一致凸 Banach 空间中 Lipschitz 拓扑半群的不动点定理

曾六川　　杨亚立

提　要　设 C 是 p 一致凸 Banach 空间 E 的非空有界闭凸子集，G 是半拓扑半群，$\mathscr{S}=\{T_t:t\in G\}$ 是 C 上具有 Lipschitz 常数 $k_t, t\in G$ 的 Lipschitz 半群. 假定 $k_t, t\in G$ 满足适当的附加条件，证明了集合 $\bigcap_{s\in G}\overline{CO}\{T_{ts}x:t\in G\}\bigcap F(\mathscr{S})$ 至多是一个单点集，其中，$F(\mathscr{S})=\{z\in C:T_tz=z,\forall\ t\in G\}$.

关键词　半拓扑半群；次平均；p 一致凸 Banach 空间；不动点定理
中图法分类号　O177.91

0　引　言

设 C 是实 Banach 空间 E 的非空闭凸子集，G 是半拓扑半群，即 G 是半群且 G 上存在 Hausdorff 拓扑使得对 $s\in G$，映象 $s\to t\cdot s$ 及 $s\to s\cdot t$ 均是 G 到自身的连续映象. 记 $B(G)$ 为 G 上所有有界实值函数之集按上确界范数所成的 Banach 空间. 设 X 是 $B(G)$ 的子空间且包含常数. X 上的实值函数 μ 称为 X 上的一个次平均，如果 μ 满足下列条件：

(1) $\mu(f+g)\leqslant\mu(f)+\mu(g), \forall\ f,g\in X$；

(2) $\mu(\alpha f)=\alpha\mu(f), \forall\ f\in X, \forall\ \alpha\geqslant 0$；

(3) 若 $f,g\in X$，且 $f\leqslant g$，则 $\mu(f)\leqslant\mu(g)$；

(4) $\mu(c)=c$ 对每个常数 c 成立.

设 μ 是 X 上的次平均，且 $f\in X$，则根据实际情况，用 $\mu_t(f(t))$ 记 μ 在 f 点的值，而不用 $\mu(f)$.

设 $\mathscr{S}=\{T_t:t\in G\}$ 是 C 到自身的单参数映象族. 我们称 $\mathscr{S}$ 是 C 上的 Lipschitz 半群，如果 $\mathscr{S}$ 满足下列条件：

(1) $T_{st}x=T_sT_tx, \forall\ s,t\in G, \forall\ x\in C$；

(2) 对每个 $x\in C$，映象 $s\to T_sx$ 在 G 上连续；

(3) 对每个 $t\in G$，T_t 是 C 到自身的 Lipschitz 映象，即，存在 $k_t\geqslant 0$ 使得

收稿日期：1995-09-05

第一作者曾六川，男，副教授，上海师范大学数学系，上海，200234

$$\|T_t x - T_t y\| \leqslant k_t \|x - y\|, \ \forall \ x, y \in C.$$

记 $F(\mathscr{S})$ 为 T_s，$s \in G$ 的公共不动点之集，即

$$F(\mathscr{S}) = \{x \in C : T_s x = x, \forall \ s \in G\}.$$

$\mathscr{S} = \{T_t : t \in G\}$ 称为一致 k-Lipschitz 半群，如果 $\mathscr{S}$ 是一个 Lipschitz 半群且 $k_t \equiv k$，$\forall \ t \in G$. 最近，Mizoguchi，Takahashi[1]首次引入了次平均的概念. 用次平均，他们证明了一个 Hilbert 空间中一致 Lipschitz 半群的不动点定理. 随后，Tan，Xu[2]将此结果推广到了 p 一致凸 Banach 空间的背景. 另一方面，通过引入"Lipschitz 半群的具有 $(\mathscr{P})$-性质的点"的概念，Zeng[4]给出了比[1]的上述不动点定理更优美的结果—— Hilbert 空间中非空闭子集上 Lipschitz 半群的不动点集不空的一个刻划. 本文，在 p 一致凸 Banach 空间中给出了一个新的半拓扑半群 G 上 Lipschitz 半群的不动点定理. 从而，把 Mizoguchi，Takahashi[1]的相应结果推广到了 p 一致凸 Banach 空间的背景.

