关于轨道拓扑的连续性

张　永　祺

提　要

关于轨道拓扑最早由 D. Ellis 进行了研究，之后又经其他数学工作者作了探讨。本文对轨道拓扑连续性进行综合讨论，希望能引起更深入的研究。

在一般拓扑学中有这样一个问题：给定一个集合 z 和 z 到其自身的一个映射 f，如何在 z 上建立拓扑结构，形成拓扑空间，而使得映射 f 是连续的呢？

D、Ellis 首先研究了这个问题。首先，$\forall x\in z$，把集合 $\{f^n(x)\}$ $(n=0, 1, 2, \cdots)$ 称为 x 在 f 下的轨道 (orbit)，且记作 $\Gamma(x)$。其次，定义聚点为：$\forall s\subset z, x\in z$，则 $x\in s'$ 的意义定义为在 s 中有无限多个不同的 y，使得 $x\in\Gamma(y)$。再次，由聚点定义之后就定义闭包为 $\forall s\subset z$，$\bar{s}=s\cup s'$。Ellis 证明了满足以下的 Kuratowski 闭包公理：

(a) 设 ϕ 为空集，则 $\bar{\Phi}=\phi$。

(b) $\forall A\subset z$，$A\subset\bar{A}$。

(c) $\forall A\subset z$，$\bar{\bar{A}}=\bar{A}$。

(d) $\forall A, B\subset z$，$(\overline{A\cup B})=\bar{A}\cup\bar{B}$。

这样就在 z 上建立了拓扑结构，称此拓扑为 z 在 f 下的轨道拓扑 (Orbital Topology)，並称附有轨道拓扑的拓扑空间 z 为 Ellis 空间，或称轨道拓扑空间。D. Ellis 和 R. W. Bagley 及其他数学工作者对轨道拓扑作了不少研究。本文仅对连续性问题进行综合讨论，把所取得的结果进行整理。在论证方法上有所不同。

一、Z是有限集时

当 z 是有限集时，则由聚点定义即可得：$\forall s\subset z$，$s'=\phi$。这意味着 $\forall s\subset z$，有 $\bar{s}=s$。即任意子集为闭集，也即任意子集为开集，此时的轨道拓扑是离散的，所以 f 总是连续的。由于 z 是有限集时的情况十分简单，因此在以下的讨论中规定 z 为无限集。

二、f是有限对一时

当不出现 f 把无限多个点映射为同一点的情况时，即 $\forall x\in z$，$\{f^{-1}(x)\}$ 是有限集，这时称 f 是有限对一的，则有以下定理：

定理1：假如 f 是有限对一，则 f 是在轨道拓扑下连续。

证明：$\forall A\subset z$，欲证 $f(\bar{A})\subset\overline{f(A)}$。

本文1981年3月9日收到

i，$\forall x\in A$，则 $f(x)\in f(A)\subset\overline{f(A)}$。

ii，$\forall x\bar{\in} A$，$x\in A'$ 则在 A 中有无限多个 y，使得 $x\in\Gamma(y)$，设此 A 中的无限多个 y 组成集合 B，由于 f 是有限对一的，∴ $f(B)$ 为无限集，则在 $f(B)$ 中就有无限多个不同的 $f(y)$ 使得 $f(x)\in\Gamma(f(y))$，由聚点定义知

$$f(x)\in f(B)'\subset f(A)'\subset\overline{f(A)}'$$

总之 $\forall x\in\bar{A}$，皆有 $f(x)\in\overline{f(A)}$，∴ $f(\bar{A})\subset\overline{f(A)}$，∴ f 连续，由此定理可得以下推论，

1．当 f 是一一对应时，f 必连续，

2．当任意轨道 $\Gamma(x)$ 为周期时，f 必连续。

例如在 x_0 点的轨道 $\Gamma(x_0)$ 有周期 n，即 $\Gamma(x_0)=\{x_0, f(x_0), f^2(x_0), \cdots\cdots, f^n(x_0), x_0, \cdots\}$，则可证 f^{-1} 也为映射，则 f 为一一对应，故 f 必连续。

三、f 不是有限对一时

当 f 不是有限对一时，即在 f 映射下存在着 z 中的无限多个点其象点为一个点的情况，亦即有 $x\in z$，$\{f^{-1}(x)\}$ 为无限集，此时有下述定理：

定理 2：设 z 是轨道拓扑空间，f 不是有限对一时，则 f 连续的充要条件为：无限多个点对应的一个单点 $\{x_0\}$ 是不动点，即 $f(x_0)=x_0$。

证明：必要性：设 $A\subset z$，A 为无限集，且 $f(A)=\{x_0\}$，则由聚点定义知 $x_0\in A'$，因为在轨道拓扑空间里有限集皆为闭集，∴ $\{x_0\}$ 为闭集，∵ f 连续，∴ $\{f^{-1}(x_0)\}=A$ 也为闭集，∴ $x_0\in A'\subset A$，∴ $f(x_0)=x_0$。

充分性：$\forall A\subset z$，欲证 $f(\bar{A})\subset\overline{f(A)}$。

i，$\forall x\in A$，则 $f(x)\in f(A)\subset\overline{f(A)}$。

ii，$\forall x\bar{\in} A$，$x\in A'$，则在 A 中有无限多个 y，使得 $x\in\Gamma(y)$，设此 A 中的无限多个 y 组成集合 B.

a，设 $f(B)$ 为无限集，则由聚点定义知

$$f(x)\in f(B)'\subset f(A)'\subset\overline{f(A)}。$$

b，设 $f(B)$ 为有限集，则在 $f(B)$ 中有某点 $y_0\in f(B)$，使得 B 中有无限多个 y，成立 $f(y)=y_0$。但由定理条件知此单点 $\{y_0\}$ 为不动点，即 $f(y_0)=y_0$，即 $x=f^i(y)=y_0$，$(i=1,2,\cdots)$，而 $x=y_0\in f(B)$。

$$\therefore\quad f(x)\in f(B)\subset f(A)\subset\overline{f(A)}。$$

综上所述，$\forall x\in\bar{A}$，皆有 $f(x)\in\overline{f(A)}$。∴ $f(\bar{A})\subset\overline{f(A)}$。∴ f 连续。

对于一般的轨道拓扑空间，f 不一定连续，但如果 z 是 Hausdorff 空间，则 f 必连续。

证明：不妨假设 f 不是有限对一的，即设 A 为无限集，但 $f(A)=y_0$，则由聚点定义知 $y_0\in A'$。∵ z 是 Hausdorff 空间，根据 Bagley 文章中的结论，当轨道拓扑空间为 Hausdorff 空间时，任何聚点皆为不动点，∴ $f(y_0)=y_0$，则由以上定理可知 f 必连续。

参 考 文 献

[1] Kelley, J. L. General Topology.
[2] Ellis, D. 1953, Orbital Topologies, Quart. J. Math. Qxford (2). 4. 117—119.
[3] Bagley, R. W. 1954, On Orbital Topologies. Quart. J. Math, Oxford (2). 5, 169—171.