第29卷第3期 上海师范大学学报(自然科学版) Vol. 29, No. 3
2000年9月 J. of Shanghai Teachers Univ. (Natural Sciences) Sep. 2000

拓扑学在 Domain 理论中的应用

TP312 .0189.1

陈仪香

(上海师范大学 数学科学学院，上海 200234)

摘　要：讨论计算机程序设计语言的 Domain 理论中的拓扑方法．研究稳定映射空间的开集，引入了极大类全函数概念，讨论极大类稳定全函数的性质．

关键词：Domain；稳定函数；极大类稳定全函数　拓扑学，

中图分类号：TP312　**文献标识码**：A　**文章编号**：1000-5137(2000)03-0018-06

0 引　言

Domain理论　程序语言

拓扑概念在计算机科学中有极好的应用．拓扑空间可看作数据类型，开集可认为数据的性质，而空间中的点(即拓扑空间的连续映射)可看作程序(段)．这种观点特别有助于理解程序的指称语义与程序逻辑间的关系[1]．

在经典的 domain 理论中，Scott 连续映射是基本研究对象，但在以 Scott 连续映射为程序的指称语义时建立的语义模型不能很好地支持 PLOTKIN 的 PCF 语言(Programming languange of Computable Functions)[2]．BERRY 在 Scott 连续映射基础上引入了稳定连续映射简称稳定映射的概念[3]，稳定映射能很好地支持 PCF 语言的语义模型．从此稳定映射得到了人们的关注，如，GIRARD 用稳定映射建立了线性逻辑[4]以及多态程序设计语言[5]的语义模型，WINSKEL 等人用稳定映射建立并发(concurrency)的语义模型[6]，GIRARD 关注 coherence 空间的稳定映射[5]，而 ZHANG 关注 BERRY 引入的 dI-domain[3]上的稳定映射[7]．本文作者关注 JUNG 所引入的 L-domain[8]上的稳定映射[9~10]，这些研究成果丰富了 Domain 理论，并逐步形成了以稳定映射为主要研究对象的 Domain 理论，称为稳定 Domain 理论．本文继续讨论 L-domain 上的稳定映射，注重讨论稳定映射空间的开集，引入极大类稳定全函数概念，并讨论其性质．

收稿日期：2000-02-12

基金项目：国家自然科学基金(69873034)、教育部高等学校骨干教师资助计划、上海市教育发展基金会曙光计划(99SG46)以及上海市高等学校研究基金(98QN76)共同资助

作者简介：陈仪香(1961-)、博士、博士后，上海师范大学数学科学学院教授，研究方向：格上拓扑学、Domain 理论及其应用

1　预备知识

设 $(P, \leqslant)$ 是一偏序集,其元素间的序关系 $x \leqslant y$ 从不同角度解释有不同的含义:(1)元素 x 所含的信息量少于元素 y 所含的信息量;(2)从信息的逼近角度解释为元素 y 比元素 x 更接近于要逼近的元素;(3)从函数的偏性与全性来看函数 x 比函数 y 更偏,或者说函数 y 比函数 x 更"全". Domain 理论所关心的偏序集为定向完备的,即定向集的并(或者链)封闭的偏序集,具体定义如下.

设 A 是偏序集 P 的非空子集,若对于 A 中的任何两个元素 a, b 都有 $c \in A$ 使得 $a \leqslant c$, $b \leqslant c$,则称集合 A 是定向的. 显然每个增加链 $x_1 \leqslant x_2 \leqslant \cdots \leqslant x_n \leqslant \cdots$ 是定向集. 若偏序集 P 的每个定向集的并都存在,则称偏序集 P 为定向完备偏序集(DCPO). 带有最小元 $\perp$ 的定向完备偏序集称为完备偏序集(CPO),以后用符号 $\vee A$ 表示集合 A 的并. 设 D 是一完备偏序集,$x \in D$,若对于 D 的任意定向集 A 只要 $x \leqslant \vee A$ 就有 $a \in A$ 使得 $x \leqslant a$,则称 x 为 D 的有限元,或紧元. 有限元体现了在有限步后就可实现的有限性. 符号 D^0 将表示 D 的所有有限元之集. 若对于 D 中的任意元 x,集合 $\{y | y \in D^0, y \leqslant x\}$,记为 $\Downarrow x$,是定向的并且其并恰好为 x,即 $x = \vee \{y | y \in D^0, y \leqslant x\}$,则称 D 是代数的完备集,简称为 domain. Domain 的代数性体现了 domain 的每一个元素都可用有限元逼近. 设 D 是一 domain,D 中的元素 m 称为极大的,若 D 中没有比它再大的元素. 极大元体现了所含有的信息尽可能多的极大性,或者函数尽可能全的全性. 符号 $M(D)$ 表示 D 的所有极大元之集,而 $mU = U \cap M(D)$.

