# Banach空间中Fuzzy隶属函数的逼近过程

蒋伟成　郑道朋

1975—1980年，Kaufmann及Dubois等定义并讨论了某些特殊情况下的Fuzzy集的逼近问题。覃国光于[4]文，对用连续的Fuzzy隶属函数逼近$FL_p(X)$空间的Fuzzy集问题作了研究。

本文利用泛函分析工具对Fuzzy集的逼近作进一步深入的研究，主要结果如下：

(1) 定理1给出了对连续隶属函数的Fuzzy集，用多项式隶属函数在$C^{\circ}$空间中逼近时的估计式及其逼近定理；

(2) 简单隶属函数集在$L_2^0[0,1]$中稠密（定理4）；

(3) Fuzzy在集类$L_2^0[0,1]$上的有界线性泛函$\varphi^0$，具有在$L_2[0,1]$上的有界线性泛函延拓的充要条件是它能在$L_2^0[0,1]$上被表示成一个内积（定理3）。

本文中，符号$F[0,1]$表示论域$[0,1]$上的隶属函数集；$M$为$[0,1]$上的有界函数构成的Banach空间；记$M^0 \triangleq F[0,1]\cap M$，其中范数

$$\|A\|_M \triangleq \sup_{x\in[0,1]}|A(x)|；\quad L_2^0 \triangleq L_2[0,1]\cap F[0,1]，\quad L_2[0,1]$$

空间的范数为$\|\cdot\|_2$；$C^{\circ} \triangleq M^0\cap C[0,1]$；表示$[0,1]$上连续隶属函数构成的空间。

**定理1**　设$\forall A\in C^{\circ}$，则存在多项式隶属函数

$$B_n(x)=\sum_{k=0}^{n}C_n^k x^k(1-x)^{n-k}\ A\left(\frac{k}{n}\right),$$

满足估计：

$$\|A(x)-B_n(x)\|_M \leqslant \frac{\|A\|_M}{2\cdot\sqrt{n}}+\varepsilon_n,$$

这里$\varepsilon_n \triangleq \max\limits_{\left|\frac{k}{n}-x\right|<\frac{1}{\sqrt[4]{n}}}\left|A(x)-A\left(\frac{k}{n}\right)\right|$，它是与$A$的振幅有关的无穷小量。

并且隶属函数集$\left\{\sum\limits_{k=0}^{n}a_k x^k(1-x)^{n-k}\,\middle|\,a_k\in R\right\}$在$C^{\circ}$中处处稠密。

**证明**　注意到当$x\in[0,1]$时$A\left(\frac{k}{n}\right)$，$(1-x)\in[0,1]$，故$B_n(x)$是隶属函数。利用Weierstrass逼近定里即证得本定理[8]。

**定理2**　$M^0$是$M$中的闭集，$C^0$是$M$的Hausdorff可分的闭拓扑子空间。

本文于1982年4月30日收到

**证明** 若 $\lim\limits_{m,n\to\infty}\|A_m-A_n\|_n=0$，则 $\lim\limits_{m,n\to\infty}|A_m(x)-A_n(x)|=0$，$\forall x\in[0,1]$。

取 $A(x)=\lim\limits_{n\to\infty}A_n(x)$，$\because A_n\in M^0$，即 $A_n(x)\in[0,1]$，故 $A(x)\in[0,1]$，从而 $A\in M^0$。

显然 $\lim\limits_{n\to\infty}\|A_n-A\|_M=0$。

其次，当 $A_n(x)\in C[0,1]$ 时，其一致收敛极限 $A(x)$，当然也连续。

Hausdorff 公理的成立是由于：

$$\forall A_1,\ A_2\in C^0,\ A_1\neq A_2,$$

我们有

$$|A_1-A_2|\in C^0,$$

可记

$$\eta\triangleq\sup_{x\in[0,1]}|A_1(x)-A_2(x)|>0,$$

则 $A_1$，$A_2$ 在 $M$ 中之邻域

$$U(A_i)\triangleq\left\{A\,\middle|\,\|A_i-A\|_M<\frac{\eta}{4}\right\},\ i=1,2,$$

