第23卷 第2期 上海师范大学学报(自然科学版) Vol. 23, No. 2
1994年6月 J. of Shanghai Teachers Univ. (Natural Sciences) Jun. , 1994

面向矩阵的线性代数计算机辅助教学软件——MINIMAT

张志良 孙根娣
(计算机科学系) (数学系)

提 要 通过实例体会MINIMAT软件面向矩阵的特点及其优越性.

关键词 特征值;特征向量;空间旋转;MINIMAT

中图法分类号 TP317;TP39

将计算机引入代数研究和教学已越来越普遍,如普遍使用的有Pascal语言、C语言等计算机高级语言.编制如求逆矩阵、求特征值、特征向量、分解一个矩阵(如QR分解、LU分解)、解线性方程组、矩阵乘幂等等程序.编制这些程序不太简单,要花费大量的时间,而且须将本来是计算的问题转化为编程问题,失去了"计算"的意义.良好的计算机辅助教学软件就可避免这种缺点.MINIMAT计算机辅助教学软件,由美国Joel W. Robbin研制.它以矩阵为处理对象.除了具有通常可用来编制程序的语句外,它的主要优点是具有丰富的标准函数和各种运算.

例1 简单迭代法收敛的必要充分条件中的计算.

给定n阶线性代数方程组

$$AX = b$$

变换成迭代形式

$$X = BX + g \tag{1}$$

对任何初始向量$X^{(0)}$,由迭代公式

$$X^{(m+1)} = BX^{(m)} + g \tag{2}$$

$$m=0,1,2,\cdots$$

得出向量序列

$$X^{(0)}, X^{(1)}, X^{(2)}, \cdots X^{(m)}, X^{(m+1)} \tag{3}$$

迭代序列(3)收敛于方程组(1)的解的必要充分条件:

$$\max_i |\lambda_i| < 1$$

其中λ_i为矩阵B的特征值.

本文于1993年5月20日收到.

简单迭代法时

$$B = D^{-1}(L + U) \tag{4}$$

其中

D：A 的主对角线元素构成的对角方阵

$-L$：A 的主对角线以下的元素所构成的下三角方阵

$-U$：A 的主对角线以上的元素所构成的上三角方阵

$$A = D - L - D$$

设方程组

$$X_1 + 2X_2 - 3X_3 = 8$$
$$2X_1 - X_2 + 4X_3 = -4$$
$$3X_1 + 5X_2 - 3X_3 = 16$$

用 MINIMAT 计算必要充分条件如下(其中＃)是 MINIMAT 的提示符).

```
#〉    A=[1,2,-3;2,-1,4;3,5,-3];
#〉    D=[1,0,0;0,-1,0;0,0,-3];
#〉    L=[0,0,0;-2,0,0;-3,-5,0];
#〉    U=[0,-2,3;0,0,-4;0,0,0];
#〉    MAX(EIG(INV(D)*(L+D)))
```

得到结果

$$\text{ans} = 2.540$$

所以简单迭代法不收敛.

上面的，$L + U$ 是矩阵相加，INV(D)是求 D 的逆矩阵，INV(D)＊($L + U$)是将二者的结果相乘，EIG(INV(D)＊($L + U$))是求上述乘得的结果矩阵的特征值，而 MAX(EIG(INV(D)＊($L + U$)))求得特征模中的最大值.

例2 MINIMAT 语言，还可方便地由已知矩阵构造出它的各种所需子矩阵.