Domain 间的(Scott)连续映射是指单调且保定向并的映射. 设 f, g 是 domain D 到 E 的连续映射,若对于任意 $d \in D$ 都有 $f(d) \leqslant g(d)$,则说 f 点式小于等于 g,记作 $f \leqslant g$.

设 D 是一 domain,D 的子集 U 称为 Scott 开集,若 U 是一上集,并且对于 D 的任一定向集 A 只要 $\vee A \in U$ 就有 $a \in A$ 使得 $a \in U$. D 的所有 Scott 开集组成了 D 上的一拓扑,称为 Scott 拓扑,并记作 σD. Scott 拓扑与 Scott 连续映射保持和谐,即有下列结论:

设 D、E 是 Domain,f 是 D 到 E 的映射,则 f 是 Scott 连续映射当且仅当 f 关于 Scott 拓扑连续,即 $\forall\ U \in \sigma E, f^{-1}(U) \in \sigma D$.

Domain D 到 domain E 的 Scott 连续映射 f 称为稳定函数 当且仅当 $\forall\ d \in D$、$\forall\ e \leqslant f(d)$ 集合 $\{a : a \leqslant d, e \leqslant f(a)\}$ 有最小元,记为 $m(f, d, e)$.

设 f, g 是 domain D 到 E 的稳定映射,若 $f \leqslant g$ 并且对于任一 $d \leqslant D$ 以及 $e \in E$ 当 $e \leqslant f(d)$ 时,有 $m(f, d, e) = m(g, d, e)$,则称 f 在稳定序下小于等于 g,记作 $f \leqslant_s g$.

Domain D 称为 L-domain[8],若 D 的每个相容集(即上有界的非空子集)都有交(即最大下界)的 domain. 符号 $a \uparrow b$ 表示 $\{a, b\}$ 是相容集. 符号 $[D \to_s E]$ 表示 L-domain D 到 L-domain E 的所有稳定函数之集并带有稳定序 $\leqslant_s$.

定理 1[9]　设 D、E 是 L-domain,f, $g: D \to E$ 是稳定映射,则下列各条等价:

(1) $f \leqslant_s g$;

(2) $f \leqslant g$,并且 $\forall\ x, x' \in D$ 只要 $x \leqslant x'$ 就有 $f(x) = f(x') \wedge g(x)$;

(3) $f \leqslant g$,并且 $\forall\ x, x' \in D$ 只要 $x \uparrow x'$ 就有 $f(x) \wedge g(x') = f(x') \wedge g(x)$.

定理 2[9,10] 设 D, E 是 L—domian, f 是 D 到 E 的(Scott)连续映射, 则 f 是 D 到 E 的稳定映射当且仅当 f 保相容集的交.

这个定理表明, L-domain 间的稳定映射恰好是保持 L-domain 运算(定向集的并以及相容集交)的同态映射, 这为人们研究 L-domain 上稳定映射带来了方便[9,10].

设 D 是 L-domain, D 的 Scott 开集 U 称为稳定开集当且仅当对于 D 的任一相容集 X 只要 $X \subseteq U$ 就有 $\wedge X \in U$. 符号 **SN** (D) 将表示 D 的所有稳定开集组成的集合. D 的所有稳定开集一般不再构成 D 的拓扑, 这是因为任意多个稳定开集的并一般不是稳定开集. 但这并不影响我们用拓扑方法讨论 L-domain. 符号 μU 表示稳定开集 U 中极小元之集. 若 $\mu U \subseteq \mu V$, 则说 U 稳定小于 V, 记作 $U \subseteq_\mu V$. 符号 **KSN** (D) 表示 D 的所有紧稳定开集的集合.

命题 3 设 D 是 L-domain, U 是 Scott 开集, 则

(1) U 是稳定开集当且仅当 U 是一些形如 $\uparrow k$ $(k \in D^0)$ 互不相交的集合的并;

(2)稳定开集 U 是紧的当且仅当有有限个互不相容的紧元 k_1, k_2, $\cdots$, k_n 使得 U 是集合 $\uparrow k_1$, $\uparrow k_2$, $\cdots$, $\uparrow k_n$ 的并.

证明 可直接验证. □

定理 4[9,10]

(1)设 D, E 是 L-domain, f 是 D 到 E 的映射, 则 f 是稳定映射当且仅当 $\forall\ U \in$ **SN** (E). $f^{-1}(U) \in$ **SN** (D).

