beta_i] \cap (\alpha_{i+1}, \beta_{i+1}) = \phi$, $1 \le i \le k-1$,而 $A_\infty \cap [\alpha_i, \beta_i]$ (闭) $i = 1, \cdots, k$,但 $[\{\alpha_i\} \cup \{\beta_i\}] \cap A_\infty = \phi$ (因为 $\{\alpha_i\}$, $\{\beta_i\}$ $i = 1, \cdots, k$ 为覆盖 A_∞ 的有限个构成区间的端点) ,所以 $A_\infty \cap (\alpha_i, \beta_i) = A_\infty \cap [\alpha_i, \beta_i] = A^i_\infty$ (闭) $i = 1, \cdots, k$.　　2. $A^i_\infty \subset (\alpha_i, \beta_i)$ $i = 1, 2, \cdots, k$. 记 A^i_∞ 中最小点为: y_i ,最大点为: y'_i ($i = 1, 2, \cdots, k$) ,记 $\tau = \min_{1 \le i \le k}\{|\alpha_i - y_i|, |\beta_i - y'_i|\}$,显然 $\tau > 0$ (因为 (α_i, β_i) 开, A^i_∞ 闭). 当 $|b_n - a_n| < \tau/2$,那么 $(a_n, b_n) \subset O_k$, 但 $|b_n - a_n| \ge \tau/2$ 只有有限个. 因为 O_k 取定后, $\tau > 0$ 为定值,而 $m([a, b]) = b - a$. 事实上, (α_1, β_1) 中 A^1_∞ 的最小点:或者 $y_1 = a$ (这时 $a \in A_\infty$), 或者为 $[a, b_{n'}$)的右端点(这时 $[a, b_{n'})$ 为 A^c_∞ 最左边的构成区间,这里没写 $b_{n'} = b_1$ 是因为并不知道可数个构成区间从何开始为第一个.) ,而 A^1_∞ 的最大点 y'_1 与 A^2_∞ 的最小点 y_2 是 A^c_∞ 的一构成区间 (不被 O_k 包含) 的两个端点,依次类推, $\cdots$, (α_k, β_k) 中最大点 y'_k:或者 $y'_k = b$ (这时 $b \in A_\infty$) ,或者为 $(a_{n'}, b]$ 的左端点, 这时 $(a_{n'}, b]$ 为 A^c_∞ 最右边的构成区间. [证毕]

接下来证明,单调开集族 $\{O_n\}$, $O_1 \supset \cdots O_n \supset O_{n+1} \supset \cdots \supset A_\infty$,当 δ 无限趋于零时, A^c_∞ 中不被 O 完全包含的构成区间将随之增加直至 A^c_∞ 的所有构成区间. 任取一点 $x_0 \in [a, b]$,但 $x_0 \notin A_\infty$, 对任何 $x \in A_\infty$, 设 x 与 x_0 的距离全体为 D, $D = \{d(x, x_0) \mid x \in A_\infty\}$ A_∞ 非空(因为我们讨论的函数 $A_\infty \ne \phi$) ,下方有界($d(x, x_0) \ge 0$) ,必有下确界: $d^* \ge 0$. 但 $d^* = 0$,则 $x_0 \in A_\infty$ (因为 A_∞ 是有界闭集) ,与 $x_0 \notin A_\infty$ 矛盾,所以 $d^* > 0$. 又由 $\lim_{n\to\infty} m(O_n) = 0$,所以当 n 充分大以后,有 $m(O_n) < d^*/3$,这时 x_0 所在的构成区间(a_i^*, b_i^*) 必不被 O_n 完全包含. 又因为任何 $(a_i, b_i) \in A^c_\infty$ 都有这样的 x_0 ,所以,任何 (a_i, b_i) 当 n 充分大以后,一定不被 O_n 完全包含. □

定义 1 设 $f(x)$ 为 $[a, b]$ 上几乎处处连续的本性函数, 且 $f(x)$ 满足前面三个条件则称 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积,并且积分值

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\bigcup_{n=1}^{\infty}(a_n, b_n)} f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty}\int_{a_n}^{b_n} f(x)\,\mathrm{d}x .$$

2 积分的性质

利用积分定义很容易得到下列常用性质.