1　预备知识

设 E 是一个 Banach 空间. E 的凸性模是指定义在 $(0,2]$ 上的下列函数 δ_x：

$$\delta_x(\varepsilon) = \inf\{1 - \|x + y\|/2 : x, y \in B, \|x - y\| \geqslant \varepsilon\},$$

其中，B 是 E 的闭单位球. E 是一致凸的当且仅当，对一切 $0 < \varepsilon \leqslant 2$，$\delta_x(\varepsilon) > 0$. 回忆到，$E$ 称为具有幂型 $p \geqslant 2$ 的凸性模(且 E 称为 p 一致凸的)，如果存在常数 $d > 0$ 使得

$$\delta_x(\varepsilon) \geqslant d\,\varepsilon^p, 0 < \varepsilon \leqslant 2.$$

注意到，Hilbert 空间 H 是2一致凸的(事实上，

$$\delta_H(\varepsilon) = 1 - (1 - (\varepsilon/2)^2)^{1/2} \geqslant \varepsilon^2/8)$$

且空间 $L^p(1 < p < +\infty)$ 是 $\max(2,p)$ 一致凸的.

引理1.1[3]　设 E 是一个 p 一致凸 Banach 空间，则存在常数 $d_p > 0$ 使得

$$\|tx + (1-t)y\|^p \leqslant t\|x\|^p + (1-t)\|y\|^p - d_p W_p(t)\|x - y\|^p$$

对一切 $x, y \in E$ 且 $0 \leqslant t \leqslant 1$ 成立，其中，$W_p(t) = t(1-t)^p + t^p(1-t)$.

特别地，当 E 是空间 L^p 时，有下列引理.

引理1.2[3]　设 E 是空间 L^p，$1 < p < +\infty$，则

$$\|tx + (1-t)y\|^q \leqslant t\|x\|^q + (1-t)\|y\|^q - d_p W_q(t)\|x - y\|^q,$$

对一切 $x, y \in E$ 且 $0 \leqslant t \leqslant 1$ 成立，其中

$$q = \max(2,p), W_q(t) = t^q(1-t) + t(1-t)^q$$

且

$$d_p = \begin{cases} (1 + t_p^{p-1})/(1 + t_p)^{p-1}, & \text{当 } 2 < p < +\infty \text{ 时}, \\ p - 1, & \text{当 } 1 < p \leqslant 2 \text{ 时}, \end{cases}$$

t_p 是下列方程

$$(p-2)t^{p-1} + (p-1)t^{p-2} - 1 = 0, \qquad t \in (0,1)$$

的唯一解.

引理1.3[2]　设 E 是一个 p 一致凸 Banach 空间，C 是 E 的非空有界闭凸子集，$\{x_t : t \in G\}$ 是 E 的一个有界网. 如果对每个 $x \in C$，G 上定义为

$$f(t)=\|x_t-x\|^p,\qquad t\in G$$

的函数 f 属于 X,并且记

$$r(x)=\mu_t\|x_t-x\|^p,\qquad x\in C,\qquad r=\inf\{r(x):x\in C\},$$

则存在唯一的点 $z\in C$ 使得 $r(z)=r$.

对 $s\in G$, $f\in B(G)$,定义

$$r_s f(t)=f(ts),\forall\, t\in G,$$

设 X 是 $B(G)$的一个子空间且包含常数. 称 X 是 r_G 不变的. 如果

$$r_s(X)\subset X,\forall\, s\in G.$$

X 上的一个次平均 μ 称为右不变的,如果

$$\mu(f)=\mu(r_s f),\forall\, s\in G,\forall\, f\in X.$$

2 主要结果

定理2.1 设 C 是 p 一致凸 Banach 空间 E 的非空闭凸子集, $\mathscr{S}=\{T_t:t\in G\}$ 是 C 上 Lipschitz 半群,其 Lipschitz 常数 k_t, $t\in G$ 满足

$$\inf_s\sup_t k_{ts}^p\leqslant d_p,$$

其中, d_p 是出现在引理1.1中的常数,则 $F(\mathscr{S})$ 是闭凸子集.

