第35卷第3期　　上海师范大学学报(自然科学版)　　Vol. 35, No. 3
2006年6月　　Journal of Shanghai Normal University(Natural Sciences)　　2006, Jun.

关于广义非线性集值混合拟变分不等式解的存在性

胡慧英

(上海师范大学 数理信息学院, 上海 200234)

摘　要: 研究了一类广义非线性集值混合拟变分不等式,并利用一个迭代算法证明了这类广义非线性集值混合拟变分不等式解的存在性,并讨论了由算法生成的迭代序列的收敛性.

关键词: 一般广义非线性集值混合拟变分不等式;极大单调映像;迭代算法

中图分类号: O177.91　**文献标识码**: A　**文章编号**: 1000-5137(2006)03-0012-05

0 引　言

众所周知,变分不等式理论是当今非线性分析的重要组成部分,此问题广泛地应用于微分方程,弹性力学中的紧问题,控制问题,经济与运输方面的平衡问题,单层,移动及自由边界以及其他应用学科等方面. 近几年来,变分不等式理论已经在很多不同方向上得到推广. 各种拟(隐)变分不等式和拟(补)问题是这些古典问题的很重要的推广. 经典变分不等式和补问题的另一种有用的推广是一般广义非线性集值混合拟变分不等式和补问题.

最近,Huang [2] 引入和研究了一类新的广义非线性集值混合拟变分不等式,并发展了寻求近似解的迭代算法,且证明了这类广义非线性集值混合拟变分不等式解的存在性以及由此算法生成的近似解序列的收敛性.

定理1[2]　设 N 依第一个变量,第二个变量都是 Lipschitz 连续的,且分别具有常数 β,ξ. 设 $S:H\to CB(H)$ 依 $N(\cdot,\cdot)$ 的第一个变量是强单调的,具有常数 α. 设 $S,T,G:H\to CB(H)$ 都是 H- Lipschitz 连续的,分别具有常数 η,γ 和 $s,p:H\to H$ 是强单调的及 Lipschitz 连续的,分别具有常数 δ 和 σ. 假设存在常数 $\lambda>0$ 和 $\rho>0$, 使得对 $x,y,z\in H$,

$$\| J_\rho^{M(\cdot,x)}(z)-J_\rho^{M(\cdot,y)}(z)\| \le \lambda \|x-y\|,$$

且

$$\left|\rho-\frac{\alpha+\xi\gamma(k-1)}{\beta^2\eta^2-\xi^2\gamma^2}\right|<\frac{\sqrt{(\alpha+\xi\gamma(k-1))^2-(\beta^2\eta^2-\xi^2\gamma^2)k(2-k)}}{\beta^2\eta^2-\xi^2\gamma^2},$$

$$\alpha>\xi\gamma(1-k)+\sqrt{(\beta^2\eta^2-\xi^2\gamma^2)k(2-k)},\xi\gamma<\eta\beta,$$

$$\rho\xi\gamma<1-k,k=2\sqrt{1-2\delta+\sigma^2}+\lambda s<1.$$

则存在 $u\in H,x\in S(u),y\in T(u)$ 和 $z\in G(u)$ 满足问题(2.1). 此外,

$$u_n\to u,x_n\to x,y_n\to y,z_n\to z,\ (n\to\infty),$$

收稿日期: 2005-11-12

作者简介: 胡慧英(1978 -),女,上海师范大学数理信息学院助教.

其中,$\{u_n\}$,$\{x_n\}$,$\{y_n\}$ 和 $\{z_n\}$ 由算法(3.1)生成的序列.

然而,另一方面,Liu 与 Li[3] 证明了如下定理:

定理 2[3] 设 $N(\cdot,\cdot)$ 依第一个变量是 Lipschitz 连续的,且具有常数 β. 如果 T 是 H - Lipschitz 的,具有常数 μ,且 T 依 $N(\cdot,\cdot)$ 的第一个变量是强单调的,对任意固定的 $k\in H$,$intD(N(T(\cdot),k))\neq\emptyset$,则 $N(T(\cdot),k)$ 不可能在 $intD(N(T(\cdot),k))$ 是多值的.

