双边多人讨价还价

毛亮[*]

摘要：本文通过一个扩展了的讨价还价模型，讨论了在由任意有限数量的消费者和生产者组成的局部市场中的交易问题。我们把这个双边市场交易描述为一个联盟形式的博弈，并用核作为解概念来考察博弈的结果。对于任意的消费者和生产者的数量，我们证明了讨价还价博弈的核是非空的，并给出了构造出这个核的对称子集的一个统一的方法。与以往文献中的结论不同的是，完全竞争假设在我们的模型中并不成立，即使当双方参与人的数量都趋于无穷大时也是如此。

关键词：讨价还价　核　完全竞争假设

一、引言

在用经济学考察一种特定商品的市场交易的时候，最常用的工具是微观经济理论中的供给需求分析，可以简单的归纳如下。每个消费者都把商品的价格看作给定的，即满足完全竞争假设，并自主决定购买的数量，并由此可以得到一条市场需求曲线。对生产者的行为假设取决于市场结构，如果该商品的市场上只有一个或几个生产者，则每个生产者对产品的价格都有一定的市场力量，给定上述市场需求曲线，生产者可以通过最优化决策或博弈来决定产品的价格。如果生产者数量很多，则每个生产者把交易价格看作给定的，即也满足完全竞争假设，并自主决定生产的数量，这时可以得到一条市场供给曲线，并与市场需求曲线一起决定价格。

上述传统理论可能存在两个问题。第一个问题是，完全竞争假设是否成立，以及什么条件下成立。按照通常的理解，当交易的一方人数很大时，每个人都没有能力影响价格，因此对每个人来说价格都是给定的。这一解释虽然直观，但仍然存在问题。首先，这使得我们难以对人数有限的市场交易进行分析，但在现实中人数有限的情况是很普遍的。其次，即使是在交易的一方人数很大的时候，虽然单个参与人对交易价格的影响很小，但参与人可能有动力形成联盟来对价格施加影响。在现实中，消费者联盟和生产者联盟的现象都是存在的。例如，消费者为了提高自身的谈判能力组成联盟，以团购的方式与生产者进行交易。[1]

第二个问题是，传统理论在很多情况下认为交易的价格和数量的决定是分离的，而不把交易价格和交易量看作需要同时做出选择的变量。例如，消费者可以自由选择购买的数量，但不能影响交易的价格；垄断厂商可以选择交易价格，但不能影响消费者的购买量，只能把消费者的需求曲线看作是给定的。然而事实上，很多时候交易价格和数量是相互关联的，即每个交易者或多或少都能同时对交易价格和数量施加一定的影响。在市场上随处可见各类“多买打折”现象就是这方面的一个例子。

以上提出的传统理论的两个问题之所以产生的一个共同的原因可能是，这一理论仅简单的从单个个体的最优化决策问题出发推导出整个理论[2]，而忽略了个体之间的相互作用，更

[*] 北京大学中国经济研究中心，联系方式：maoliang99@gmail.com，010-52763565。作者感谢北京大学中国经济研究中心的平新乔教授的评论。文中一切错误由作者自己承担。

[1] 例如，http://www.economist.com/printedition/PrinterFriendly.cfm?story_id=7121669 给出了一个消费者利用互联网进行团购，以获得更为优惠的价格的现象。

[2] 传统微观经济理论中的基础部分，消费者理论和生产者理论，都是以单个消费者或厂商的个体最优化问

具体的说是忽略了在市场交易中普遍存在的讨价还价和联盟现象。为了克服传统理论的这方面的不足，至少在某些情况下，我们可以考虑用博弈论中的讨价还价理论来处理市场交易问题。以一个消费者和一个生产者，并且交易商品数量给定的简单交易为例，我们可以把交易价格作为双方讨价还价的对象，这样就可以用 Nash（1950）提出的讨价还价的框架来讨论这一交易问题。

但是，Nash（1950）中的讨价还价理论也无法很好的处理市场交易问题。原因主要有两点。第一，在市场交易中，交易双方的人数一般都多于一个人，Nash 讨价还价框架不能直接推广到多人的情况中去，因为它在讨论联盟问题的时候存在着困难[3]。第二，正如上面所提到的，交易双方并不仅对交易价格进行讨价还价，而是同时对交易价格和交易量进行讨价还价。

本文的目的，就是要对 Nash（1950）的讨价还价模型框架进行扩展，希望能在一定程度上克服上面提到的两个不足，并用这一扩展了的模型对市场交易进行分析。在我们的扩展了的讨价还价模型中，消费者和生产者的数量都可以是任意的正整数，交易的任意一方的每个参与人可以和另一方的任意个参与人进行交易，以讨价还价来同时决定交易的价格和数量。我们采用合作博弈的联盟形式来表述这个讨价还价博弈，并选择核（core）作为解概念来考察交易的结果。

在博弈论中，有很多用博弈的联盟形式与核来对市场交易进行分析的文献，例如 Debreu 和 Scarf（1963），Shapley 和 Shubik（1969）。这些文献一般都是从一般均衡的角度来进行分析的，其缺点在于，如果我们要对一个市场进行分析，我们必须同时对经济中其他商品的市场进行分析。此外，这类文献的一个比较经典的结论是核等价定理，它为完全竞争假设提供了一种博弈论的基础。但是核等价定理似乎是在比较特殊的条件下的得到的，例如各类参与人的人数相等并都趋于无穷，它无法应用到比较一般的市场交易中去。例如，在有一个垄断生产者和大量消费者的市场中，通常我们认为消费者是价格接收者，但这一点无法用上述核等价定理来说明。在本文的模型中，为了避免以上的问题，我们不采用一般均衡的分析，而采用局部的讨价还价分析，并为了简化分析，假设消费者的效用是拟线性的，因而可以避免收入效用，把这个局部市场的交易分离出来进行分析。当然，这种简化也为我们的模型带来了一些局限性和特殊性，但即使只通过这个比较特殊的模型，我们已经可以得到一些与传统理论不一致的结论了。

除此以外，还有相当数量的文献（例如，Bloch 和 Ghosal, 1997，Engl 和 Scotchmer, 1997, Gale, 2000 等）和本文一样从消费者和生产者的双边博弈的角度考察了市场交易。例如，Bloch 和 Ghosal（1997）采用的是两个市场的模型，而本文只考察单一的市场；Engl 和 Scotchmer（1997）以完全竞争假设为出发点进行分析，而本文并不预设完全竞争假设成立；Gale（2000）以参与人两两匹配的方式把多人讨价还价问题还原为两人讨价还价问题进行讨论，而本文认为市场交易和讨价还价可能在多于两人的联盟中进行。本文和这些文献在方法和模型上各有特点，可以认为是各自从不同的角度对对市场交易进行了考察。

本文的结构如下。第二节给出了双边交易市场上的讨价还价的基本模型设定。第三节把博弈用联盟形式进行了表述，并给出了特征函数的一些性质。第四节给出了核与对称子核的定义，并初步讨论了它们的一些性质。第五节讨论了博弈的核的非空性以及求解核的一般方法，并在几个特殊的例子中求解出了博弈的对称子核。第六节对前文得到的一些结论的含义进行了讨论，并小结全文。

题作为出发点的。

[3] 读者可以参看 Myerson(1991)的 9.1 节对此问题的说明和相应的例子。

二、基本模型设定

在某种无限可分的产品的市场上，有 n 个同质的消费者和 m 个同质的生产者。消费者集合和生产者集合可以分别表示为 $N=\left\{i \middle| i=1,2,...,n\right\}$ 和 $M=\left\{j \middle| j=1,2,...,m\right\}$[4]。设消费者 i 和生产者 j 之间的产品交易量为 $k_{ij}\in\mathbb{R}^{+}$，单位产品的交易价格为 $p_{ij}\in\mathbb{R}^{+}$，则消费者 i 的支付等于

$$u_i=f\left(\sum_{j\in M}k_{ij}\right)-\sum_{j\in M}p_{ij}k_{ij}\text{，}\quad \forall i\in N\text{，} \tag{1}$$