(2)设 D, E 是 L-domain, f, g 是 D 到 E 的稳定映射, 则 $f \leqslant_s g$ 当且仅当对于任意的 $U \in$ **SN** (E). $f^{-1}(U) \subseteq_\mu g^{-1}(U)$.

2 稳定映射空间

作者在文[10]中表明若 D, E 是 L-domain, 则 D 到 E 的稳定映射空间 $[D \to_s E]$ 在稳定序下仍是 L-domain, 其中定向集的并以及相容集的交都是点式的即:

设 $\{f_\alpha: \alpha \in \Delta\}$ 是 $[D \to_s E]$ 中的定向集, 其并定义为

$$(\vee_{\alpha\in\Delta} f_\alpha)(d) = \vee_{\alpha\in\Delta}(f_\alpha(d)).$$

设 $\{f_\alpha: \alpha \in \Delta\}$ 是 $[D \to_s E]$ 中的相容集, 其交定义为

$$(\wedge_{\alpha\in\Delta} f_\alpha)(d) = \wedge_{\alpha\in\Delta}(f_\alpha(d)).$$

定理 5 设 D, E 是 L-domain, $A \in$ **KSN** (D), $B \in$ **SN** (E), 则 $A \to B \in$ **SN** $([D \to_s E])$, 其中

$$A \to B = \{f: f \in [D \to_s E], A \subseteq_\mu f^{-1}(B)\}.$$

证明 由定理 4 知 $A \to B$ 是上集. 现设 $\{f_\alpha: \alpha \in \Delta\}$ 是 $[D \to_s E]$ 中的定向集, 并且假定 $\vee_{\alpha\in\Delta} f_\alpha \in A \to B$, 则 $A \subseteq_\mu (\vee_{\alpha\in\Delta} f_\alpha)^{-1}(B)$. 因为 A 是紧开集, 所以 μA 是有限集, 可设 $\mu A = \{m_1, m_2, \cdots, m_n\}$. 这样 $m_i \in f_{\alpha_i}^{-1}(B)$, $i = 1, 2, \cdots, n$. 因为 $\{f_\alpha: \alpha \in \Delta\}$ 是定向集, 所以有 f_{α_0} 使得 $f_{\alpha_i} \leqslant_s f_{\alpha_0}$, $i = 1, 2, \cdots, n$. 此时 $\mu A \subseteq_\mu f_{\alpha_0}^{-1}(B)$, 结果 $f_{\alpha_0} \in A \to B$. 这已表明 $A \to B$ 是 $[D \to_s E]$} 的 Scott 开集.

设 $\{f_\alpha: \alpha\in\Delta\}$ 是 $[D\to_s E]$ 中的相容集,f_0 是其上界,即 $\forall\ \alpha\in\Delta$,$f_\alpha\leqslant_s f_0$. 则 $\wedge_{\alpha\in\Delta}f_\alpha\in[D\to_s E]$}. 设 $a\in A$,则由 $A\subseteq_\mu f_\alpha^{-1}(B)$ 得 $\{f_\alpha(a):\alpha\in\Delta\}\subseteq B$. 此时由 B 是稳定开集以及 $\{f_\alpha(a):\alpha\in\Delta\}$ 是相容集得 $\wedge_{\alpha\in\Delta}f_\alpha(a)\in B$,故 $a\in(\wedge_{\alpha\in\Delta}f_\alpha)^{-1}(B)$,所以 $A\subseteq((\wedge_{\alpha\in\Delta}f_\alpha)^{-1}(B))$. 取 $m_i\in\mu A$ 且设 $m'\leqslant m_i$ 其中 $m'\in\mu(\wedge_{\alpha\in\Delta}f_\alpha)^{-1}(B)$,因为 $\wedge_{\alpha\in\Delta}f_\alpha\leqslant_s f_0$,由定理4有 $(\wedge_{\alpha\in\Delta}f_\alpha)^{-1}(B)\subseteq_\mu f_0^{-1}(B)$. 这样 $m'\in\mu(f_0^{-1}(B))$. 但 $\mu A\subseteq\mu f_0^{-1}(B)$,这时 $m'=m_i\in\mu(\wedge_{\alpha\in\Delta}f_\alpha)^{-1}(B)$. 因此 $\mu A\subseteq(\wedge_{\alpha\in\Delta}f_\alpha)^{-1}(B)$ 并且 $\wedge_{\alpha\in\Delta}f_\alpha\in A\to B$. 结果 $A\to B$ 是 $[D\to_s E]$} 的稳定开集. □

3 极大类全函数

由于在计算机科学中偏函数是处处可见的、全函数的要求过于偏高,人们应降低函数全性的要求,转而关注相对某类元素的全函数即保持某类元素性质的函数.