根据定理 2 [3] 可知, Huang [2] 的主要定理(本文定理 1 [2])中涉及到的集值映象实质上是单值映象.本文继续研究由 Huang [2] 引入的广义非线性集值混合拟变分不等式.应用 Hilbert 空间内极大单调映象的预解算子的性质,已熟知,广义非线性集值混合拟变分不等式等价于不动点问题.利用这一关系,建立了寻求近似解的迭代算法,并且给出了由此算法产生的迭代序列的收敛性.因此本文中的结论修正了定理 1 [2] 的主要结论,改进和发展了这一领域中原先的结果.

1 预备知识

设 H 是一个实 Hilbert 空间,其范数为 $\|\cdot\|$,内积为 $\langle\cdot,\cdot\rangle$. 令 $G,S,T:H\to 2^H$ 是集值映象,其中 2^H 表示 H 的非空子集之族。$p:H\to H$ 和 $N:H\times H\to H$ 是单值映象.假设 $M:H\times H\to 2^H$ 是集值映象,使得对每个固定的 $t\in H$,$M(\cdot,t):H\to 2^H$ 是极大单调映象及 $Range(p)\cap dom(M(\cdot,t))\neq\emptyset$, $t\in H$. 考虑如下的问题:

寻求 $u\in H$,$x\in S(u)$,$y\in T(u)$ 和 $z\in G(u)$,使得

$$\begin{cases} p(u)\in dom(M(\cdot,z)) \\ 0\in N(x,y)+M(p(u),z) \end{cases}. \tag{1.1}$$

问题(1.1)称为一般广义非线性集值混合拟变分不等式.

下面,我们回顾一些定义及论文中需要的结论.

定义 1.1 设 H 是 Hilbert 空间,$M:H\to 2^H$ 是极大单调映象,对任给 $\rho>0$,称由下式定义的映象 $J_\rho^M:H\to H$:

$$J_\rho^M(x)=(I+\rho M)^{-1}(x),\ x\in H,$$

为 M 的预解算子,其中 I 为 H 上的恒等映象.

定义 1.2 映象 $g:H\to H$ 称为

(i) δ -强单调的,如果存在常数 $\delta>0$,使得

$$\langle g(u_1)-g(u_2),u_1-u_2\rangle\geqslant\delta\|u_1-u_2\|^2,\ u_i\in H,i=1,2;$$

(ii) σ - *Lipschitz* 连续的,如果存在常数 $\sigma>0$,使得

$$\|g(u_1)-g(u_2)\|\leqslant\sigma\|u_1-u_2\|,\ u_i\in H,i=1,2.$$

定义 1.3 $N:H\times H\to H$ 称为依第一个变量是 β - *Lipschitz* 连续的,如果存在常数 $\beta>0$, 使得

$$\|N(u_1,\cdot)-N(u_2,\cdot)\|\leqslant\beta\|u_1-u_2\|,\ u_i\in H,i=1,2.$$

同样的方法,我们可以定义 $N(\cdot,\cdot)$ 依第二个变量的 *Lipschitz* 连续性.

定义 1.4 集值映象 $S:H\to CB(H)$ 称为 H - *Lipschitz* 连续的,如果存在常数 $\eta>0$,使得

$$H(S(u_1),S(u_2))\leqslant\eta\|u_1-u_2\|,\ u_i\in H,i=1,2,$$

其中,$H(\cdot,\cdot)$ 是 $CB(H)$ 上的 Hausdorff 距离,且 $CB(H)$ 是 H 的非空有界闭子集之族.