而生产者 j 的支付等于

$$\pi_j=\sum_{i\in N}p_{ij}k_{ij}-c\left(\sum_{i\in N}k_{ij}\right)\text{，}\quad \forall j\in M\text{。} \tag{2}$$

我们对消费者评价函数 $f(\cdot)$ 和生产者成本函数 $c(\cdot)$ 作如下的假设（参见图 1）。

假设 1：$f'(v)>0$，$f''(v)<0$，$f(0)=0$，$\lim\limits_{x\to 0^{+}}f'(x)=+\infty$，$\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=0$。

假设 2：$c'(k)>0$，$c''(k)\geq 0$，$c(0)=0$，$c'(0)=0$，$\lim\limits_{x\to+\infty}c'(x)=+\infty$。

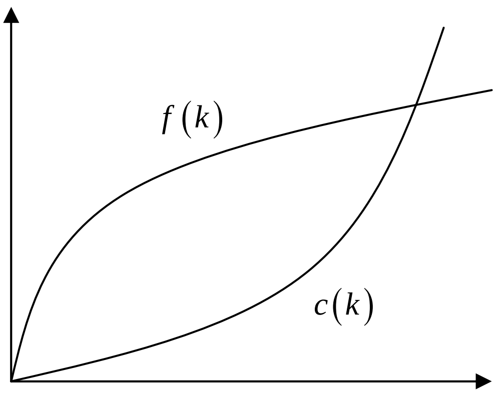

图 1：消费者收益函数和生产者成本函数

值得注意的是，上面对生产者的假设是与传统的生产者理论相符的，而对消费者的假设则需稍作说明。我们可以和传统的消费者理论一样假设每个同质的消费者具有预算 I，并且效用是 $\bar{u}(x,v)$，其中 v 是我们上面所考虑那一种产品的数量，而 x 是货币（代表所有其他消费品，其价格为 1）的数量。进一步假设效用满足拟线性的形式：$\bar{u}(x,v)=x+\phi(v)$。另一方面，将消费者的预算约束 $x+\sum_{j\in M}p_{ij}k_{ij}=I$ 代入上面给出的效用表达式中，可以得到 $\bar{u}(x,v)=I+\phi(v)-\sum_{j\in M}p_{ij}k_{ij}$。这样，我们只要令 $u(x,v)=\bar{u}(x,v)-I-\phi(0)$，并以此来

---

[4] 在本文中，我们用大写字母 N,M,S,T 等表示集合，而用相应的小写字母表示该集合元素的个数。

表示消费者的支付，就可得到我们上面模型中所假设的形式，其中 $f(v)=\phi(v)-\phi(0)$（由此可以验证假设 2 是合理的）。

N 和 M 中的参与人同时对交易量和交易价格进行讨价还价，而讨价还价的结果可以用交易量组合 $k=(k_{ij})_{i\in N,\, j\in M}\in\mathbb{R}_+^{nm}$ 和交易价格组合 $p=(p_{ij})_{i\in N,\, j\in M}\in\mathbb{R}_+^{nm}$ 来表示。如果消费者 i 和生产者 j 之间没有进行交易，即 $k_{ij}=0$，则不妨假设 $p_{ij}=0$。我们用

$$\Omega_{n,m}=\left\{(k,p)\in\mathbb{R}_+^{nm}\times\mathbb{R}_+^{nm}\right\}$$

来表示讨价还价的所有可能的结果。$\Omega_{n,m}$ 中的任意一组 (k,p) 称为一个配置（allocation）。我们可以把这个讨价还价博弈表示为 $G=\left\{N\bigcup M,\Omega_{n,m},f(\cdot),c(\cdot)\right\}$，而该博弈的一个解 φ 则是将博弈与 $\Omega_{n,m}$ 联系起来的一个对应：$\varphi(G)\subset\Omega_{n,m}$。

当 $n=m=1$，并且 k_{11} 固定的时候，消费者和生产者对 p_{11} 进行讨价还价的博弈就是一个传统的 Nash 两人讨价还价问题。因此上述模型设定可以看作是 Nash（1950）讨价还价问题的推广，一方面我们把交易双方的人数都推广到任意的整数，另一方面参与人不是只对交易价格进行讨价还价，而是对交易量和交易价格同时进行讨价还价。我们把这个推广了的博弈称为双边多人讨价还价（multiplayer bilateral bargaining），并简单的记为 $G_{n,m}$。

三、博弈的联盟形式

对于博弈 $G_{n,m}$，给定任意 $S\subset N$，$T\subset M$，当 $S\bigcup T$ 中参与人只在内部进行交易时[5]，其支付总和是

$$\begin{aligned}\Sigma_{s,t}&=\sum_{j\in T}\pi_j+\sum_{i\in S}u_i\\&=\sum_{i\in S}f\left(\sum_{j\in T}k_{ij}\right)-\sum_{j\in T}c\left(\sum_{i\in S}k_{ij}\right)。\end{aligned}\tag{3}$$

容易看出，$\Sigma_{s,t}$ 只由 $k=(k_{ij})_{i\in S,\, j\in T}\in\mathbb{R}_+^{st}$ 决定，而与价格向量无关。

一个很自然的问题是，怎样选取 $k\in\mathbb{R}_+^{st}$ 使得 $\sum_{s,t}$ 最大化。为此，我们先给出最优（内点）解的一阶条件

$$\frac{\partial\Sigma_{s,t}}{\partial k_{ij}}=f'\left(\sum_{w\in T}k_{iw}\right)-c'\left(\sum_{y\in S}k_{yj}\right)=0,\qquad\forall i\in S,\, j\in T。\tag{4}$$

[5] 也就是说，$S\bigcup T$ 内的参与人与 $S\bigcup T$ 外的参与人的交易量全部为零。

由这些一阶条件以及假设 1 和 2，在$\sum_{s,t}$最大时，每个消费者$i \in S$的总购买量$\sum_{w \in T} k_{iw}$都是相等的，我们下面记为$a_{s,t}$；每个生产者$j \in T$的总产量$\sum_{y \in S} k_{yj}$也是相等的，记为$b_{s,t}$。显然成立：

$$f'\left(a_{s,t}\right) = c'\left(b_{s,t}\right), \tag{5}$$

$$sa_{s,t} = tb_{s,t}。 \tag{6}$$

根据假设 1 和 2，$\forall s,t \in \mathbb{N}$，满足(5)和(6)的正实数$a_{s,t}$和$b_{s,t}$存在并且唯一。另一方面，满足

$$\sum_{j \in T} k_{ij} = a_{s,t}, \quad \sum_{i \in S} k_{ij} = b_{s,t} \tag{7}$$

的$k \in \mathbb{R}_+^{st}$一般并不唯一（这是因为，(7)中有$s+t-1$个独立方程[6]，但有st个未知变量k_{ij}。当$s>1$且$t>1$时，$s+t-1<st$。只有当$s=1$或$t=1$时，$k \in \mathbb{R}_+^{st}$才能被唯一确定）。令

$$\mathrm{K}_{s,t} = \left\{ k \in \mathbb{R}_+^{st} \mid \sum_{l \in T} k_{il} = a_{s,t}, \sum_{l \in S} k_{lj} = b_{s,t}, \forall i \in S, j \in T \right\}。$$

性质 1：$\forall S \subset N, T \subset M$，$\mathrm{K}_{s,t} = \arg\max_k \sum_{s,t}$。

证明：如果$k \in \mathrm{K}_{s,t}$，则k满足(4)中所有的st个等式，故k是函数$\sum_{s,t}\left(k\right)$的驻点。函数$\sum_{s,t}\left(x\right)$在$\mathbb{R}_+^{st}$上的最大值不是在驻点上取到，就是在边界点（某些自变量等于 0 的点）上取到。比较所有可能的边界点上的函数$\sum_{s,t}\left(x\right)$的值，容易发现它们不会比$k \in K_{s,t}$的函数处的函数值更大。因而$k \in \arg\max_k \sum_{s,t}$。