证明 显然, $F(\mathscr{S})$ 是闭的. 为了证明其凸性,只需证

$$z=(x+y)/2\in F(\mathscr{S}),\forall\, x,y\in F(\mathscr{S}).$$

设 $s,t\in G$,则有

$$\|T_{ts}z-x\|^p=\|T_{ts}z-T_{ts}x\|^p\leqslant$$

$$k_{ts}^p\|z-x\|^p=\left(\frac{1}{2}\right)^p k_{ts}^p\|x-y\|^p,$$

类似地,有

$$\|T_{ts}z-y\|^p\leqslant\left(\frac{1}{2}\right)^p k_{ts}^p\|x-y\|^p.$$

运用引理1.1,得到

$$\|T_{ts}z-z\|^p\leqslant\frac{1}{2}\cdot(\|T_{ts}z-x\|^p+\|T_{ts}z-y\|^p)-\left(\frac{1}{2}\right)^p d_p\|x-y\|^p=$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^p\cdot(k_{ts}^p-d_p)\cdot\|x-y\|^p.$$

因此,

$$\inf_s\sup_t\|T_{ts}z-z\|^p=0.$$

于是,对 $\forall\,\varepsilon>0$, 存在 $s\in G$ 使得

$$\sup_t\|T_{ts}z-z\|^p<\varepsilon.$$

设 $a\in G$, 则由

$$\|z-T_a z\|^p\leqslant 2^{p-1}\cdot(\|z-T_{ats}z\|^p+\|T_{ats}z-T_a z\|^p),$$

推得

$$\|z - T_a z\|^p \leqslant 2^{p-1} \cdot \sup_t \|z - T_{ats} z\|^p + 2^{p-1} \cdot k_a^p \cdot \sup_t \|T_{ts} z - z\|^p < 2^{p-1} \cdot (1 + k_a^p)\varepsilon.$$

由 $\varepsilon > 0$ 的任意性，得到

$$\|z - T_a z\|^p = 0, \forall\, a \in G.$$

故 $z \in F(\mathscr{S})$.

定理2.2　设 C 是 p 一致凸 Banach 空间 E 的一个非空有界闭凸子集，

$$0 < d_p < (1 + 2^{p-1})^{-1/2},$$

X 是 $B(G)$ 的一个 r_G 不变的子空间，包含常数，且有一个右不变的次平均 μ，$\mathscr{S} = \{T_t : t \in G\}$ 是 C 上的 Lipschitz 半群，且使得

$$\inf_s \sup_t k_{ts}^p \leqslant d_p,$$

其中，d_p 是出现在引理1.1中的常数. 如果对 $\forall\, u, v \in C$，G 上分别定义为

$$f(t) = \|T_t u - v\|^p, \qquad t \in G,$$

$$g(t) = k_t^p, \qquad t \in G.$$

的函数 f 与 g 都属于 X，则集合

$$\bigcap_{s \in G} \overline{CO}\{T_{ts} x : t \in G\} \cap F(\mathscr{S}),$$

至多是一个单点集.

证明　首先，证明

$$\mu_t(k_t^p) \leqslant \inf_s \sup_t k_{ts}^p, \qquad \sup_s \inf_t k_{ts} \leqslant \sqrt[p]{c},$$

其中，$c = d_p$.

事实上，设 $s \in G$，则

$$k_{ts}^p \leqslant \sup_a k_{as}^p, \qquad \forall\, t \in G,$$

于是，

$$\mu_t(k_t^p) = \mu_t(k_{ts}^p) \leqslant \mu_t(\sup_a k_{as}^p) = \sup_a k_{as}^p.$$

因此，

$$\mu_t(k_t^p) \leqslant \inf_s \sup_a k_{as}^p.$$

类似地，

$$\sup_s \inf_t k_{ts}^p \leqslant \mu_t(k_t^p).$$

所以，

$$\sup_s \inf_t k_{ts}^p \leqslant c.$$

假定

$$\sup_s \inf_t k_{ts} > \sqrt[p]{c},$$

则存在 $s \in G$ 使得

$$\inf_t k_{ts} > \sqrt[p]{c}.$$

记 $M = \inf_t k_{ts}$，则有

$$k_{ts} \geqslant M > \sqrt[p]{c}, \qquad \forall\, t \in G.$$

由此即得，

$$k_{ts}^p \geqslant M^p > c, \qquad \forall\, t \in G.$$

从而,

$$\sup_a \inf_t k_{ta}^p \geqslant \inf_t k_{ts}^p \geqslant M^p > c.$$

此不可能. 所以,

$$\sup_s \inf_t k_{ts} \leqslant \sqrt[p]{c}.$$

其次,证明,对每个固定的 $x \in C$, 不等式

$$\inf_s \sup_t \|T_{ts}x - f\|^p \leqslant c \cdot \mu_t\|T_t x - f\|^p \leqslant c^2 \cdot \inf_t \|T_{ts}x - f\|^p \qquad (*)$$