定义 1.5 $N:H\times H\to H$,$S,T:H\to 2^H$,则称 N 关于 S 与 T 是 α -混合强单调的,如果存在常数 $\alpha>0$ 对 $u_i\in H,i=1,2$, 有

$$\langle N(x_1,y_1)-N(x_2,y_2),u_1-u_2\rangle\geqslant\alpha\|u_1-u_2\|^2,\ x_i\in S(u_i),y_i\in T(u_i).$$

为证明本章主要结果,需要下列引理.

引理 1.1[5] (u,x,y,z) 是问题(1.1)的解当且仅当 (u,x,y,z) 满足关系式:

$$p(u) = J_\rho^{M(\cdot,z)}(p(u) - \rho N(x,y)),$$

其中,$\rho > 0$ 是常数,$J_\rho^{M(\cdot,z)} = (I + \rho M(\cdot,z))^{-1}$ 并且 I 是 H 上的恒等映象.

引理 1.2[6] 设 $M:H \to 2^H$ 是极大单调映象,则 M 的预解算子 $J_\rho^M:H \to H$ 是非扩张的,即是

$$\| J_\rho^M(x) - J_\rho^M(y) \| \leqslant \| x - y \|,\ x,y \in H.$$

引理 1.3[7] 设 E 是一个完备距离空间,$T:E \to CB(E)$ 是一个集值映象,则对任意的 $\epsilon > 0$ 和 u, $v \in E, x \in T(u)$,存在 $y \in T(v)$ 使得

$$d(x,y) \leqslant (1 + \epsilon) H(T(u),T(v)),$$

其中,$H(\cdot,\cdot)$ 是 $CB(E)$ 上 Hausdorff 距离,且 $CB(E)$ 是 E 的非空有界闭子集之族.

2 迭代算法

设 $p:H \to H, N:H \times H \to H, S,T,G:H \to CB(H)$,其中 $CB(H)$ 是 H 的非空有界闭子集之族. 对给定的 $u_0 \in H$,取 $x_0 \in S(u_0), y_0 \in T(u_0)$ 和 $z_0 \in G(u_0)$,设

$$u_1 = u_0 - p(u_0) + J_\rho^{M(\cdot,z_0)}(p(u_0) - \rho N(x_0,y_0)),$$

由于 $x_0 \in S(u_0) \in CB(H), y_0 \in T(u_0) \in CB(H)$ 和 $z_0 \in G(u_0) \in CB(H)$,利用引理 1.3,存在 $x_1 \in S(u_1), y_1 \in T(u_1)$ 和 $z_1 \in G(u_1)$,使得

$$\| x_0 - x_1 \| \leqslant (1 + 1) H(S(u_0),S(u_1)),$$
$$\| y_0 - y_1 \| \leqslant (1 + 1) H(T(u_0),T(u_1)),$$
$$\| z_0 - z_1 \| \leqslant (1 + 1) H(G(u_0),G(u_1)),$$

其中,$H(\cdot,\cdot)$ 是 $CB(H)$ 上的 Hausdorff 距离,通过归纳法,得到问题(1.1)的如下算法:

算法 2.1 假设 $p:H \to H, N:H \times H \to H$ 并且 $S,T,G:H \to CB(H)$. 对给定的 $u_0 \in H, x_0 \in S(u_0)$, $y_0 \in T(u_0)$ 和 $z_0 \in G(u_0)$,由以下迭代格式计算 $\{u_n\},\{x_n\},\{y_n\}$ 和 $\{z_n\}$:

$$u_{n+1} = u_n - p(u_n) + J_\rho^{M(\cdot,z_n)}(p(u_n) - \rho N(x_n,y_n)),$$
$$\| x_n - x_{n+1} \| \leqslant (1 + (n+1)^{-1}) H(S(u_n),S(u_{n+1})),\ x_n \in S(u_n),$$
$$\| y_n - y_{n+1} \| \leqslant (1 + (n+1)^{-1}) H(T(u_n),T(u_{n+1})),\ y_n \in T(u_n),$$
$$\| z_n - z_{n+1} \| \leqslant (1 + (n+1)^{-1}) H(G(u_n),G(u_{n+1})),\ z_n \in G(u_n).$$