性质 1 $\int_a^b kf(x)\,\mathrm{d}x = k\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

性质 2 $\int_a^b [f(x) + g(x)]\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$.

性质 3 设 $a < c < b$,则 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

在讨论下面的积分重要性质时先介绍局部可积,一致局部可积和在 A_∞ 上积分一致收敛等概念.

定义 2 $f(x)$ 为 $[a, b]$ 上几乎处处连续的本性函数, $x_0 \in A_\infty$, 若存在 $\eta > 0$,使 $f(x)$ 在 $(x_0 - \eta, x_0 + \eta)$ 上可积, 则称 $f(x)$ 在 x_0 及其近旁局部可积;若存在公共的 $\eta > 0$,对任何 $x_0 \in A_\infty$, 使 $f(x)$ 在 $(x_0 - \eta, x_0 + \eta)$ 上可积,则称 $f(x)$ 在 A_∞ 及其近旁一致局部可积;类似地,若存在公共的 $\eta > 0$,对任何 a_n(或 b_n), a_n(或 b_n)为 A^c_∞ 构成区间的左(或右)端点,使 $f(x)$ 在 $(a_n - \eta, a_n + \eta)$ (或 $(b_n - \eta, b_n + \eta)$)上可积,则称 $f(x)$ 在 $\{a_n\}$(或 $\{b_n\}$)及其近旁一致局部可积.

定义 3 存在公共的 $\eta > 0$,对任何 $x_0 \in A_\infty$, $\lim_{\eta\to0}\int_{x_0}^{x_0+\eta} f(x)\,\mathrm{d}x = 0$ 与 $\lim_{\eta\to0}\int_{x_0-\eta}^{x_0} f(x)\,\mathrm{d}x = 0$, 则

称 $f(x)$ 在 A_∞上积分一致收敛;类似地,在 A^c_∞的各构成区间 (a_n, b_n) 的端点,若存在公共的 $\eta > 0$, $\lim\limits_{\eta\to 0}\int_{a_n}^{a_n+\eta} f(x)\mathrm{d}x = 0$ 与 $\lim\limits_{\eta\to 0}\int_{b_n-\eta}^{b_n} f(x)\mathrm{d}x = 0$,则称 $f(x)$ 在$\{a_n\}$上积分一致右收敛与 $f(x)$ 在$\{b_n\}$上积分一致左收敛.

注　$\lim\limits_{\eta\to 0}\int_{x_0}^{x_0+\eta} f(x)\mathrm{d}x = 0$ 与 $\lim\limits_{\eta\to 0}\int_{x_0-\eta}^{x_0} f(x)\mathrm{d}x = 0$,既表示 $f(x)$ 在 $(x_0 - \eta, x_0 + \eta)$ 上可积,又表示积分在 x_0处收敛. 所以, $f(x)$ 在 A_∞上积分一致收敛,必有 $f(x)$ 在 A_∞及其近旁一致局部可积.

现在我们讨论可积函数的一些重要性质.

定理 1　设 $f(x)$ 为 $[a, b]$ 上几乎处处连续的本性函数,若 $f(x)$ 满足前面的 3 个条件, 则

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|\int_{a_n}^{b_n} f(x)\mathrm{d}x\right| < +\infty$;

(2) 存在公共的 $\eta > 0$,对任何 $x_0 \in A_\infty$, $\lim\limits_{\eta\to 0}\int_{x_0}^{x_0+\eta} f(x)\mathrm{d}x = 0$ 与 $\lim\limits_{\eta\to 0}\int_{x_0-\eta}^{x_0} f(x)\mathrm{d}x = 0$;

特别, 在 A^c_∞的各构成区间 (a_n, b_n) 的端点, $\lim\limits_{\eta\to 0}\int_{a_n}^{a_n+\eta} f(x)\mathrm{d}x = 0$ 与 $\lim\limits_{\eta\to 0}\int_{b_n-\eta}^{b_n} f(x)\mathrm{d}x = 0$, 对 n $\in N$ 一致成立.