使得

$$U(A_1)\cap U(A_2)=\phi.$$

**命题 1** $T_a(A)=a\vee A(x)$，$S_a(A)=a\wedge A(x)$，$a\in[0,1]$，都是 $C^0$ 到 $C^0$ 的连续非线性算子，其中 $T_a$ 是无界算子。

**证明** 连续性是由于

$$\begin{aligned}\|(a\vee A_n(x))-(a\vee A(x))\|_M&=\left\|\frac{1}{2}[(a+A_n(x))+|a-A_n(x)|]\right.\\&\quad\left.-\frac{1}{2}[(a+A(x))+|a-A(x)|]\right\|_M\\&\leqslant\frac{1}{2}(\|A_n(x)-A(x)\|_M+\||a-A_n(x)|-|A(x)-a|\|_M)\\&\leqslant\frac{1}{2}(\|A_n(x)-A(x)\|_M+\|a-A_n(x)+A(x)-a\|_M)\\&=\|A_n(x)-A(x)\|_M\end{aligned}$$

对 $S_a$ 可平行地获证。

$T_a$ 的无界性是由于：

$$\begin{aligned}\|T_a\|&=\sup_{0\neq A\in C_0}\frac{\sup\limits_{x\in[0,1]}(a\vee A(x))}{\sup\limits_{x\in[0,1]}A(x)}=\bigvee_{0\neq A\in C^0}\frac{a\vee(\bigvee\limits_{x\in[0,1]}A(x))}{(\bigvee\limits_{x\in[0,1]}A(x))}\\&=\bigvee_{0\neq A\in C^0}\left[\left(\frac{a}{\|A\|_M}\right)\vee\left(\frac{\|A\|_M}{\|A\|_M}\right)\right]=\bigvee_{0\neq A\in C^0}\left(\frac{a}{\|A\|_M}\vee 1\right)\\&=1\vee\left(\bigvee_{0\neq A\in C^0}\frac{a}{\|A\|_M}\right)=1\vee a\cdot\left(\bigvee_{0\neq A\in C^0}\frac{1}{\|A\|_M}\right)\end{aligned}$$

故在 $C^0$ 中取 $A_n=\dfrac{1}{n}\downarrow 0$，而 $\|A_n\|_M=\dfrac{1}{n}\neq 0$，就可知 $\|T_a\|$ 无界。

下面讨论 $L_2^0[0,1]$ 中的隶属函数的一些逼近性质。

**定义 1** 设映照 $\varphi^0$：$L_2^0[0,1]\to R$，当 $\forall A_1,A_2\in L_2^0[0,1]$，$\forall a,b\in R$，$aA_1+bA_2\in$

$L_2^0[0,1]$ 时，必有 $\varphi^0(aA_1+bA_2)=a\varphi^0(A_1)+b\varphi^0(A_2)$，则称 $\varphi^0$ 为线性的；且当

$$\|\varphi^0\|=\sup_{0\neq A\in L_2^0}\frac{|\varphi^0(A)|}{\|A\|_2}<\infty$$

时，称为有界的。

**定义 2** 设 $A\in L_2^0[0,1]$，$\varphi$：$L_2[0,1]\to R$ 是有界线性泛函，$\varphi$ 于 $L_2^0[0,1]$ 上的限制 $\varphi^0$，称为子有界线性泛函，它的模是

$$\|\varphi^0\|\triangleq\sup_{0\neq A\in L_2^0[0,1]}\frac{|\varphi(A)|}{\|A\|_2}$$

子有界线性泛函概念，意味着 $L_2^0[0,1]$ 中每一个 Fuzzy 集对应于一个实数，这个对应是线性的且关于 $L_2[0,1]$ 的范数是连续的，它在 $[0,1]$ 上隶属函数集 $F[0,1]$ 的子空间 $L_2^0[0,1]$ 上有一定意义。

**例** $\varphi^0(A)=\int_0^1A(x)dx$ 是 $L_2^0[0,1]$ 上的有界线性泛函。

**证明** $|\varphi^0(A)|=\left|\int_0^1A(x)dx\right|\leqslant\int_0^1 1^2dx\cdot\|A\|_2$ （Höder不等式）

可见 $$\|\varphi^0\|\leqslant 1$$

取 $A(x)=1$，得 $\|\varphi^0\|=1$。

**定理 3** 设 $\varphi^0$ 是 $L_2^0[0,1]$ 上有界线性泛函，$\varphi^0$ 具有在 $L_2[0,1]$ 上的有界线性泛函数延拓 $\varphi$ 的充要条件是：

$$\exists f\in L_2[0,1],\ \forall A\in L_2^0[0,1],\ \varphi^0(A)=(A,f).$$

且当充要条件成立时 $\|\varphi\|=\|f\|_2$。

**证明** 必要性，设 $\varphi$ 是 $\varphi^0$ 的有界线性泛函延拓，由 Riesz 表示定理即得

$$\varphi(A)=(A,f),\ \|\varphi\|=\|f\|_2.$$

充分性，当 $\varphi^0(A)=(A,f)$ 时，作 $\varphi(A)=(A,f)$，$\forall A\in L_2[0,1]$。显见 $\varphi(\cdot)$ 是 $L_2[0,1]$ 上有界线性泛函。