设 U, V 分别是函数 f 定义域与值域中具有相同 **T** 类元素集,若 f 将 U 中的元素映成 V 中的元素,即 $f(U)\subseteq V$,则称 f 为 **T** 类全函数. 人们可以关注各种各样的类全函数. 比如紧元类全函数即保持紧元函数,对于 dI-domain 人们可关注全素元类全函数(全素元的定义可见文[7]). 本文关注极大类全函数.

设 D, E 是 domain,f 是 D 到 E 的映射,若 f 将极大元映成极大元,即 $f(M(D))\subseteq M(E)$ 则称 f 是极大类全函数.

显然,极大类全函数的乘积仍是极大类全函数,恒等映射是极大类全函数. 自然数的平坦 domain $N_\perp$ 是 $\{\perp, 1, 2, \cdots, n, \cdots\}$ 其序关系为:$x\leqslant y$ 当且仅当 $x=\perp$. 此时每个自然数都是极大元,所以 $N_\perp$ 上的极大类全函数当且仅当它是自然数集上的全函数. 一般地,平坦 domain 间极大类全函数与全函数是一致的.

为了更好地支持程序设计语言的语义模型的建立,Domain 理论还建立了 domain 的各种各样的运算,诸如:积 $D\times E$,和 $D+E$,映射空间 $[D\to E]$ 等. 易知积的射影映射 P_l: $D\times E\to D$,P_r:$D\times E\to E$ 以及和的内射 In_l:$D\to D+E$、In_r: $E\to D+E$ 均是极大类全函数. 下面的命题6,7,8可直接验证.

命题6 设 D_1、D_2、E 是 L-domain,f:$E\to D_1$,g:$E\to D_2$ 是稳定映射,定义 $<f, g>$:$E\to D_1\times D_2$ 为 $<f, g>(e)=(f(e), g(e))$. 则 $<f, g>$ 是使 $f=P_l\circ<f, g>$,$g=P_r\circ<f, g>$ 成立的唯一稳定映射,并且 $<f, g>$ 是极大类全函数当且仅当 f, g 是极大类全函数.

命题7 设 D, D', E, E' 是 L-domain,f:$D\to D'$,g:$E\to E'$ 是稳定映射. 定义 $f\times g=<f\circ P_l, g\circ P_r>$:$(D\times E)\to(D'\times E')$ 是极大类全函数当且仅当 f, g 是极大类全函数.

命题8 设 D, E, F 是 L-Domain,f:$D\to F$,g:$E\to F$ 是稳定映射. 定义 $f+g$:$D+E\to F$ 为 $f+g(\perp_{D+E})=\perp_F$,$f+g(d, 0)=f(d)$,$f+g(e, 1)=g(e)$. 则 $f+g$ 是使 $f+g\circ In_l=f$,$f+g\circ In_r=g$ 成立的唯一稳定映射,并且 $f+g$ 是极大类全函数当且仅当 f, g 是极大类全函数.

设 D 是 L-domain，$U, V \in \mathbf{SN}(D)$. 若 $U \subseteq V$ 并且 $mU = mV$，则记 $U \subseteq_m V$.

定理 9 设 D, E 是 L-domain，f 是 D 到 E 的极大类稳定全函数，则对于 E 的任意稳定开集 U, V 只要 $U \subseteq_m V$ 就有 $f^{-1}(U) \subseteq_m f^{-1}(V)$.

证明 明显地 $f^{-1}(U) \subseteq f^{-1}(V)$. 设 $m \in f^{-1}(U) \cap M(D)$，则由 f 是极大类稳定全函数得 $f(m) \in U \cap M(E)$. 因 $U \subseteq_m V$，所以 $f(m) \in V \cap M(E)$，$m \in f^{-1}(V) \cap M(D)$. 故 $f^{-1}(U) \cap M(D) \subseteq f^{-1}(V) \cap M(D)$. 同理可得 $f^{-1}(V) \cap M(D) \subseteq f^{-1}(U) \cap M(D)$. 所以 $f^{-1}(U) \subseteq_m f^{-1}(V)$. □

设 $f \in [D \rightarrow_s E]$，$\forall e \in E$，令 $k_f(e) = \{m(f, d, e): d \in D, e \leqslant f(d)\}$，则 k_f 是 E 到幂集 2^D 的映射. 集合 $\mu f = \{(a, p): (a, p) \in D^0 \times E^0, a \in k_f(p)\}$ 称为稳定映射 f 的迹.