证明　①首先按照条件(2)的方法可得到一积分和式, 这时 A^c_∞的构成区间的顺序已确定. 再取定满足条件(3)的一个开集 O, 对 O 中包含 A_∞点的有限个构成区间$(\alpha_{i_j}, \beta_{i_j})$, $j = 1,2, \cdots, k$, 取 $x_{i_j} = y_j$(A^j_∞中的 最小点), $x'_{i_j} = y'_j$(A^j_∞中的最大点), $j = 1,2, \cdots, k$, 而 $O - O_k$的其余区间, 由条件(3)取 $x_i = x'_i$, 则$\left|\int_{\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}(x_i, x'_i)} f(x)\mathrm{d}x\right| < \varepsilon$. 记 $A^c_\infty(+)$ 为 A^c_∞的构成区间中 $\int_{a_n}^{b_n} f(x)\mathrm{d}x \geq 0$ 的区间($A^c_\infty(+)$ 按前面 A^c_∞的构成区间的顺序选取区间列的子列). 取 $A^c_\infty(+)$ 中的前 h 项构成区间的内闭区间作并集 $\bigcup\limits_{j=1}^{h}[a_{n_j} + \xi_j, b_{n_j} - \xi_j]$ (闭), 令 $O_h = O - \bigcup\limits_{j=1}^{h}[a_{n_j} + \xi_j, b_{n_j} - \xi_j]$ (开), 且由条件(3), 落入 O_h内的 A^c_∞的各构成区间的部分或全部得到的积分, 不管在 O_h中含 A_∞点的区间 (α'_i, β'_i) 内的 z_i, z'_i怎样选(O_h其余区间取 $z_i = z'_i$), 由于 $m(O_h) < m(O) < \delta$, 总有$\left|\int_{\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}(z_i, z'_i)} f(x)\mathrm{d}x\right| < \varepsilon$. 特别对 O_h中包含 A_∞的有限个构成区间 (α'_i, β'_i) $i = 1, 2, \cdots, k'$, 取 $z_i = y_i$, $z'_i = y'_i$, y_i, y'_i分别为 $A_\infty \cap (\alpha'_i, \beta'_i) = A_\infty \cap [\alpha'_i, \beta'_i]$ 的最小、大值, $i = 1, 2, \cdots, k'$. 比较 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}(z_i, z'_i)$ 与 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}(x_i, x'_i)$ 的取法, 不难发现 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}(x_i, x'_i) - \bigcup\limits_{i=1}^{\infty}(z_i, z'_i)$ 等于 $A^c_\infty(+)$ 的前 h 个构成区间中被 O 完全包含的那部分构成区间与 A_∞的子集的并集, $m(A_\infty) = 0$, 而零集上的积分为零. 所以

$$\begin{aligned}\left|\int_{\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}(x_i, x'_i) - \bigcup\limits_{i=1}^{\infty}(z_i, z'_i)} f(x)\mathrm{d}x\right| &= \left|\int_{\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}(x_i, x'_i)} f(x)\mathrm{d}x - \int_{\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}(z_i, z'_i)} f(x)\mathrm{d}x\right| \\ &\leq \left|\int_{\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}(x_i, x'_i)} f(x)\mathrm{d}x\right| + \left|\int_{\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}(z_i, z'_i)} f(x)\mathrm{d}x\right| < 2\varepsilon.\end{aligned}$$

令 $A^c_\infty(+)$ 的前 h 个构成区 间的个数 $h \to \infty$, 由于 $O \supset O_{h_1} \supset \cdots \supset O_{h_n} \supset \cdots \supset A_\infty$, 记 $A^c_\infty(+)$ 中被 O 完全包含的构成区间全体为: $E = \{(a_n, b_n) \mid (a_n, b_n) \in A^c_\infty(+)$, 且 $(a_n, b_n) \subset O\}$, 在 E 上的积分

$$\left|\int_E f(x)\mathrm{d}x\right| = \left|\sum_{(a_n, b_n)\in E}\int_{(a_n, b_n)} f(x)\mathrm{d}x\right| = \sum_{(a_n, b_n)\in E}\left|\int_{a_n}^{b_n} f(x)\mathrm{d}x\right| \leq 2\varepsilon.$$