3 存在和收敛性定理

定理 3.1 设 $N(\cdot,\cdot)$ 依第一个变量和第二个变量都是 Lipschitz 连续的,且分别具有常数 β,ξ. 设 $S,T,G:H \to CB(H)$ 都是 H-Lipschitz 连续的,且分别具常数 η,γ 和 s. 设 $p:H \to H$ 是 δ -强单调的和 σ - *Lipschitz* 连续的,N 关于 S,T 是 α -混合强单调的. 假设存在常数 $\lambda > 0$ 及 $\rho > 0$ 使得

$$\| J_\rho^{M(\cdot,x)}(z) - J_\rho^{M(\cdot,y)}(z) \| \leqslant \lambda \| x - y \|,\quad \forall x,y,z \in H, \tag{3.1}$$

而且

$$\left| \rho - \frac{\alpha}{(\beta\eta + \xi\gamma)^2} \right| < \frac{\sqrt{\alpha^2 - (\beta\eta + \xi\gamma)^2 k(2-k)}}{(\beta\eta + \xi\gamma)^2}, \tag{3.2}$$
$$\alpha > (\beta\eta + \xi\gamma)\sqrt{k(2-k)},\ k = \lambda s + 2\sqrt{1 - 2\delta + \sigma^2},\ k < 1,$$

则由算法 2.1 生成的迭代序列 $\{u_n\},\{x_n\},\{y_n\}$ 和 $\{z_n\}$ 分别强收敛于 u^*, x^*, y^* 和 z^*,且 (u^*, x^*, y^*, z^*) 是问题(1.1)的解.

证明:由算法 2.1,(3.1)以及引理 1.2 有

$$\| u_{n+1} - u_n \| = \| u_n - u_{n-1} - (p(u_n) - p(u_{n-1})) + J\rho^{M(\cdot,z_n)}(p(u_n) - \rho N(x_n,y_n)) -$$
$$J_\rho^{M(\cdot,z_{n-1})}(p(u_{n-1}) - \rho N(x_{n-1},y_{n-1})) \| \leqslant$$

$$
\begin{aligned}
&\| u_n - u_{n-1} - (p(u_n) - p(u_{n-1})) \| + \| J\rho^{M(\cdot,z_n)}(p(u_n) - \rho N(x_n,y_n)) - \\
&J_\rho^{M(\cdot,z_{n-1})}(p(u_{n-1}) - \rho N(x_{n-1},y_{n-1})) \| \leqslant \\
&\| u_n - u_{n-1} - (p(u_n) - p(u_{n-1})) \| + \| J_\rho^{M(\cdot,z_n)}(p(u_{n-1}) - \rho N(x_{n-1},y_{n-1})) - \\
&J_\rho^{M(\cdot,z_{n-1})}(p(u_{n-1}) - \rho N(x_{n-1},y_{n-1})) \| + \| J_\rho^{M(\cdot,z_n)}(p(u_n) - \rho N(x_n,y_n)) - \\
&J_\rho^{M(\cdot,z_n)}(p(u_{n-1}) - \rho N(x_{n-1},y_{n-1})) \| \leqslant \\
&\| u_n - u_{n-1} - (p(u_n) - p(u_{n-1})) \| + \lambda \| z_n - z_{n-1} \| + \\
&\| p(u_n) - \rho N(x_n,y_n) - (p(u_{n-1}) - \rho N(x_{n-1},y_{n-1})) \| \leqslant \\
&2 \| u_n - u_{n-1} - (p(u_n) - p(u_{n-1})) \| + \lambda \| z_n - z_{n-1} \| + \\
&\| u_n - u_{n-1} - \rho(N(x_n,y_n) - N(x_{n-1},y_{n-1})) \|.
\end{aligned} \tag{3.3}
$$