反过来，如果$k \in \arg\max_k \sum_{s,t}$，则(4)中$st$个等式一定成立，因而$k \in \mathrm{K}_{s,t}$。■

对任意非空的$S \subset N, T \subset M$，下面我们将$\sum_{s,t}$的最大值记为$\sum_{s,t}^*$。如果$S = \varnothing$或$T = \varnothing$，则规定$\sum_{s,t}^* = 0$。$\sum_{\cdot,\cdot}^*$相当于传统联盟博弈中的特征函数，只不过传统的特征函数是针对一个联盟而言的，而这里的$\sum_{s,t}^*$是关于S和T两个联盟的二元特征函数。我们可以把博弈$G_{n,m}$用联盟形式表示为$\left\{N \cup M, \sum_{\cdot,\cdot}^*\right\}$。下面我们给出特征函数$\sum_{\cdot,\cdot}^*$的一些性质，在

[6] (7)中共有$s+t$个方程，但其中有一个不独立，因为$s\sum_{j \in T} k_{ij} = sa_{s,t} = tb_{s,t} = t\sum_{i \in S} k_{ij}$。

此之前先给出一个关于$a_{s,t}$和$b_{s,t}$的性质的引理。

引理 1：（i）$\forall d,s,t\in\mathbb{N}$，$a_{ds,dt}=a_{s,t}$，$b_{ds,dt}=b_{s,t}$。

（ii）给定$t\in\mathbb{N}$，$a_{s,t}$是s的严格减函数，$sa_{s,t}$是s的严格增函数，$b_{s,t}$是s的严格增函数，$b_{s,t}/s$是s的严格减函数。

（iii）给定$s\in\mathbb{N}$，$a_{s,t}$是t的严格增函数，$a_{s,t}/t$是t的严格减函数，$b_{s,t}$是t的严格减函数，$tb_{s,t}$是t的严格增函数。

证明：（i）直接由(5)(6)的解的唯一性可得。

（ii）$\forall s_1,s_2\in\mathbb{N}$，$s_1<s_2$，我们要证明$a_{s_1,t}>a_{s_2,t}$，$s_1a_{s_1,t}<s_2a_{s_2,t}$。用反证法，首先假设$a_{s_1,t}\le a_{s_2,t}$，则根据$f'\left(a_{s_1,t}\right)=c'\left(\frac{s_1a_{s_1,t}}{t}\right)$，$f'\left(a_{s_2,t}\right)=c'\left(\frac{s_2a_{s_2,t}}{t}\right)$和假设 1 和 2，成立$s_1a_{s_1,t}\ge s_2a_{s_2,t}$，再根据$s_1<s_2$，成立$a_{s_1,t}>a_{s_2,t}$，与假设的$a_{s_1,t}\le a_{s_2,t}$矛盾，因此假设不成立，$a_{s_1,t}>a_{s_2,t}$。再假设$s_1a_{s_1,t}\ge s_2a_{s_2,t}$，和上面类似的可以得到$a_{s_1,t}\le a_{s_2,t}$，与已经得到的$a_{s_1,t}>a_{s_2,t}$矛盾，因此$s_1a_{s_1,t}<s_2a_{s_2,t}$。后一半结论可以直接由前一半结论和$sa_{s,t}=tb_{s,t}$一起得到。

（iii）$\forall t_1,t_2\in\mathbb{N}$，$t_1<t_2$，我们要证明$a_{s,t_1}<a_{s,t_2}$，$\frac{a_{s,t_1}}{t_1}>\frac{a_{s,t_2}}{t_2}$。和（ii）的证明一样采用反证法即可。后一半结论可以直接由前一半结论和$sa_{s,t}=tb_{s,t}$一起得到。 ■

性质 2（复制经济）：$d\sum_{s,t}^{*}=\sum_{ds,dt}^{*}$，$\forall d,s,t\in\mathbb{N}$。

证明：任意选取$k\in K_{s,t}$，即$\sum_{l\in T}k_{il}=a_{s,t},\sum_{l\in S}k_{lj}=b_{s,t}$，$\forall i\in S$，$\forall j\in T$，则$\sum_{s,t}^{*}=\sum_{s,t}\left(k\right)$。将$S\times T$复制$d$倍，得到$\bigcup_{l=1}^{d}S_l\times\bigcup_{l=1}^{d}T_l$，并令$\bar{k}\in\mathbb{R}_{+}^{ds\times dt}$，其中如果存在$l=1,2,\ldots,d$，$i\in S_l$且$j\in T_l$，则$\bar{k}_{ij}=k_{ij}$，否则$\bar{k}_{ij}=0$。从而$\forall i\in\bigcup_{l=1}^{d}S_l$，$\forall j\in\bigcup_{l=1}^{d}T_l$，$\sum_{y\in\bigcup_{l=1}^{d}T_l}\bar{k}_{iy}=a_{s,t}=a_{ds,dt}$，$\sum_{w\in\bigcup_{l=1}^{d}S_l}\bar{k}_{wj}=b_{s,t}=b_{ds,dt}$，从而$\bar{k}\in K_{ds,dt}$，则$\sum_{ds,dt}^{*}=\sum_{ds,dt}\left(\bar{k}\right)$。另一方面，$\bar{k}$是对$k$的简单复制，因而必然成立$d\sum_{s,t}\left(k\right)=\sum_{ds,dt}\left(\bar{k}\right)$。这样我们就得到了结论。 ■

性质 3（二元超可加性）：设 $s = s_1 + s_2$，$t = t_1 + t_2$，$s_i, t_i \in \mathbb{N}$，$i = 1, 2$，则 $\sum_{s,t}^{*} \geq \sum_{s_1,t_1}^{*} + \sum_{s_2,t_2}^{*}$，并且当且仅当 $s_1 / t_1 = s_2 / t_2 = s / t$ 时等号成立。

证明：根据 $\sum_{s,t}^{*}$ 的定义，超可加性 $\sum_{s,t}^{*} \geq \sum_{s_1,t_1}^{*} + \sum_{s_1,t_2}^{*}$ 成立是显然的，下面我们只讨论等号成立的条件。

如果 $s_1 / t_1 = s_2 / t_2 = s / t$，我们可以找到 $s_0, t_0 \in \mathbb{N}$，$s_0 / t_0 = s / t$，且 s_0 和 t_0 互质。设 $\left(s_i, t_i\right) = d_i \left(s_0, t_0\right)$，其中 $d_i \in \mathbb{N}$，$i = 1, 2$，则 $\left(s, t\right) = \left(d_1 + d_2\right)\left(s_0, t_0\right)$。根据性质 2，$\sum_{s,t}^{*} = \left(d_1 + d_2\right) \sum_{s_0,t_0}^{*} = d_1 \sum_{s_0,t_0}^{*} + d_2 \sum_{s_0,t_0}^{*} = \sum_{s_1,t_1}^{*} + \sum_{s_2,t_2}^{*}$。

反过来，如果 $s_1 / t_1 \neq s_2 / t_2$，设 $\sum_{s_1,t_1}^{*} = \sum_{s_1,t_1}\left(k^1\right)$，$\sum_{s_2,t_2}^{*} = \sum_{s_2,t_2}\left(k^2\right)$，其中 $k^1 \in K_{s_1,t_1}$，$k^2 \in K_{s_2,t_2}$。记 $k \in \mathbb{R}_{+}^{st}$，其中当 $i \in S_1, j \in T_1$ 时，$k_{ij} = k_{ij}^1$，而当 $i \in S_2, j \in T_2$ 时，$k_{ij} = k_{ij}^2$，在其他情况下，$k_{ij} = 0$。因而，$\sum_{s,t}\left(k\right) = \sum_{s_1,t_1}\left(k^1\right) + \sum_{s_2,t_2}\left(k^2\right) = \sum_{s_1,t_1}^{*} + \sum_{s_2,t_2}^{*}$。但另一方面，当 $i \in S_1$ 时，$\sum\limits_{l \in T} k_{il} = a_{s_1,t_1}$，而当 $i \in S_2$ 时，$\sum\limits_{l \in T} k_{il} = a_{s_2,t_2}$，由于 $s_1 / t_1 \neq s_2 / t_2$，根据引理 1，$a_{s_1,t_1} = a_{s_1 s_2, t_1 s_2} \neq a_{s_1 s_2, s_1 t_2} = a_{s_2,t_2}$，从而 $k \notin K_{s,t}$。再根据性质 1，$\sum_{s,t}\left(k\right) < \sum_{s,t}^{*}$，从而 $\sum_{s_1,t_1}^{*} + \sum_{s_2,t_2}^{*} < \sum_{s,t}^{*}$。■