但 $A^c_\infty(+)$ 中不被 O(已取定) 完全包含的区间只有有限个,所以

$$\left|\int_{A^c_\infty(+)} f(x)\,\mathrm{d}x\right| = \sum_{(a_n,b_n)\in A^c_\infty(+)} \left|\int_{a_n}^{b_n} f(x)\,\mathrm{d}x\right|$$

有界. 同理,记 $A^c_\infty(-)$ 为 A^c_∞ 的构成区间中 $\int_{a_n}^{b_n} f(x)\,\mathrm{d}x < 0$ 的所有构成区间,则

$$\sum_{(a_n,b_n)\in A^c_\infty(-)} \left|\int_{a_n}^{b_n} f(x)\,\mathrm{d}x\right|$$

有界. 所以,

$$\sum_{(a_n,b_n)\in A^c_\infty} \left|\int_{a_n}^{b_n} f(x)\,\mathrm{d}x\right| = \sum_{(a_n,b_n)\in A^c_\infty(+)} \left|\int_{a_n}^{b_n} f(x)\,\mathrm{d}x\right| + \sum_{(a_n,b_n)\in A^c_\infty(-)} \left|\int_{a_n}^{b_n} f(x)\,\mathrm{d}x\right|$$

有界,故(1)成立.

②由于 A_∞ 为有界闭集,对满足条件(3)的开集 O,只需 O 的有限个构成区间 $(\alpha_{i_j},\beta_{i_j})$, $j=1,2,\cdots,k$,就可覆盖 A_∞,记 A^j_∞, $j=1,2,\cdots,k$,中的最小、最大值分别为 y_j, y_j', $j=1,2,\cdots,k$,令 $\tau=\min\limits_{1\le j\le k}\{|\alpha_{i_j}-y_j|,|\beta_{i_j}-y_j'|\}$,取 $\eta=\tau$ 及 $\eta'=\tau$ 即可. 因为对每一 $x_0\in A_\infty$,其必落入某一 $(\alpha_{i_0},\beta_{i_0})$,相应地分别取 $x_{i_0}=x_0$, $x_{i_0}'=x_0+\eta$ (或 $x_{i_0}=x_0-\eta'$, $x_{i_0}'=x_0$),其余区间取 $x_i=x_i'$,这时,对一切 $x_0\in A_\infty$,都有 $\left|\int_{x_0}^{x_0+\eta} f(x)\,\mathrm{d}x\right|<\varepsilon$ (或 $\left|\int_{x_0-\eta}^{x_0} f(x)\,\mathrm{d}x\right|<\varepsilon$). □

显然存在 $\eta>0$,对一切 $x_0\in A_\infty$, $\lim\limits_{\eta\to0}\int_{x_0}^{x_0+\eta} f(x)\,\mathrm{d}x=0$ 与 $\lim\limits_{\eta\to0}\int_{x_0-\eta}^{x_0} f(x)\,\mathrm{d}x=0$ 都成立,必有 $f(x)$ 在 A^c_∞ 的各构成区间 (a_n,b_n) 的端点,使 $\lim\limits_{\eta\to0}\int_{a_n}^{a_n+\eta} f(x)\,\mathrm{d}x=0$ 与 $\lim\limits_{\eta\to0}\int_{b_n-\eta}^{b_n} f(x)\,\mathrm{d}x=0$, $n\in N$,一致成立. 但反过来未必成立. 若后者再加上条件: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|\int_{a_n}^{b_n} f(x)\,\mathrm{d}x\right|<+\infty$,便有下面的定理2.