对 $\forall\, f \in F(\mathscr{S})$, $\forall\, s \in G$ 成立. 事实上,由引理1.3,存在唯一的 $z \in F(\mathscr{S})$ 使得

$$\mu_t\|T_t x - z\|^p = \min\{\mu_t\|T_t x - y\|^p : y \in F(\mathscr{S})\}.$$

对 $\forall\, f \in F(\mathscr{S})$, $\forall\, s \in G$, 有

$$\mu_t\|T_t x - f\|^p = \mu_t\|T_{ts}x - f\|^p \leqslant \mu_t(k_t^p) \cdot \|T_s x - f\|^p \leqslant c \cdot \|T_s x - f\|^p.$$

于是,得到

$$\mu_t\|T_t x - f\|^p \leqslant c \cdot \inf_t \|T_{ts}x - f\|^p, \forall\, s \in G.$$

另一方面,因为对 $\forall\, a, s \in G$,

$$\inf_u \sup_t \|T_{tu}x - f\|^p \leqslant \sup_t \|T_{tas}x - f\|^p =$$
$$\sup_t \|T_{ta}T_s x - T_{ta}f\|^p \leqslant$$
$$\sup_t k_{ta}^p \cdot \|T_s x - f\|^p,$$

所以,得到

$$\inf_u \sup_t \|T_{tu}x - f\|^p \leqslant$$
$$\inf_a \sup_t k_{ta}^p \cdot \|T_s x - f\|^p \leqslant$$
$$c \cdot \|T_s x - f\|^p,$$

因此,

$$\inf_s \sup_t \|T_{ts}x - f\|^p \leqslant c \cdot \mu_s\|T_s x - f\|^p.$$

从而,由此推导出(*).

设

$$u \in \bigcap_{s \in G} \overline{CO}\{T_{st}x : t \in G\} \cap F(\mathscr{S}),$$

则对 $\forall\, s, t \in G$, 及 $\forall\, y \in C$, 有

$$\|T_{ts}x - u\|^p \leqslant 2^{p-1} \cdot \|T_{ts}x - y\|^p + 2^{p-1} \cdot \|y - u\|^p - c\|T_{ts}x - 2y + u\|^p$$

于是,

$$c \cdot \|T_{ts}x - u\|^p - c^{-1} \cdot \|T_{ts}x - y\|^p \leqslant$$
$$(2^{p-1}c - c^{-1}) \cdot \|T_{ts}x - y\|^p + 2^{p-1}c\|y - u\|^p - c^2 \cdot \|T_{ts}x - 2y + u\|^p.$$

据此推得,

$$2^{p-1} \cdot c \cdot \|y - u\|^p + \inf_t\{(2^{p-1} \cdot c - c^{-1}) \cdot \|T_{ts}x - y\|^p -$$
$$c^2 \cdot \|T_{ts}x - 2y + u\|^p\} \geqslant$$
$$c \cdot \inf_t \|T_{ts}x - u\|^p - c^{-1} \cdot \sup_t \|T_{ts}x - y\|^p \geqslant$$
$$\mu_t\|T_t x - u\|^p - c^{-1} \cdot \sup_t \|T_{ts}x - y\|^p.$$

取 $y = z$，由（$*$）得到

$$2^{p-1} \cdot c \cdot \|z - u\|^p + \sup_s \inf_t \{(2^{p-1} \cdot c - c^{-1})\|T_{ts}x - z\|^p - c^2 \cdot \|T_{ts}x - 2z + u\|^p\} \geqslant \mu_t\|T_t x - u\|^p - \mu_t\|T_t x - z\|^p \geqslant 0,$$

$$\sup_s \inf_t \{(2^{p-1} \cdot c - c^{-1})\|T_{ts}x - z\|^p - c^2 \cdot \|T_{ts}x - 2z + u\|^p\} \geqslant - 2^{p-1} \cdot c \cdot \|z - u\|^p.$$

设 $\varepsilon > 0$，则存在 $a \in G$ 使得

$$(2^{p-1} \cdot c - c^{-1}) \cdot \|T_{ta}x - z\|^p - c^2 \cdot \|T_{ta}x - 2z + u\|^p \geqslant - 2^{p-1} \cdot c \cdot \|z - u\|^p - \varepsilon.$$