性质 4（二元严格单调性）：对任意 $\left(s_1, t_1\right) \neq \left(s_2, t_2\right)$，$s_1 \geq s_2$，$t_1 \geq t_2$，都成立 $\sum_{s_1,t_1}^{*} > \sum_{s_2,t_2}^{*}$。

证明：对任意的 $\left(s_1, t_1\right) \neq \left(s_2, t_2\right)$，$s_1 \geq s_2$，$t_1 \geq t_2$，由对称性，不妨设 $S_2 \subset S_1$，$T_2 \subset T_1$。如果 $S_1 \setminus S_2$ 不是空集，设 $i \in S_1 \setminus S_2$。设 $S_2 \bigcup T_2$ 中的参与人按照达到 $\sum_{s_2,t_2}^{*}$ 的某种方案来进行生产和交易，现在 i 可以提出下面这种新的方案：在原来方案的基础上，T_2 中每个生产者再多生产 $\varepsilon > 0$ 的产量销售给 i。根据假设 1 和 2，只要 ε 足够小，总可以找到适当的交易价格使得 i 和 T_2 中每个参与人的支付都能增加。如果 $S_1 \setminus S_2$ 是空集，则 $T_1 \setminus T_2$ 不是空集，可以类似的得到证明。■

性质 5（一元变化率递减性）：给定 $s \in \mathbb{N}$，$\sum_{s,t}^{*} - \sum_{s,t-1}^{*}$ 是 t 的严格减函数；给定 $t \in \mathbb{N}$，$\sum_{s,t}^{*} - \sum_{s-1,t}^{*}$ 是 s 的严格减函数。

证明：给定 $s \in \mathbb{N}$，设 $t > 1$，$t \in \mathbb{N}$，并记 $\Delta_t\left(s, t\right) = \sum_{s,t}^{*} - \sum_{s,t-1}^{*}$，则只要我们能够证明 $\Delta_t\left(s, t\right) > \Delta_t\left(s, t+1\right)$，就可以依次逐步得到 $\Delta_t\left(s, t\right) > \Delta_t\left(s, t+h\right)$，$\forall h \in \mathbb{N}$，从而证明

了$\Delta_t(s,t)=\sum_{s,t}^{*}-\sum_{s,t-1}^{*}$是$t$的严格减函数。根据性质 2 和性质 3，我们得到

$$\Delta_t(s,t)-\Delta_t(s,t+1)=2\sum_{s,t}^{*}-\sum_{s,t-1}^{*}-\sum_{s,t+1}^{*}=\sum_{2s,2t}^{*}-\sum_{s,t-1}^{*}-\sum_{s,t+1}^{*}>0,$$

即$\Delta_t(s,t)>\Delta_t(s,t+1)$。这样我们就证明了前一半结论，而后一半结论的证明是完全类似的。 ■

四、核与对称子核

给定博弈$G_{n,m}$，定义函数$V:2^N\times 2^M\times\mathbb{R}_+^{nm}\times\mathbb{R}_+^{nm}\to\mathbb{R}$如下：给定$(k,p)\in\Omega_{n,m}$，$S\subset N$和$T\subset M$，令$V(S,T;k,p)=\sum_{i\in S}u_i(k,p)+\sum_{j\in T}\pi_j(k,p)$。函数$V(S,T;k,p)$表示当配置为$(k,p)\in\Omega_{n,m}$时，$S\bigcup T$中参与人的支付总和。注意这时交易并不局限在$S\bigcup T$内部，因此$V(S,T;k,p)$一般不等于$\sum_{s,t}$。

给定博弈$G_{n,m}$和配置$(k,p)\in\Omega_{n,m}$，如果存在非空的$S\subset N$，$T\subset M$和$(k',p')\in\Omega_{s,t}$，使得$\pi_j(k',p')>\pi_j(k,p)$，$\forall j\in T$，且$u_i(k',p')>u_i(k,p)$，$\forall i\in S$，则称(k,p)通过S和T被(k',p')直接占优，也可以简称(k,p)被直接占优。我们把不被任何配置直接占优的$(k,p)\in\Omega_{n,m}$全体的集合称为博弈G的核（core），记为$C(G)$。等价的，我们给出如下的定义。

定义 1：$(k,p)\in C(G)$，当且仅当$\forall S\subset N$和$T\subset M$：

$$V(S,T;k,p)\geq\sum_{s,t}^{*}。\tag{8}$$

在本文中，我们把核$C(G)$看作是博弈G的合理结果的集合。核中的每个配置(k,p)都可以看作是参与人在某种特定的讨价还价力量的分布之下的谈判结果，其中具体的结果是哪个不在我们关心的范围之内。反过来，一个配置不在核中，表明无论讨价还价力量的分布如何，这个配置都不是一个可能的结果。

引理 2：如果$(k,p)\in C(G)$，则$k\in\mathrm{K}_{n,m}$。

证明：根据核的定义，如果$(k,p)\in C(G)$，则$V(N,M;k,p)=\sum_{n,m}(k)\geq\sum_{n,m}^{*}$，再根据性质 1，$k\in\mathrm{K}_{n,m}$。 ■

根据引理 2，k最大化所有参与人的总支付是$(k,p)\in\Omega_{n,m}$在核中的必要条件。但这并

不是充分条件，因为(k,p)是否被占优显然与p也有关系。除了$k\in \mathrm{K}_{n,m}$外，$(k,p)\in C(G)$的最明显的必要条件是个人理性，即$\forall i\in N, j\in M$：$u_i(k,p)\ge 0$，$\pi_i(k,p)\ge 0$。

为了便于后文的分析，我们记$\theta_i=\sum_{j\in M}p_{ij}k_{ij}$，$\eta_j=\sum_{i\in N}p_{ij}k_{ij}$，$\forall i\in N, j\in M$。这里$\theta_i$表示消费者$i$在交易中所支付的总额，而$\eta_j$表示消费者$j$在交易中收入的总额，显然成立

$$\sum_{i\in N}\theta_i=\sum_{j\in M}\eta_j\text{。} \tag{9}$$

结合引理 2 和定义 1 可以知道，$(k,p)\in C(G)$当且仅当$\forall S\subset N$和$T\subset M$：

$$\sum_{j\in T}\eta_j-\sum_{i\in S}\theta_i\ge \Sigma_{s,t}^{*}-sf\left(a_{n,m}\right)+tc\left(b_{n,m}\right)\text{。} \tag{10}$$

如果在某个配置$(k,p)\in\Omega_{n,m}$下，所有的消费者的θ_i都相等，所有生产者的η_j也都相等，则我们称(k,p)是一个对称配置。对称配置的相同的θ_i可以记为θ_0，相同的η_j可以记为η_0，则根据(9)，成立

$$n\theta_0=m\eta_0\text{。} \tag{11}$$

我们把一个博弈$G_{n,m}$的核$C\left(G_{n,m}\right)$中的对称配置全体称为该博弈的对称子核，记为$C^S\left(G_{n,m}\right)$。利用(10)，一个对称配置$(k,p)\in C^S\left(G_{n,m}\right)$，当且仅当$\forall S\subset N$和$T\subset M$：

$$t\eta_0-s\theta_0\ge \Sigma_{s,t}^{*}-sf\left(a_{n,m}\right)+tc\left(b_{n,m}\right)\text{。} \tag{12}$$