利用 p 的 *Lipschitz* 连续性和强单调性,得到

$$\| u_n - u_{n-1} - (p(u_n) - p(u_{n-1})) \|^2 \leqslant (1 - 2\delta + \sigma^2) \| u_n - u_{n-1} \|^2. \tag{3.4}$$

而

$$
\begin{aligned}
&\| u_n - u_{n-1} - \rho(N(x_n,y_n) - N(x_{n-1},y_{n-1})) \|^2 = \\
&\| u_n - u_{n-1} \|^2 - 2\rho\langle u_n - u_{n-1}, N(x_n,y_n) - N(x_{n-1},y_{n-1}) \rangle + \\
&\rho^2 \| N(x_n,y_n) - N(x_{n-1},y_{n-1}) \|^2.
\end{aligned} \tag{3.5}
$$

由于 N 依第一个,第二个变量的 Lipschitz 连续性以及 S,T 的 H - Lipschitz 连续性,故有

$$
\begin{aligned}
\| N(x_n,y_n) - N(x_{n-1},y_{n-1}) \| &\leqslant \| N(x_n,y_n) - N(x_{n-1},y_n) \| + \| N(x_{n-1},y_n) - N(x_{n-1},y_{n-1}) \| \leqslant \\
&\beta \| x_n - x_{n-1} \| + \xi \| y_n - y_{n-1} \| \leqslant \\
&\beta(1 + n^{-1}) H(S(u_{n-1}), S(u_n)) + \xi(1 + n^{-1}) H(T(u_{n-1}), T(u_n)) \leqslant \\
&\beta\eta(1 + n^{-1}) \| u_{n-1} - u_n \| + \xi\gamma(1 + n^{-1}) \| u_{n-1} - u_n \| = \\
&(\beta\eta + \xi\gamma)(1 + n^{-1}) \| u_{n-1} - u_n \|.
\end{aligned} \tag{3.6}
$$

利用(3.5),(3.6)以及 N 关于 S,T 是 α -混合单调性,得到

$$\| u_n - u_{n-1} - \rho(N(x_n,y_n) - N(x_{n-1},y_{n-1})) \|^2 \leqslant [1 - 2\rho\alpha + \rho^2(\beta\eta + \xi\gamma)^2(1 + n^{-1})^2] \| u_n - u_{n-1} \|^2. \tag{3.7}$$

利用(3.3),(3.4),(3.7)以及 G 的 s -Lipschitz 连续性有

$$
\begin{aligned}
\| u_{n+1} - u_n \| &\leqslant 2\sqrt{1 - 2\delta + \sigma^2} \| u_n - u_{n-1} \| + \lambda(1 + n^{-1}) H(G(u_n), G(u_{n-1})) + \\
&\sqrt{1 - 2\rho\alpha + \rho^2(\beta\eta + \xi\gamma)^2(1 + n^{-1})^2} \| u_n - u_{n-1} \| \leqslant \\
&(2\sqrt{1 - 2\delta + \sigma^2} + \lambda s(1 + n^{-1}) + \\
&\sqrt{1 - 2\rho\alpha + \rho^2(\beta\eta + \xi\gamma)^2(1 + n^{-1})^2}) \| u_n - u_{n-1} \| \leqslant \\
&\theta_n \| u_n - u_{n-1} \|.
\end{aligned} \tag{3.8}
$$

其中,$\theta_n = \lambda s(1 + n^{-1}) + 2\sqrt{1 - 2\delta + \sigma^2} + \sqrt{1 - 2\rho\alpha + \rho^2(\beta\eta + \xi\gamma)^2(1 + n^{-1})^2}$. 设

$$\theta = k + \sqrt{1 - 2\rho\alpha + \rho^2(\beta\eta + \xi\gamma)^2}.$$

其中,$k = \lambda s + 2\sqrt{1 - 2\delta + \sigma^2}$,我们知道 $\theta_n \searrow \theta$. 由(3.2)知 $\theta < 1$,因此 $\theta_n < 1$(n 充分大).因此 $\{u_n\}$ 是 H 中的 Cauchy 序列,可以假设 $u_n \to u \in H$.