定理2　设 $f(x)$ 为 $[a,b]$ 上几乎处处连续的本性函数,若 $f(x)$ 满足: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|\int_{a_n}^{b_n} f(x)\,\mathrm{d}x\right|<+\infty$,且在 A^c_∞ 的各构成区间 (a_n,b_n) 的端点,有 $\lim\limits_{\eta\to0}\int_{a_n}^{a_n+\eta} f(x)\,\mathrm{d}x=0$ 与 $\lim\limits_{\eta\to0}\int_{b_n-\eta}^{b_n} f(x)\,\mathrm{d}x=0$, $n\in N$,一致成立,则必存在公共的 $\eta>0$,对一切 $x_0\in A_\infty$ 都有 $\lim\limits_{\eta\to0}\int_{x_0}^{x_0+\eta} f(x)\,\mathrm{d}x=0$ 与 $\lim\limits_{\eta\to0}\int_{x_0-\eta}^{x_0} f(x)\,\mathrm{d}x=0$.

证明　由 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|\int_{a_n}^{b_n} f(x)\,\mathrm{d}x\right|$ 在 $[a,b]$ 上收敛,对任意 $\varepsilon/4>0$,存在 $N>0$,当 $n>N$,有

$$\sum_{n=N+1}^{\infty}\left|\int_{a_n}^{b_n} f(x)\,\mathrm{d}x\right|<\varepsilon/4,$$

记 $\sum\limits_{n=N+1}^{\infty} m[(a_n,b_n)]=\delta_1$;再由存在公共的 $\eta>0$,对 A^c_∞ 的各构成区间 (a_n,b_n),有

$$\lim_{\eta\to0}\int_{a_n}^{a_n+\eta} f(x)\,\mathrm{d}x=0$$

与

$$\lim_{\eta\to0}\int_{b_n-\eta}^{b_n} f(x)\,\mathrm{d}x=0,$$

$n\in N$,一致成立. 对上述 $\varepsilon/4>0$,存在公共的 $\eta>0$,对一切 $(a_n,a_n+\eta)$ 及 $(b_n-\eta,b_n)$, $n\in N$,有

$$\left|\int_{a_n}^{a_n+\eta} f(x)\,dx\right| < \varepsilon/4,$$

$$\left|\int_{b_n-\eta}^{b_n} f(x)\,dx\right| < \varepsilon/4,$$

记 $\delta_2 = \eta/3$;再记前 N 个构成区间中最短长度的一半为δ_3. 令 $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\}$,当 x_0为 A_∞的聚点, $f(x)$ 在 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 可积,因为在此邻域内必有 A^c_∞的构成区间(a_n, b_n),无论左侧和右侧都有 $x_0 \in (a_n, a_n + \eta)$, $x_0 \in (b_n' - \eta, b_n')$,而 $f(x)$ 在$(a_n, a_n + \eta)$ 与$(b_n' - \eta, b_n')$ 局部可积,得 $f(x)$ 在$(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 可积. 当 $x_0 < x_1 < x_2 < x_0 + \delta$,有

$$\begin{aligned}\left|\int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx\right| &\le \left|\int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx\right| + \left|\int_{x_0}^{x_2} f(x)\,dx\right| \\ &\le \left|\int_{x_0}^{a_{n_1}} f(x)\,dx\right| + \left|\int_{a_{n_1}}^{x_1} f(x)\,dx\right| + \left|\int_{x_0}^{a_{n_2}} f(x)\,dx\right| + \left|\int_{a_{n_2}}^{x_2} f(x)\,dx\right| \\ &\le \varepsilon/4 + \varepsilon/4 + \varepsilon/4 + \varepsilon/4 = \varepsilon,\end{aligned}$$

其中: $x_i \in (a_{n_i}, b_{n_i})$, $i = 1,2$. 当 x_0为 A_∞的孤立点自然成立. 对 $x_0 - \delta < x_1 < x_2 < x_0$同理.

□

定理 3　设 $f(x)$ 为 $[a,b]$ 上几乎处处连续的本性函数,若 $f(x)$ 在 A_∞上积分一致收敛, 则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上必可积.