引理 3：如果一个博弈$G_{n,m}$的核$C\left(G_{n,m}\right)$非空，则其对称子核$C^S\left(G_{n,m}\right)$也一定非空。

证明：由于$C\left(G_{n,m}\right)$非空，设$(k,p)\in C\left(G_{n,m}\right)$，$\forall i\in N, j\in M$可得到相应的$\theta_i$与$\eta_j$，且$\forall S\subset N$和$T\subset M$，(10)成立。构造配置$\left(\widehat{k},\widehat{p}\right)\in\Omega_{n,m}$如下。$\forall i\in N, j\in M$，令

$$\widehat{k}_{ij}=\frac{a_{n,m}}{m}=\frac{b_{n,m}}{n}\text{，}\quad \widehat{p}_{ij}=\frac{1}{na_{n,m}}\sum_{i\in N}\theta_i=\frac{1}{mb_{n,m}}\sum_{j\in M}\eta_j\text{，} \tag{13}$$

则容易验证$\left(\widehat{k},\widehat{p}\right)$是对称配置，可以令

$$\widehat{\theta}_0=\sum_{j\in M}\widehat{p}_{ij}\widehat{k}_{ij}=\frac{1}{n}\sum_{i\in N}\theta_i\text{，}\quad \widehat{\eta}_0=\sum_{i\in N}\widehat{p}_{ij}\widehat{k}_{ij}=\frac{1}{m}\sum_{j\in M}\eta_j\text{。} \tag{14}$$

$\forall S\subset N$和$T\subset M$，

$$t\widehat{\eta}_0 - s\widehat{\theta}_0 = \frac{t}{m}\sum_{j\in M}\eta_j - \frac{s}{n}\sum_{i\in N}\theta_i = \frac{1}{m}\sum_{l=1}^{m}\left(\sum_{j\in T_l}\eta_j\right) - \frac{1}{n}\sum_{w=1}^{n}\left(\sum_{i\in S_w}\theta_i\right), \tag{15}$$

其中$T_l = \left\{\langle l\rangle_m, \langle l+1\rangle_m, \ldots, \langle l+t-1\rangle_m\right\}$，$1 \le l \le m$，这里函数$\langle l\rangle_m$表示整数$l$被$m$除后得到的余数，$0 \le \langle l\rangle_m \le m-1$。同理，$S_w = \left\{\langle w\rangle_n, \langle w+1\rangle_n, \ldots, \langle w+s-1\rangle_n\right\}$，$1 \le w \le n$。根据(10)，$\forall l = 1,\ldots,m$，$\forall w = 1,\ldots,n$：

$$\sum_{j\in T_l}\eta_j - \sum_{i\in S_w}\theta_i \ge \Sigma_{s,t}^{*} - sf\left(a_{n,m}\right) + tc\left(b_{n,m}\right)。 \tag{16}$$

将(16)对l求平均，得到

$$\frac{1}{m}\sum_{l=1}^{m}\left(\sum_{j\in T_l}\eta_j\right) - \sum_{i\in S_w}\theta_i \ge \Sigma_{s,t}^{*} - sf\left(a_{n,m}\right) + tc\left(b_{n,m}\right)。 \tag{17}$$

再将(17)对w求平均，得到

$$\frac{1}{m}\sum_{l=1}^{m}\left(\sum_{j\in T_l}\eta_j\right) - \frac{1}{n}\sum_{w=1}^{n}\left(\sum_{i\in S_w}\theta_i\right) \ge \Sigma_{s,t}^{*} - sf\left(a_{n,m}\right) + tc\left(b_{n,m}\right)。 \tag{18}$$

结合(15)和(18)可得，$\forall S \subset N$ 和 $T \subset M$，$t\widehat{\eta}_0 - s\widehat{\theta}_0 \ge \Sigma_{s,t}^{*} - sf\left(a_{n,m}\right) + tc\left(b_{n,m}\right)$。根据(12)，我们证明了对称配置$\left(\widehat{k}, \widehat{p}\right) \in C^S\left(G_{n,m}\right)$，从而$C^S\left(G_{n,m}\right)$非空。 ■

根据引理 3 我们很容易看出，一个博弈$G_{n,m}$的核非空的充要条件是其对称子核非空，而考察对称子核常常更方便，因此我们可以利用这一结论来简化后文的一些分析，例如对核的非空性的讨论。

如果n和m不是互质的，即存在整数$d > 1$，使得$n = dn_1$，$m = dm_1$，则我们把博弈$G_{n,m}$称为G_{n_1,m_1}的d倍复制经济，或者简单的把$G_{n,m}$称为一个复制经济。下面的引理告诉我们，一个复制经济的核中只有对称的配置。

引理 4： $G_{n,m}$是G_{n_1,m_1}的d倍复制经济，$d > 1$，则$C\left(G_{n,m}\right) = C^S\left(G_{n,m}\right)$。

证明：只需证明$C\left(G_{n,m}\right) \subset C^S\left(G_{n,m}\right)$即可。$\forall (k,p) \in C\left(G_{n,m}\right)$，令$S = N_l$，$T = M_l$，其中$N_l$和$M_l$分别是有$n_1$个消费者和$m_1$个生产者的集合，且$\bigcup_{l=1}^{d} N_l = N$，$\bigcup_{l=1}^{d} M_l = M$。根据(10)和引理 1 可以得到，$\forall l = 1,\ldots,d$：

$$\sum_{j\in M_l}\eta_j \ge \sum_{i\in N_l}\theta_i, \tag{19}$$

从而

$$\sum_{j\in M}\eta_j=\sum_{l=1}^{d}\sum_{j\in M_l}\eta_j\geq\sum_{l=1}^{d}\sum_{i\in N_l}\theta_i=\sum_{i\in N}\theta_i\text{。}\tag{20}$$

但另一方面，根据(9)，(20)中的等号成立。这样，$\forall l=1,\ldots,d$，(19)中等号一定成立，即

$$\sum_{j\in M_l}\eta_j=\sum_{i\in N_l}\theta_i\text{。}\tag{21}$$

$\forall i_1,i_2\in N$，$i_1\neq i_2$，由于将N划分为$\left\{N_l,l=1,\ldots,d\right\}$的任意性，可以取$N_l$满足$i_1\in N_1$，$i_2\notin N_1$，再取$N_2=\left(N_1\bigcup\left\{i_2\right\}\right)\backslash\left\{i_1\right\}$，则根据(21)可得

$$\sum_{i\in N_1}\theta_i=\sum_{j\in T}\eta_j=\sum_{i\in N_2}\theta_i\text{，}\quad t=m_1\text{，}$$

从而$\theta_{i_1}=\theta_{i_2}$，即$\forall i\in N$，$\theta_i$都相等，同理可以证明$\forall j\in M$，$\eta_j$都相等，因而$\left(k,p\right)$是一个对称配置，即$C\left(G_{n,m}\right)\subset C^S\left(G_{n,m}\right)$。 ■

引理4的结论类似于Debreu和Scarf（1963）中的定理2，通常被称为同等对待性质（equal treatment property）。Debreu和Scarf（1963）的模型只考虑了对称经济，因此在这一性质上与本文的结论是一致的。但我们的模型也允许非对称经济的存在，如果$G_{n,m}$不是一个复制经济，也就是说n和m互质，则$C\left(G_{n,m}\right)$中一般不只包含对称配置。例如，当$n=2$，$m=1$时，配置$\left(k,p\right)\in C\left(G_{2,1}\right)$的充要条件是$\eta_1=\theta_1+\theta_2$，且

$$f\left(a_{2,1}\right)+\Sigma_{1,1}^{*}-\Sigma_{2,1}^{*}\leq\theta_i\leq f\left(a_{2,1}\right)\text{，}\quad i=1,2\text{，}$$