下面证明 $x_n \to x \in S(u)$,$y_n \to y \in T(u)$ 和 $z_n \to z \in G(u)$. 事实上,由算法 2.1 有

$$\| x_n - x_{n-1} \| \leqslant (1 + n^{-1})\eta \| u_n - u_{n-1} \|,$$

$$\| y_n - y_{n-1} \| \leqslant (1 + n^{-1})\gamma \| u_n - u_{n-1} \|,$$

$$\| z_n - z_{n-1} \| \leqslant (1 + n^{-1})s \| u_n - u_{n-1} \|,$$

这就表示 $\{x_n\}\{y_n\}$ 和 $\{z_n\}$ 均是 Cauchy 序列.设 $x_n \to x$,$y_n \to y$ 和 $z_n \to z$.

进一步,有

$$\begin{aligned} d(x,S(u)) = \inf\{\|x-v\|, v\in S(u)\} &\leqslant \\ \|x-x_n\| + d(x_n,S(u)) &\leqslant \\ \|x-x_n\| + H(S(u_n),S(u)) &\leqslant \\ \|x-x_n\| + \eta\|u_n-u\| &\to 0. \end{aligned}$$

因此,有 $x\in S(u)$. 同样的,有 $y\in T(u)$ 及 $z\in G(u)$. 从

$$u_{n+1} = u_n - p(u) + J_\rho^{M(\cdot,z_n)}(p(u_n) - \rho N(x_n,y_n)),$$

推得

$$u = u - p(u) + J_\rho^{M(\cdot,z)}(p(u) - \rho N(x,y)).$$

即

$$p(u) = J_\rho^{M(\cdot,z)}(p(u) - \rho N(x,y)).$$

由引理(2.1)知 (u,x,y,z) 是问题(1.1)的解.

注 3.1 此定理修正了定理 1 [2].

受到定理 2 [3] 的启发,我们便可知道由定理 1 [2] 的条件可推出 S 是单值的这一结论. 因此本文中定理 3.1 的结论修正了定理 1 [2] 中的主要结论.

参考文献:

[1] KAZMI K R. Mann and Ishikawa type perturbed iterative algorithms for generalized quasi - variational inclusions[J]. J Math Anal Appl, 1997, 209:572 - 584.

[2] HUANG N J. Generalized Nonlinear Mixed Quasi - variational Inequalities[J]. Comput Math Appl, 2000, 10:205 - 215.

[3] LIU L W, LI Y Q. On Generalized Set Valued Variational Inclusions[J]. J Math Anal Appl, 2001, 261:231 - 240.

[4] 曾六川. Lipschitz 强增生算子方程解的 Ishikawa 迭代逼近[J]. 数学杂志, 2003, 23:71 - 77.

[5] DING X P. On a class of Generalized Nonlinear Implicit Quasi - Variational Inclusions[J]. Applied Mathematics and Mechanics, 1999, 20:1015 - 1024.

[6] PASCALI D, SHURLAN S. Nonlinear Mapping of Monotone Type[M]. Romania:Sijthoff - Noordhoff Inter Pub, 1978.

[7] NADLER S B. Multi-Valued Contraction Mapping[J]. Pacific J Math, 1969, 30:475 - 488.

The existence of solutions of generalized nonlinear mixed quasi-variational inequalities

HU Hui-ying

(Mathmatics and Sciences College, Shanghai Normal University, Shanghai 200234, China)

Abstract: We study a class of quasi-variational inequalities are called generalized nonlinear mixed quasi-variational inequalities. We apply an iterative algorithm to prove the existence of solutions of them. Moreover, we discuss the convergence of iterative sequences generated by this algorithm.

Key words: generalized nonlinear mixed quasi-variational inequality; maximal monotone mapping; iterative algorithm

(责任编辑:冯珍珍)