用克莱姆规则解上述例举的线性方程组，所用的语句：

```
#〉    D=[1,2,-3,8;2,-1,4,-4;3,5,-3,16];
```

生成增广矩阵.

```
#〉    D0=D([1,2,3],[1,2,3]);
```

由增广矩阵 D 的本1,2,3行和第1,2,3列生成系数矩阵 D0

```
#〉    D1=D([1,2,3],[4,2,3]);
```

由增广矩阵 D 的第1,2,3行和第4,2,3列生成矩阵 D1

```
#〉    D2=D([1,2,3],[1,4,3]);
```

由 D 的第1,2,3行和第1,4,3列生成矩阵 D2.

```
#〉    D3=D([1,2,3],[1,2,4])
#〉    X1=DET(D1)/DET(D0),
X2=DET(D2)/DET(D0),
X3=DET(D3)/DET(D0),
```

得

$$X1 = 1$$

$$X2 = 2$$

$$X3 = -1$$

上述的 DET ($D0$) 表示求矩阵 $D0$ 的行列式值."/"表示除法运算. D([1,2,3],[4,2,3]) 中的[1,2,3]和[4,2,3]表示分别取 D 矩阵中的第 1,2,3 行和第 4,2,3 列构成一个新矩阵.

例3 由正交矩阵所表示的空间旋转的计算.

行列式为1的3×3阶正交矩阵 A 是一个空间旋转.

设 A 的特征值：$\lambda_1 = 1$ $\lambda_2 = a + b_i$ $\lambda_3 = a - b_i$ 对应的特征向量分别为 $\xi 1, \xi 2, \xi 3$.

则空间旋转的旋转轴是特征值1所对应的特征向量 $\xi 1$.

旋转角为 θ $\cos\theta = a$

下面利用 MINIMAT 随机构造一个3×3阶矩阵，再生成正交矩阵，然后求出特征值和特征向量.

(1)随机生成一个3×3矩阵

```
#〉W=RAND(3,3)
```

得

$$W = \begin{pmatrix} 0.619 & 0.858 & 0.341 \\ 0.896 & 0.822 & 0.802 \\ 0.493 & 0.312 & 0.832 \end{pmatrix}$$

(2)由 W 产生正交矩阵 A

```
#〉A=QR(W)
```

$$A = \begin{pmatrix} -0.163 & -0.972 & -0.170 \\ -0.864 & 0.057 & 0.500 \\ -0.476 & 0.229 & -0.849 \end{pmatrix}$$

(3)求 A 的特征向量和特征值

```
#〉[V,D]=EIG(A)
```

其中，矩阵 V 的每一列为 A 的一个特征向量. 矩阵 D 是一个对角阵，它的对角项分别为 A 的特征值. 得

特征向量

$$\xi_1 = \begin{pmatrix} -0.887 \\ 1 \\ 0.352 \end{pmatrix}, \xi_2 = \begin{pmatrix} 0.588 - 0.014i \\ 0.458 - 0.266i \\ 0.181 + 0.719i \end{pmatrix}, \xi_3 = \begin{pmatrix} -0.009 + 0.362i \\ -0.163 + 0.282i \\ 0.442 + 0.111i \end{pmatrix}$$

特征值

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = -0.977 + 0.211i, \quad \lambda_3 = -0.977 - 0.211i$$

所以，A 表示的空间旋转的旋转轴为向量

$$\xi_1 = \begin{pmatrix} -0.887 \\ 1 \\ 0.352 \end{pmatrix} \qquad \text{旋转角 } \theta: \cos\theta = -0.977$$

参 考 文 献

[1] Jael W. Robbin, MINIMAT Reference Manual, Department of Mathematics, University of Wisconsin Madison, WI 53706, 1988, 11, 27

[2] J. P. Fillmor, A note on Rotation Matrices, *IEEE* CG&A, 1984; 30—31

[3] 张德荣等,计算方法与算法语言,人民教育出版社,1981

[4] 张禾瑞,郝炳新,高等代数(第3版),高等教育出版社,1983

MINIMAT——A Computer Assisted Instruction Software Facing Matrices

Zhang Zhiliang (Department of Computer Science)

Sun Gendi (Department of Mathematics)

Abstract

The software MINIMAT is mainly intended for handling matrices. With the help of a few examples, the characteristics and advantages of the software are discussed in this paper.

Keywords MINIMAT; characteristic value; characteristic variable; space rotation