显然不一定成立$\theta_1=\theta_2$。

五、核的构造与性质

给定任意的正整数n和m，我们现在来讨论核$C\left(G_{n,m}\right)$的构造和性质。根据上一节的分析，我们不妨先来讨论$C^S\left(G_{n,m}\right)$。我们已经知道，一个对称配置$\left(k,p\right)\in C^S\left(G_{n,m}\right)$，当且仅当$\forall S\subset N,T\subset M$，(12)成立。再利用(11)可得，这等价于对于任意非负整数s和t：

$$\left(\frac{n}{m}t-s\right)\theta_0\geq\Sigma_{s,t}^{*}-sf\left(a_{n,m}\right)+tc\left(b_{n,m}\right)\text{。}\tag{22}$$

如果$s=\dfrac{n}{m}t$，则(22)显然成立。如果$s>\dfrac{n}{m}t$，则(22)等价于

$$\theta_0 \le f\left(a_{n,m}\right)-\frac{m\sum_{s,t}^{*}-t\sum_{n,m}^{*}}{sm-tn}。\tag{23}$$

如果$s<\frac{n}{m}t$，则(22)等价于

$$\theta_0 \ge f\left(a_{n,m}\right)-\frac{t\sum_{n,m}^{*}-m\sum_{s,t}^{*}}{tn-sm}。\tag{24}$$

令$\omega_{n,m}\left(s,t\right)=\frac{m\sum_{s,t}^{*}-t\sum_{n,m}^{*}}{sm-tn}$，为了求解$C^S\left(G_{n,m}\right)$中的$\theta_0$的可能范围，我们需要在$s>\frac{n}{m}t$的条件下求解$\omega_{n,m}\left(s,t\right)$的最大值，而在$s<\frac{n}{m}t$条件下求解$\omega_{n,m}\left(s,t\right)$的最小值。我们首先可以得到如下引理。

引理 5：固定t，当$s>\frac{n}{m}t$时，$\omega_{n,m}\left(s,t\right)$是$s$的严格递减函数，而当$s<\frac{n}{m}t$，$\omega_{n,m}\left(s,t\right)$也是$s$的严格递减函数。

证明：当$s>\frac{n}{m}t$时，显然$s+1>\frac{n}{m}t$，这时

$$\omega_{n,m}\left(s+1,t\right)-\omega_{n,m}\left(s,t\right)=\frac{m\sum_{s+1,t}^{*}-t\sum_{n,m}^{*}}{\left(s+1\right)m-tn}-\frac{m\sum_{s,t}^{*}-t\sum_{n,m}^{*}}{sm-tn}$$

$$=\frac{\left(sm^2-tmn\right)\sum_{s+1,t}^{*}-\left(sm^2+m^2-tmn\right)\sum_{s,t}^{*}+tm\sum_{n,m}^{*}}{\left[\left(s+1\right)m-tn\right]\left[sm-tn\right]}。$$

这时根据性质 2 和性质 3，$\omega_{n,m}\left(s+1,t\right)<\omega_{n,m}\left(s,t\right)$，因而，当$s>\frac{n}{m}t$时$\omega_{n,m}\left(s,t\right)$是$s$的严格递减函数。该引理的另一半结论同理可以得到证明。 ■

给定任意的$1\le t\le m$，我们令$\underline{s}\left(t\right)$是小于$\frac{tn}{m}$的最大整数；对任意的$1\le t\le m-1$，令$\overline{s}\left(t\right)$是大于$\frac{tn}{m}$的最小整数（参见图 2），这里不需要考虑$t=m$是因为这时$\frac{tn}{m}=n$，不可能存在$s>n$。对于$2\le t\le m-1$，如果$\frac{tn}{m}$是整数，则$\overline{s}\left(t\right)=\underline{s}\left(t\right)+2$，否则$\overline{s}\left(t\right)=\underline{s}\left(t\right)+1$。当$s>\frac{n}{m}t$时，根据引理 5，为了得到$\omega_{n,m}\left(s,t\right)$的最大值，我们可以在$s=\overline{s}\left(t\right)$的约束下求解$\omega_{n,m}\left(s,t\right)$的最大值，为此令$\overline{\rho}_{n,m}\left(t\right)=\omega_{n,m}\left(\overline{s}\left(t\right),t\right)$，并求解$\overline{\rho}_{n,m}\left(t\right)$在$1\le t\le m-1$中的最大值。同样的，当$s<\frac{n}{m}t$时，为求解$\omega_{n,m}\left(s,t\right)$的最小值，令$\underline{\rho}_{n,m}\left(t\right)=\omega_{n,m}\left(\underline{s}\left(t\right),t\right)$，并求解$\underline{\rho}_{n,m}\left(t\right)$在$1\le t\le m$的最小值。

引理 6：$\overline{\rho}_{n,m}\left(t\right)$随着$\overline{s}\left(t\right)/t$的增加而递减，$\underline{\rho}_{n,m}\left(t\right)$随着$\underline{s}\left(t\right)/t$的增加而递减。

证明： $\overline{\rho}_{n,m}(t_1)-\overline{\rho}_{n,m}(t_2)=\dfrac{m\sum^*_{\overline{s}(t_1),t_1}-t_1\sum^*_{n,m}}{\overline{s}(t_1)m-t_1n}-\dfrac{m\sum^*_{\overline{s}(t_2),t_2}-t_2\sum^*_{n,m}}{\overline{s}(t_2)m-t_2n}$

$$=m\frac{\left(\overline{s}(t_2)m-nt_2\right)\sum^*_{\overline{s}(t_1),t_1}-\left(\overline{s}(t_1)m-t_1n\right)\sum^*_{\overline{s}(t_2),t_2}+t_1t_2\left[\dfrac{\overline{s}(t_1)}{t_1}-\dfrac{\overline{s}(t_2)}{t_2}\right]\sum^*_{n,m}}{\left[\overline{s}(t_1)m-t_1n\right]\left[\overline{s}(t_2)m-t_2n\right]}。$$

再根据性质 2 和性质 3，当 $\dfrac{\overline{s}(t_1)}{t_1}>\dfrac{\overline{s}(t_2)}{t_2}$ 时，$\overline{\rho}_{n,m}(t_1)<\overline{\rho}_{n,m}(t_2)$；当 $\dfrac{\overline{s}(t_1)}{t_1}<\dfrac{\overline{s}(t_2)}{t_2}$ 时，$\overline{\rho}_{n,m}(t_1)>\overline{\rho}_{n,m}(t_2)$；当 $\dfrac{\overline{s}(t_1)}{t_1}=\dfrac{\overline{s}(t_2)}{t_2}$ 时，$\overline{\rho}_{n,m}(t_1)=\overline{\rho}_{n,m}(t_2)$。因此 $\overline{\rho}_{n,m}(t)$ 随着 $\overline{s}(t)/t$ 的增加而递减，同理可以证明 $\underline{\rho}_{n,m}(t)$ 随着 $\underline{s}(t)/t$ 的增加而递减。 ■

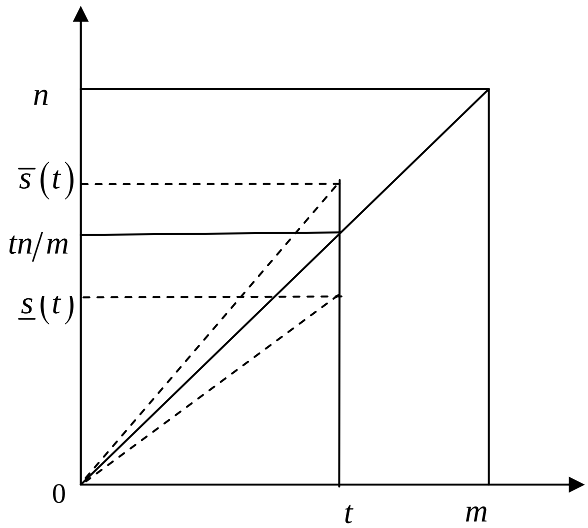

图 2: $\overline{s}(t)$ 和 $\underline{s}(t)$ 示意图

引理 7：对任意正整数 n 和 m， $\max\limits_{(s,t)\in\overline{\Theta}_{n,m}}\omega_{n,m}(s,t)\le\min\limits_{(s,t)\in\underline{\Theta}_{n,m}}\omega_{n,m}(s,t)$，其中