**命题 2** 设 $B\in L_2^0[0,1]$，算子 $[T_B(A)](x)\triangleq\int_0^1B(x)\cdot A(x)dx$，则 $B$ 是 $L_2^0[0,1]$ 上的有界线性泛函，且

$$\|T_B\|\leqslant\|B\|_2.$$

**证明** 由 Hölder 不等式即得

$$\|T_B\|=\sup_{0\neq A\in L_2^0[0,1]}\frac{\left|\int_0^1B(x)A(x)dx\right|}{\|A\|_2}$$

$$\leqslant\sup_{0\neq A\in L_2^0[0,1]}\frac{\|A\|_2\cdot\|B\|_2}{\|A\|_2}=\|B\|_2$$

**命题 3** 设 $a\in[0,1]$，$T_a(A)\triangleq aVA(x)$ 若定义 $\|T_a\|=\sup_{0\neq A\in L_2^0[0,1]}\frac{\|T_a(A)\|_2}{\|A\|_2}$，则 $T_a$ 是 $L_2^0[0,1]$ 上有界非线性算子。

**证明** $$\|T_a\|=\sup_{A\in L_2^0[0,1]}\frac{\|T_a(A)\|_2}{\|A\|_2}=\sup_{A\in L_2^0[0,1]}\frac{\left[\int_{A^{-1}[0,1]}(aVA(x))^2dx\right]^{\frac{1}{2}}}{\left[\int_0^1A^2(x)dx\right]^{\frac{1}{2}}}\leqslant 1$$

而取 $A(x)=1$，则 $\dfrac{\left[\int_0^1(aV1)^2dx\right]^2}{\left[\int_0^1 1dx\right]^2}=1$

所以 $\|T_a\|=1$。

**定义 3** 简单隶属函数是形如$\sum_0^{n-1}\lambda_{nr}1_{[\frac{r}{n},\frac{r+1}{n}]}(x)$ 的隶属函数，其中 $r=0,\cdots\cdots,(n-1)$，$n\in N$，$\lambda_{nr}$ 属于非负有理数集。

**定理 4** 简单隶属函数集在 $L_2^0[0,1]$ 中稠密。换言之，任一个 Fuzzy 集隶属函数 $A(x)\in L_2^0[0,1]$，皆可用上述简单隶函数按 $L_2[0,1]$ 的范数逼近。

**证明** 对任一个 $A(x)\in L_2^0[0,1]$，令

$$S_n(x)\triangleq n\sum_{r=0}^{n-1}\left(\int_{\frac{r}{n}}^{\frac{r+1}{n}}A(t)dt\right)\cdot 1_{[\frac{r}{n},\frac{r+1}{n}]}(x)$$

就有

$$\lim_{n\to\infty}S_n(x)=A(x),$$

几乎处处于 $[0,1]$ 收敛。以及由 Lebesgue 控制收敛定理

$$\lim_{n\to\infty}\|S_n-A\|_2=0。$$

## 参 考 文 献


[1] D. Dubois and H. Prade,《Fuzzy Sets and Systems》 Academic Press Inc, New york, 1980.

[2] A. Kaufmann,《Introduction to the Theory of Fuzzy Subsets》Vol. I. Academic Press, New york, 1975.

[3] H. U. Axuezep.《逼近论讲义》，科学出版社，北京，1957.

[4] 覃国光，《乏晰 $FL_p(z)$ 空间及对择近原则的评议》，华中工学院学报，专辑 (2)，1980.

# Approximation Processes of Fuzzy Membership Functions in Banach Spaces

*Jiang Weicheng*　　*Zheng Daopeng*

**Abstract**

In this paper, the approximation processes of fuzzy sets are studied by applying the method of functional analysis. The major results obtained therein are as follows:

(1) The approximation theorem and the estimation by approximation of a continuous membership function with polynomial membership functions in the space $C^{\circ}$ are given (Theorem 1).

(2) The set of simple membership functions is dense in the space $L_2^0$ [0, 1] (Theorem 4).

(3) The bounded linear functional $\varphi^0$ on space $L_2^0$ [0, 1] of fuzzy sets possesses the extension on all $L_2$ [0, 1], if and only if $\varphi^0$ may be expressed as an inner product (Theorem 3).