定理 10[10] 设 D，E 是 L-domian，$f, g: D \rightarrow E$ 是稳定映射，则 $f \leqslant_s g$ 当且仅当 $\mu f \subseteq \mu g$，$f = g$ 当且仅当 $\mu f = \mu g$.

定理 11[10] 设 D, E 是 L-domain，则 集合 $A = \{(a_i, p_i): i \in I\} \subseteq D^0 \times E^0$ 是某一稳定函数的迹当且仅当它满足

(1) 定向性：$\forall\ d \in D$，$\{p_i: (a_i, p_i), i \in I, a_i \leqslant d\}$ 是定向集；

(2) 相容性：$\forall\ J \subseteq I$，$\{a_i: i \in I\}$ 是相容集且 $\{p_i: i \in J\}$ 是单点集，则 $\{a_i: i \in J\}$ 是单点集；

(3) 完备性：$\forall\ p \in E^0$，若有 $(a_i, p_i) \in A$ 使得 $p \leqslant p_i$ 则有 $a \in D^0$ 使得 $(a, p) \in A$ 且 $a \leqslant a_i$.

定理 12 设 D、E 是 L-domain，$f \in [D \rightarrow_s E]$，若 f 是极大类稳定全函数，则 f 在稳定序下是极大的.

证明 设 $f, g \in [D \rightarrow_s E]$，且 $f \leqslant_s g$，则 $\mu f \subseteq \mu g$. 任取 $(a, p) \in \mu g$，则有 $m \in M(D)$ 使得 $a \leqslant m$. 由 $p \leqslant g(a) \leqslant g(m) = f(m) = \bigvee \{p': (a', p') \in \mu f, a' \leqslant m\}$ 及 $p \in E^0$ 得 $(a', p') \in \mu f$ 使得 $p \leqslant p'$，$a' \leqslant m$. 由定理 8 得 $(a_0, p) \in \mu f$ 且 $a_0 \leqslant a' \leqslant m$. 因 $\mu f \subseteq \mu g$，所以 $(a_0, p) \in \mu g$. 再由定理 8 得 $a = a_0$. 所以 $(a, p) \in \mu f$. 进一步有 $\mu g \subseteq \mu f$. 所以 $f = g$. □

推论 设 D、$D_i (i = 1, 2)$ 是 L-domain，则有

(1) 恒等映射 $Id_D: D \rightarrow D$ 是极大的；

(2) 内射 $In_i: D_i \rightarrow (D_1 + D_2)(i = 1, 2)$ 是极大的；

(3) 射影 $p_i: D_1 \times D_2 \rightarrow D_i (i = 1, 2)$ 是极大的.

参考文献：

[1] ABRAMSKY S. Domain theory in logical form[J]. Ann Pure Appl Logic, 1991, 51: 1-77.

[2] PLOTKIN G D. LCF as a programing language[J]. Theoretical Computer Science, 1977, 5: 223-257.

[3] BERRY G. Stable models of typed λ-calculi[J]. Lecture Notes in Computer Science, 1978, 62: 72-88.

[4] GIRARD J Y. Linear logic[J]. Theoretical Computer Science, 1987, 50: 1-102.

[5] GIRARD J Y. The system F of variable types[J]. Theoretical Computer Science, 1986, 45: 159-192.
[6] WINSKEL G, NUELSEN M. Models for concurrency, Handbook of Logic in Computer Science[M]. Clarendon Press, 1994, 4.
[7] ZHANG G Q. The largest cartesian closed category of stable domains[J]. Theoretical Computer Science, 1996, 166: 203-219.
[8] JUNG A. Cartesian closed categories of algebraic CPOs[J]. Theoretical Computer Science, 1990, 70: 223-250.
[9] 陈仪香. Stone duality and representaion of stable domain[J]. Journal of Computer and Mathematics with Application, 1997, 34: 27-41.
[10] 陈仪香. 稳定映射与L-domain范畴的笛卡尔闭性[J]. 数学学报, 1997, 40: 697-602.
[11] 陈仪香. 半格与Domain的表示[J]. 数学学报, 1998, 41: 737-742.

Applications of Topology to Domain Theory

Chen Yi-xiang
(College of Mathematical Sciences, Shanghai Teachers University, Shanghai 200234, China)

Abstract: Introduces topological methods in domain theory of denotational semantics of computer programming languages. Investigates properties of open subsets in stable function spaces between L-domains. Also gives the definition of type-maximum total functions. And discusses propoerties of type-maximum total stable functions.

Key words: Domain; stable function; type-maximum total stable function