$\overline{\Theta}_{n,m}=\left\{(s,t):1\le s\le n,1\le t\le m,s>\dfrac{n}{m}t\right\}$， $\underline{\Theta}_{n,m}=\left\{(s,t):1\le s\le n,1\le t\le m,s<\dfrac{n}{m}t\right\}$。

证明：$\forall(s_1,t_1)\in\overline{\Theta}_{n,m}$， $\forall(s_2,t_2)\in\underline{\Theta}_{n,m}$，

$$\omega_{n,m}(s_2,t_2)-\omega_{n,m}(s_1,t_1)$$

$$=\frac{t_2\sum^*_{n,m}-m\sum^*_{s_2,t_2}}{t_2n-s_2m}-\frac{m\sum^*_{s_1,t_1}-t_1\sum^*_{n,m}}{s_1m-t_1n}$$

$$=m\frac{\left(s_1t_2-s_2t_1\right)\sum_{n,m}^*-\left(s_1m-t_1n\right)\sum_{s_2,t_2}^*-\left(t_2n-s_2m\right)\sum_{s_1,t_1}^*}{\left(t_2n-s_2m\right)\left(s_1m-t_1n\right)}。$$

根据性质 2 和性质 3，$\omega_{n,m}\left(s_2,t_2\right)>\omega_{n,m}\left(s_1,t_1\right)$，因此结论成立。 ■

定理 1：对任意正整数 n 和 m，博弈 $G_{n,m}$ 的核 $C\left(G_{n,m}\right)$ 不是空集。

证明：我们只需证明博弈 $G_{n,m}$ 的对称子核 $C^S\left(G_{n,m}\right)$ 不是空集即可。根据前文的分析我们知道，一个对称配置 $\left(k,p\right)\in C^S\left(G_{n,m}\right)$ 的充要条件是，对任意的 $s>\frac{tn}{m}$，(23)成立，且对任意的 $s<\frac{tn}{m}$，(24)成立。引理 7 告诉我们，同时满足这两个条件的 θ_0 一定是存在的，设 θ_0^* 就是这样的一个 θ_0。我们构造 $\left(k^*,p^*\right)$，满足 $k_{ij}^*=\frac{a_{n,m}}{m}=\frac{b_{n,m}}{n}$，$p_{ij}^*=\frac{\theta_0^*}{a_{n,m}}$，则 $\left(k^*,p^*\right)$ 是对称配置，且 $\left(k^*,p^*\right)\in C^S\left(G_{n,m}\right)$。 ■

我们现在来考察 $C^S\left(G_{n,m}\right)$ 的结构，并讨论 n 和 m 的变化怎样影响 $C^S\left(G_{n,m}\right)$。一个对称配置 $\left(k,p\right)$ 是否在 $C^S\left(G_{n,m}\right)$ 中，只取决于其对应的 θ_0 值是否分别在 $\overline{\Theta}_{n,m}$ 和 $\underline{\Theta}_{n,m}$ 内满足(23)和(24)。从这个意义上来看，为了考察 $C^S\left(G_{n,m}\right)$，需要考察分别在 $\overline{\Theta}_{n,m}$ 和 $\underline{\Theta}_{n,m}$ 内满足(23)和(24)的 θ_0 的范围，而这个范围取决于 $\omega_{n,m}\left(s,t\right)$ 在 $\overline{\Theta}_{n,m}$ 内的最大值和在 $\underline{\Theta}_{n,m}$ 内的最小值。根据引理 5 和引理 6，$\omega_{n,m}\left(s,t\right)$ 在 $\overline{\Theta}_{n,m}$ 内的最大值在 $\overline{t}^*\in\arg\min\overline{s}\left(t\right)/t$，$\overline{s}^*=\overline{s}\left(\overline{t}^*\right)$ 时取得，而 $\omega_{n,m}\left(s,t\right)$ 在 $\underline{\Theta}_{n,m}$ 内的最小值在 $\underline{t}^*\in\arg\max\underline{s}\left(t\right)/t$，$\underline{s}^*=\underline{s}\left(\underline{t}^*\right)$ 时取得。对于一般的 n 和 m，除了以上方法之外，似乎很难得到简单而统一的方法来求解出 θ_0 的范围。因此下面我们只给出几个有一定代表性的例子，来考察其中的对称子核的范围。我们把更一般性结论留给以后的研究。

例 1：单方垄断经济。

我们把交易中一方的人数为 1 的博弈，即 $G_{1,m}$ 或 $G_{n,1}$，称为单方垄断经济。由于对称性，我们这里只考察 $G_{n,1}$，即生产者垄断经济。在 $\overline{\Theta}_{n,1}$ 内的每个点都满足 $t=0$，$\overline{s}\left(t\right)/t$ 不存在，但这时 $\omega_{n,1}\left(s,0\right)=0$，(23)等价于 $\theta_0\le f\left(a_{n,1}\right)$，即个人理性条件。在 $\underline{\Theta}_{n,1}$ 内使得 $\underline{s}\left(t\right)/t$ 最大的点 $\left(s,t\right)$ 是 $\left(n-1,1\right)$，这时 $\omega_{n,1}\left(n-1,1\right)=\sum_{n,1}^*-\sum_{n-1,1}^*$。因而，$C^S\left(G_{n,1}\right)$ 中的配置满足

$$f\left(a_{n,1}\right)-\left(\sum_{n,1}^{*}-\sum_{n-1,1}^{*}\right)\le\theta_0\le f\left(a_{n,1}\right)。\qquad(25)\ \blacksquare$$

例 2：对称经济。

我们把交易双方人数相等的博弈，即$G_{n,n}$，称为对称经济。显然对称经济是一种特殊的复制经济，根据引理 4，其核中只有对称配置。在$\overline{\Theta}_{n,n}$内使得$\overline{s}(t)/t$最小的点(s,t)是$(n,n-1)$，在$\underline{\Theta}_{n,n}$内使得$\underline{s}(t)/t$最大的点(s,t)是$(n-1,n)$。由此容易得到$C\left(G_{n,n}\right)$中的配置满足

$$f\left(a_{1,1}\right)-\left(\sum_{n,n}^{*}-\sum_{n-1,n}^{*}\right)\le\theta_0\le f\left(a_{1,1}\right)-\left(\sum_{n,n-1}^{*}-\sum_{n-1,n-1}^{*}\right)。\qquad(26)\ \blacksquare$$

例 3: 设$f(k)=k^{1/\alpha}$，$c(k)=k^{\beta}$，其中$\alpha>1$，$\beta>1$。可以求出$a_{s,t}=(\alpha\beta)^{-\frac{\alpha}{\alpha\beta-1}}\left(\frac{t}{s}\right)^{\frac{\alpha(\beta-1)}{\alpha\beta-1}}$，

$b_{s,t}=(\alpha\beta)^{-\frac{\alpha}{\alpha\beta-1}}\left(\frac{t}{s}\right)^{\frac{1-\alpha}{\alpha\beta-1}}$，$f\left(a_{s,t}\right)=(\alpha\beta)^{-\frac{1}{\alpha\beta-1}}\left(\frac{t}{s}\right)^{\frac{\beta-1}{\alpha\beta-1}}$，$c\left(b_{s,t}\right)=(\alpha\beta)^{-\frac{\alpha\beta}{\alpha\beta-1}}\left(\frac{t}{s}\right)^{\frac{(1-\alpha)\beta}{\alpha\beta-1}}$，

$\sum_{s,t}^{*}=\left(1-\frac{1}{\alpha\beta}\right)(\alpha\beta)^{-\frac{1}{\alpha\beta-1}}t^{\frac{\beta-1}{\alpha\beta-1}}s^{\frac{\beta(\alpha-1)}{\alpha\beta-1}}$。