证明　$f(x)$ 在 A_∞上积分一致收敛,则存在公共的 $\eta > 0$,对任何 $x_0 \in A_\infty$, $f(x)$ 在 $(x_0 - \eta, x_0 + \eta)$ 上可积,则开区间族 $\bigcup_{x_0 \in A_\infty}(x_0 - \eta, x_0 + \eta) \supset A_\infty$(有界闭集),必有有限个开区间覆盖 A_∞, $\bigcup_{i=1}^{k}(x_i - \eta, x_i + \eta) \supset A_\infty$,而 $f(x)$ 在这 k 个开区间上都可积(k 为定数), $f(x)$ 在 $[a,b] - \bigcup_{i=1}^{k}(x_i - \eta, x_i + \eta)$ 上有界,必可积. 记 $H_i = (x_i - \eta, x_i + \eta)$, $i = 1,2,\cdots,k$; $H_{k+1} = [a,b] - \bigcup_{i=1}^{k}(x_i - \eta, x_i + \eta)$. 对任意 $\varepsilon/(k+1) > 0$, 存在 $\delta_i > 0$, $i = 1,2,\cdots,k,k+1$,对任何开集 $O_i \supset A^i_\infty$, $i = 1,2,\cdots,k$,及$[a,b] - \bigcup_{i=1}^{k}(x_i - \eta, x_i + \eta)$中的开集 O_{k+1},只要 $m(O_i) < \delta_i$, $i = 1,2,\cdots,k,k+1$,不管 O_i, $i = 1,2,\cdots,k,k+1$,为何开集,不管在含 A_∞点的区间内如何取点(不含 A_∞点的区间内取点相同),都有

$$\left|\int_{\bigcup_j (x_{i,j}, x'_{i,j})} f(x)\,dx\right| < \varepsilon/(k+1),\ i = 1,2,\cdots,k,k+1,$$

取 $\delta = \min_{1 \le i \le k+1}\{\delta_i\}$,对任何开集 $O \supset A_\infty$, 不管为何开集,不管在含 A_∞点的区间内如何取点, 当 $m(O) < \delta$,都有

$$\left|\int_{\bigcup_{j=1}^{\infty}(x_j, x_j')} f(x)\,dx\right| < \sum_{i=1}^{k+1}\left|\int_{[\bigcup(x_j, x_j')] \cap H_i} f(x)\,dx\right| < \varepsilon. \quad □$$

由积分定义与前面 3 个定理,立刻得到下面的重要推论.

推论 1　$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积的充要条件是 $f(x)$ 满足: $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\int_{a_n}^{b_n} f(x)\,dx\right| < +\infty$, 且存在公共的 $\eta > 0$,在 A^c_∞的各构成区间 (a_n, b_n) 的端点,有 $\lim_{\eta \to 0}\int_{a_n}^{a_n+\eta} f(x)\,dx = 0$ 与 $\lim_{\eta \to 0}\int_{b_n-\eta}^{b_n} f(x)\,dx = 0$, $n \in N$, 一致成立.

推论 2　$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积的充要条件是 $f(x)$ 在 A_∞上积分一致收敛.

参考文献:

[1] 戚民驹.断度概念与积分[J].高等数学通报,2001(39):2-8.
[2] 陈建功.实函数论[M].北京:科学出版社,1958.
[3] 夏道行,等.实变函数论与泛函分析(上册)[M].北京:人民教育出版社,1978.
[4] 周性伟.实变函数[M].北京:科学出版社,1998.

The Discussion of The Integrability Problems on the Almost Everywhere Continuous Essential Functions

QI Min-ju
(Shanghai College Of Electricity Machinery Technology, Shanghai, 200240, China)

Abstract: Based on the two premises that Lebesgue measurable functions are equated almost everywhere with the almost everywhere continuous essential functions and that the integral on the zero set is equal to zero, according to the principles of inheritance, evaluation, convergence, the integral of the essential functions which are continuous almost everywhere on [a, b] is defined, the concept of the uniform local integrability and the uniform convergence of the integral on the points of the infinite degree of the discontinuity is introduced, and the necessary and sufficient conditions of the integrability are derived.

Key words: almost everywhere continuous essential function; integral; uniform convergence of the integral