注意到，

$$\|T_{ta}x - z\|^p \leqslant 2^{p-1}\|T_{ta}x - 2z + u\|^p + 2^{p-1}\|z - u\|^p,$$

$$(2^{p-1} \cdot c - c^{-1}) \cdot \|T_{ta}x - z\|^p \leqslant (2^{2p-2} \cdot c - 2^{p-1} \cdot c^{-1}) \cdot \|T_{ta}x - 2z + u\|^p + (2^{2p-2} \cdot c - 2^{p-1} \cdot c^{-1}) \cdot \|z - u\|^p,$$

并且

$$-\varepsilon \leqslant (2^{2p-2} \cdot c - 2^{p-1} \cdot c^{-1} - c^2) \cdot \|T_{ts}x - 2z + u\|^p + (2^{p-1} \cdot c + 2^{2p-2} \cdot c - 2^{p-1} \cdot c^{-1}) \cdot \|z - u\|^p.$$

由于，当

$$0 < c < (1 + 2^{p-1})^{-1/2}$$

时，下列不等式成立：

$$2^{p-1}c + 2^{2p-2}c - 2^{p-1}c^{-1} < 0,$$

$$2^{2p-2}c - 2^{p-1}c^{-1} - c^2 = 2^{p-1}c + 2^{2p-2}c - 2^{p-1}c^{-1} - 2^{p-1}c - c^2 < 0,$$

所以，推得

$$(2^{p-1}c + 2^{2p-2}c - 2^{p-1}c^{-1}) \cdot \|z - u\|^p \geqslant -\varepsilon.$$

由 ε 的任意性，得到 $z = u$. 因此

$$\bigcap_{s\in G} \overline{CO}\{T_{st}x : t \in G\} \bigcap F(\mathscr{S}) = \{z\}.$$

推论2.3　设 C 是 L_p 空间 $(1 < p < (3 + \sqrt{3})/3)$ 的一个非空有界闭凸子集，X 是 $B(G)$ 的一个 r_G 不变的子空间，包含常数，且有一个右不变的次平均 μ，$\mathscr{S} = \{T_t : t \in G\}$ 是 C 上的 Lipschitz 半群，且使得

$$\inf_s \sup_t k_{ts}^2 \leqslant p - 1.$$

如果对 $\forall\, u, v \in C$，G 上分别定义为

$$f(t) = \|T_t u - v\|^2, t \in G,$$

$$g(t) = k_t^2, t \in G$$

的函数 f 与 g 都属于 X，则集合

$$\bigcap_{s\in G} \overline{CO}\{T_{ts}x : t \in G\} \bigcap F(\mathscr{S})$$

至多是一个单点集.

注　显然，对 L^p 空间，$2 < p < +\infty$，也可得到定理2.2的推论.

参 考 文 献

1 Mizoguchi N, Takahashi W. On the existence of fixed points and ergodic retractions for Lipschitzian semigroups in Hilbert spaces. Nonlinear Analysis, 1990,14: 69~80

2 Tan K K, Xu H K. Fixed point theorems for Lipschitzian semigroups in Banach spaces. Nonlinear Analysis, 1993,20: 395~404

3 Xu H K. Inequalities in Banach spaces with applications. Nonlinear Analysis, 1991,16: 1127~1138

4 Zeng L C. On the existence of fixed points and nonlinear ergodic retractions for Lipschitzian semigroups without convexity. Nonlinear Analysis, 1995,24: 1347~1359

Fixed Point Theorem for Lipschitzian and Topological Semigroups in Uniformly Convex Banach Spaces

Zeng Luchuan *Yang Yali*

(Department of Mathematics)

Abstract Let C be a nonempty bounded closed convex subset of a p- uniformly convex Banach space E , G be a semitopological semigroup and $\mathscr{S} = \{T_t : t \in G\}$ be a Lipschitzian semigroup on C with Lipschitz constants $k_t, t \in G$. Suppose that $k_t, t \in G$ satisfy certain additional conditions. It is shown that the set $\bigcap_{s\in G} \overline{CO}\{T_{ts}x : t \in G\} \bigcap F(\mathscr{S})$ is at most a singleton, where $F(\mathscr{S}) = \{z \in C : T_t z = z, \text{ for all } t \in G\}$.

Key words semitopological semigroup; submean; p- uniformly convex Banach space; fixed point theorem