我们在$f(k)=k^{1/\alpha}$，$c(k)=k^{\beta}$的情况下继续讨论例 1，当n很大时，(25)近似于

$$\left[(\alpha\beta)^{\frac{1}{\alpha\beta-1}}-\beta(\alpha-1)(\alpha\beta)^{-\frac{\alpha\beta}{\alpha\beta-1}}\right]n^{-\frac{\beta-1}{\alpha\beta-1}}\le\theta_0\le(\alpha\beta)^{\frac{1}{\alpha\beta-1}}n^{-\frac{\beta-1}{\alpha\beta-1}}。\qquad(27)$$

容易看出，随着消费者人数n的增大，θ_0将不断减小并收敛于零。另一方面，$\forall i\in N$，$p_{i,1}=\frac{\theta_0}{a_{n,1}}$，根据(27)可以得到

$$\left[1-\beta(\alpha-1)(\alpha\beta)^{-\frac{\alpha\beta+1}{\alpha\beta-1}}\right]n^{\frac{(\alpha-1)(\beta-1)}{\alpha\beta-1}}\le p_{i,1}\le n^{\frac{(\alpha-1)(\beta-1)}{\alpha\beta-1}}，\qquad(28)$$

即随着消费者人数n的增大，$p_{i,1}$总体上将不断增大，但$p_{i,1}$的可能区间长度也在不断增大，并不会收敛到一个固定值。

我们再来讨论例 2，在$f(k)=k^{1/\alpha}$，$c(k)=k^{\beta}$的情况下，当n很大时，(26)近似于

$$\theta_0=\alpha^{-1}(\alpha\beta)^{-\frac{1}{\alpha\beta-1}}。\qquad(29)$$

也就是说，当n很大时，$G_{n,n}$的核中的配置的θ_0将收敛到一个常数。另一方面，给定n和θ_0，

$C\left(G_{n,n}\right)$中的配置$\left(k,p\right)$的条件是$\forall i\in N$，$\sum_{j\in M}p_{ij}k_{ij}=\theta_0$，$\sum_{j\in M}k_{ij}=a_{1,1}$。显然这时$\left(k,p\right)$有无穷多组解，也就是说即使核中的$\theta_0$是唯一的，核中的配置也不是唯一的，特别的，核中的价格也不唯一。 ■

六、讨论与结论

本文通过扩展了的讨价还价模型，讨论了由任意有限数量的消费者和生产者组成的局部市场交易。我们把这个双边市场交易描述为一个联盟形式的博弈，并用核作为解概念来考察博弈的结果。对于任意的n和m，我们能够证明核是非空的，并能够以一种统一的方法构造出对称子核。我们的模型的一个重要的设定是参与人的效用的拟线性，这使得我们可以把讨价还价博弈写成支付可转移的（transferable utility）联盟形式。如果效用函数不是拟线性的，模型可能只能采用更复杂的支付不可转移的形式了。

本文的一个没有完成的工作，是虽然对一般的n和m给出了求解对称子核的方法，但没有对核的构造和性质做出足够的描述，而只是给出了几个特例。特别的，我们没有给出类似于核等价定理的结论。事实上，在直观上当n和m都很大的时候，我们应该可以得到θ_i或η_j的近似唯一性（注意不是价格的唯一性）。此外，我们还需要得到比较明确的比较静态分析的结论，即参与人数量的变化如何影响核中的配置。以上没有完成的工作都需要在今后的工作中加以考察。

我们采用合作博弈的方法来处理讨价还价问题的，表面上看起来，市场交易是一个非合作的分散化的过程，但合作博弈强调的是联盟参与人之间的合作行为，似乎采用这一框架并不太合适。但是，采用合作博弈的框架与核的解概念，并不是说参与人真的会形成整体联盟来决定配置，而是说没有联盟会产生来阻止一种配置，这种核中的配置可以通过分散的市场上不断调整来实现。因此虽然我们采用的是一个合作博弈的解概念，但这并不与市场交易的分散性所矛盾，而只是考虑了原来所没有考虑的联盟的可能性。这种联盟的可能性，无论在理论上，还是现实中，都是重要的。

我们来讨论一下在我们的模型中完全竞争假设成立的条件。也就是说，我们想要知道在什么条件下，对核中的任意的配置，都能找到一个固定值，使得所有分散化的交易价格p_{ij}都等于这个值，或至少是充分接近这个值。从上一节的分析中我们可以看出，一个配置$\left(k,p\right)$是否在对称子核中，主要取决于θ_0。如果对称子核中只有唯一的θ_0，例如上一节例 3 中人数n趋于无穷的对称经济$G_{n,n}$，并不能保证所有的p_{ij}都是相等的。如果对称子核中的θ_0不唯一，例如上一节例 3 中消费者人数n趋于无穷的单方垄断经济$G_{n,1}$，即使对同一个θ_0的价格是唯一的，对于不同θ_0的价格也是不同的，因此也不能保证对称子核中的配置的所有的p_{ij}都是相等的。因此，对于任意一个博弈$G_{n,m}$，完全竞争假设一般都不能成立。可以看

出，完全竞争假设之所以不成立的原因在于对核中配置的限制主要取决于 θ_i ，这是由交易价格和数量同时决定的，并不只取决于价格。这反映了我们在引言部分所提到，在交易中价格和数量需要同时决定的观点。

如果我们承认完全竞争假设的确可以不成立的话，就需要对微观经济分析中的许多传统的方法和结论进行重新的考察。首先，我们必须明确的是，究竟什么是“价格”？市场价格这一概念在什么情况下才是有意义的？其次，与价格相关的很多理论的有效性也要进一步考察，例如常用的需求定律，如果没有统一的市场价格可以依靠，还是否有意义？

我们的模型和传统模型在结论上存在不一致，那么究竟哪一种模型是正确的？在现实中，我们既可以看到遵从完全竞争假设的市场，也可以看到不太遵从完全竞争假设的市场。这表明我们在本文中提出的模型框架与传统框架一样，都不能全面完整的刻画市场交易。据我看来，本文的讨价还价模型至少具有以下缺点，这些缺点也给我们在今后的工作中进一步改进讨价还价模型提供了新的课题。

第一，市场上的某些定价制度排除了讨价还价的可能性。例如，在现实中我们常可以看到在一些交易中，厂商是采用明码标价的定价制度的，即不允许消费者对价格进行讨价还价，即使理论上允许讨价还价可能会使厂商获得更高的利润，而在另一些市场上，则是允许讨价还价的。为什么不同的厂商会选择不同的定价制度？换句话说，定价制度是怎样内生选择的？第二，核这一解概念本身是有缺点的。例如，核要求一个联盟阻止某个配置时，需要完全不和联盟外的参与人交易。这一措施相对现实来说，有些太过于强硬了。讨价还价的调整过程完全可以是局部的，即在保留与联盟外的部分交易的情况下，某个联盟在内部再进行调整。第三，在现实中，结盟是有成本的，这一点在我们的模型中完全没有考虑。进一步的工作需要把结盟的成本考虑进模型中来，从而更现实的反映市场中的讨价还价现象。

参考文献：

Bloch, F. and S. Ghosal, 1997, Stable Trading Structures in Bilateral Oligopolies, *Journal of Economic Theory* 74, 368-384.

Debreu, G. and H. Scarf, 1963, A Limit Theorem on the Core of an Economy, *International Economic Review* 4, 235-246.

Engl, G. and S. Scotchmer, 1997, The law of supply in games, markets and matching models, *Economic Theory* 9(3), 539-550.

Gale, D., 2000, *Strategic Foundation of General Equilibrium: Dynamic Matching and Bargaining Games*, Cambridge University Press.

Myerson, R., 1991, *Game Theory: Analysis of Conflict*, Harvard University Press.

Nash, J., 1950, The Bargaining Problem, *Econometrica* 18, 155-162.

Shapley, L. S., and M. Shubik, 1969, On Market Games, Journal of Economic Theory 1, 9-25.